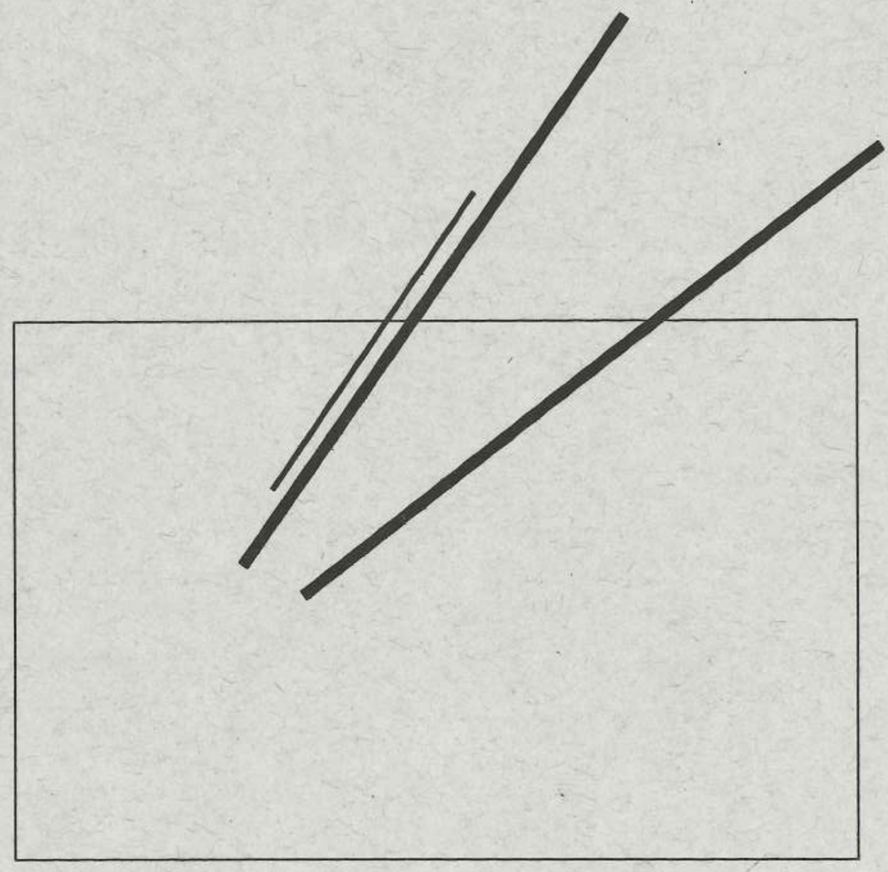
FLATARmál



1. tbl. 4. árg. nóvember 1996

Málgagn Flatar,
samtaka stærðfræðikennara

Spjall

Það er langt síðan síðasta blað var á ferðinni. Það var reyndar mikið að vöxtum líkt og það blað sem þú hefur nú í höndum. Þykk blöð eru lengi í smíðum. Þykkblöðungar gefa tilefni til að skoða tiltekin málefni frá mismunandi sjónarhornum. Þá var skrifað um vasareikna, nú er námsmat í brennidepli. Það er veigamikill þáttur í skólastarfinu og því áleitið umhugsunarefni öllum þeim sem koma nærri skólamálum. Auk umfjöllunar um samræmd próf og námsmat birtist í blaðinu viðtal við sænskan gest sem flutti fyrirlestur um algebru, sagt er frá námskeiði Flatar 1995, birt er verkefni úr stærðfræðikeppni framhaldsskólanema og fleira.

Sólrún Harðardóttir

FLATAR mál

Útgefandi:
Flötur – samtök stærðfræðikennara, Kennaraháskóla Íslands, Stakkahlíð, 105 Reykjavík
Ritstjórar og ábyrgðarmenn:
Sólrún Harðardóttir og Sveinn Ingimarsson
Stjórn Flatar:
Anna Kristjánsdóttir formaður, Soffía Ingvarsdóttir varaformaður, Elías B. Sólmundarson gjaldkeri, Helga Björnsdóttir ritari, Meyvant Þórólfsson meðstjórnandi, Erna Guðmundsdóttir og Margrét Björnsdóttir í varastjórn.
Útlit: Sólrún Harðardóttir
Prófarkalesari: Kristinn Gíslason
Ljósmyndari: Sólrún Harðardóttir og Guðbjörg Pálsdóttir
Tölublaðið er gefið út í 500 eintökum.

Samræmt próf í stærðfræði við lok grunnskóla

Anna Kristjánsdóttir

Upprunalegu erindi hefur verið breytt talsvert til þess að það henti betur sem tímaritsgrein og geti vonandi skapað grundvöll umræðna meðal kennara sem ekki áttu þess kost að sækja fundinn.

Áhrif samræmda prófsins

Samræmda prófið er skilaboð til nemenda um hvað skipti máli í stærðfræðinámi og til kennara um mikilvægar áherslur í kennslunni. Því er ætlað að vera í samræmi við markmið aðalnámskrár og máli skiptir að það sé réttvísandi. Skorti mat á mikilvægum atriðum, sem hægt er að meta, og sé of mikil áhersla á lítilvæg atriði, hvort sem varðar inntak eða vinnubrögð, er próf ekki nægilega réttvísandi.

Hér á undan mér á fundinum hafa talað menn sem hafa góða yfirsýn yfir samræmd próf síðustu ára. Einar Guðmundsson benti á að skoðanakönnun sýni að íslenskir kennarar vilji að samræmt próf liggi til grundvallar ákvörðun um framhald náms og að það sýni í hvaða mæli námsmarkmiðum er náð. Lárus H. Bjarnason nefndi nokkur dæmi um meginmarkmið í stærðfræðikafla aðalnámskrár og að menn hefðu glímt við að semja viðfangsefni sem gætu mætt kröfum mismunandi meginmarkmiða.

Mæta þarf óskum kennara og tryggja að prófið gefi sem bestar upplýsingar. Til þess þarf að vanda vinnu við gerð verkefna sem svara til þeirra markmiða sem enn er lítil reynsla af að meta. Jafnframt tel ég þurfa að auka möguleika prófsins á að greina grundvallarskilning nemendanna en leggja minni áherslu á smærri framkvæmdaatriði í vinnu þeirra. Þetta mun gefa auknar og betri vísbendingar um hæfni nemenda til framhaldsnáms svo og veita upplýsingar til þeirra um æskilegt veganesti fyrir það. Að sjálfsögðu á prófið ekki að vera eitt um að koma slíkum skilaboðum á framfæri en í því þurfa þau að endurspeglast greinilega og af fullum þunga.

Í ritinu *Measuring What Counts,* sem gefið var út í Bandaríkjunum árið 1993 af Mathematical Sciences Education Board, er lögð áhersla á að allt námsmat skuli byggjast á þremur meginviðmiðunum: Það skuli endurspegla þá stærðfræði sem mikilvægast er fyrir nemendur að læra, það skuli efla stærðfræðinám og styðja góða kennsluhætti og að það skuli veita sérhverjum nemanda tækifæri á að læra mikilvæga stærðfræði. Þetta er ekki í neinni andstöðu við það sem segir í íslenskum námskrárskrifum. En skoðum málið nánar. Í raun er verið að vara við því að prófa aukaatriði og að gera prófið þannig úr garði að hætta sé á að það ýti undir lélega kennsluhætti. Hér er prófsemjendum að sjálfsögðu nokkur vandi á höndum því að þeir þurfa að geta greint í hverju gæði námsins eru fólgin og samið próf sem hefur áhrif á að gæði náms og kennslu aukist. Allir þekkja þau beinu áhrif sem ytra námsmat getur haft á kennslu. Af samtölum við fjölmarga kennara má sjá hve algengt það er að samræmda prófið komi kennurum til að kenna nákvæmlega það sem þeir halda að muni koma á prófi. Sumir segjast jafnvel kenna það á þann hátt að stríði gegn betri vitund sinni til þess eins að þjálfa nemendur sem best. Skammtímatilgangur helgar skammtímameðal. Til þess að breyting verði á þarf m.a. að taka tillit til þess sem hér á undan er sagt í prófgerð en einnig þarf að sjálfsögðu að koma til aukið faglegt öryggi kennara.

Mikilvægir þættir prófsins og hjálpargögn

Þess er enginn kostur að fjalla í stuttu erindi eða grein um alla þætti samræmda prófsins. Ég hefi því hugsað mér að takmarka mál mitt við algebruna, ekki bara algebruval heldur alla þá algebru sem í prófinu er að finna. En fyrst vil ég staðnæmast við formúlublað sem fylgir prófinu og hefur gert það undanfarin ár. Þetta blað er á ýmsan hátt gagnrýnivert. Ekki tilvist þess heldur hvað er á því og hvernig það er fram sett.

Á blaðinu eru flestar þær formúlur sem í hefðbundnu námsefni tengjast útreikningum á flatarmáli og rúmmáli. Sumar eru flóknar en aðrar einfaldar. Þarna er að finna formúlur fyrir flatar- og ummáli rétthyrnings og fyrir rúmmáli ferstrendings. Það er því ekki gerð krafa til nemenda um að þeir kunni slíkt sjálfir. Þó er um að ræða þekkingu sem reynir mjög oft á í daglegu lífi og nemendur geta ágætlega fundið út sjálfir á 10-12 ára aldri. Að hafa þessar formúlur á blaðinu gefur nemendum röng skilaboð um hvað skipti máli að kunna. Og það gefur kennurum röng skilaboð um áherslu í rúmfræðikennslu og þá sérstaklega varðandi mikilvægi mælinga og ályktana.

Í öðru lagi er blaðið á margan hátt óheppilega hannað og sýnir stundum sundurlausa þekkingarbúta í stað þess að leggja áherslu á það samhengi sem getur hjálpað nemendum til að öðlast einfalda og skýra yfirsýn. Dæmi um þetta er t.d. að ekki er sýnt samhengi rúmmáls strendinga og sívalninga, þ.e.a.s. að hvort tveggja er margfeldi af flatarmáli grunnflatar og hæðar. Fleiri slík dæmi mætti taka.

Þriðja atriðið í gagnrýni minni er þó veigamest sem sé það að ekki eru gefnar aðrar formúlur eða upplýsingar um algilt samhengi en varðandi rúmfræði. Þó koma fjölmargar aðrar formúlur til greina. Ekkert er t.d. gefið varðandi hlutfalladæmi; prósentureikning, vaxtareikning eða rétt hlutfall almennt. Ekkert er gefið upp um línuleg föll sem þó koma fyrir á prófinu. Engar upplýsingar er að finna um algild samhengi í algebru og grundvallarreglur á sviði talnareiknings. Þetta ósamræmi hefi ég hvergi séð rökstutt og á erfitt með að átta mig á ástæðum þess. Áhrifin má hins vegar auðveldlega sjá. Með því að velja einvörðungu formúlur úr rúmfræði og margar hverjar allt of léttar verður afleiðing sú að lítil áhersla er lögð á að nemendur mæli, beiti hugkvæmni í útreikningum úr mælingum og dragi ályktanir. Þetta er þó gagnleg reynsla og þekking. Með því að láta síðan vera að birta þyngri formúlur af öðrum sviðum fara nemendur að læra utanbókar hluti sem ekkert síður væri hægt að fletta upp en flatarmáli hrings eða rúmmáli sívalnings. Þarna þarf betra jafnvægi og rökstutt val.

Algebran á samræmda prófinu

Það væri afar æskilegt að gera algebruna, sem við kennum í grunnskólum og framhaldsskólum, hagnýtari fyrir nemendur en raun hefur borið vitni um. Þá er ekki vísað í þann orðaleik sem fylgir vali nemenda milli svokallaðrar hagnýtrar stærðfræði og algebru (væntanlega óhagnýtrar?). Átt er við mikilvægi þess að gefa nemendum tækifæri til að sjá betur en verið hefur hvað algebra snýst um, hvernig og hvers vegna hún varð til og hvaða gagn megi af henni hafa. Nemendur verða þá að beita og viðhalda heilbrigðri skynsemi og leggja sjálfir til mála við lausnaleit í stað þess að líkja eftir fyrirmyndum. Augljóst er að þetta verður ekki gert með því einu að segja það. En eftir miklu er að sækjast og mun meira er til nú af efni, sem kennarar geta stuðst við, en fyrir rúmum áratug. Samræmda prófið þarf að styðja kennara í viðleitni þeirra til að breyta algebrukennslunni í þessa veru.

Lárus H. Bjarnason sýndi okkur á fundinum árangur nemenda í nokkrum prófdæmum árið 1995 og lét í ljósi áhyggjur af lélegum árangri í dæmum sem reyndu á grundvallarskilning.

Innan við 30% nemenda gátu einfaldað

$$ab + ba =$$

en yfir 50% nemenda leystu rétt

$$(x + 2)^2 - x^2 - 5 =$$

Það er ástæða til að taka undir áhyggjur Lárusar en sams konar áhyggjur hafa verið látnar í ljósi um langt skeið. Ég læt eitt dæmi nægja. Prófsemjandi gerði eitt sinn tillögu vegna samræmds prófs um dæmið:

$$\frac{3a^6}{6a^4}$$

sem námstjóri lagði ég til að við hlið þess kæmi dæmið:

$$\frac{3 \cdot 24^6}{6 \cdot 24^4}$$

Þótt almennt hafi ekki verið athugað við yfirferð á samræmdum prófum hvernig einstök dæmi hafa komið út var þarna gerð undantekning. Í ljós kom að um 44% nemenda gátu leyst fyrra dæmið en aðeins um 8% hið síðara. Almennt nýttu nemendur í síðari hópnum sér ekki lausnina á fyrra dæminu heldur réðust þeir flestir að því sem nýju viðfangsefni og þorri þeirra fór óþarflega flóknar leiðir við að leysa það. Nemendur skorti skilning á sambandi algebru og talnareiknings og hæfni til að taka eftir mynstrum og samhengi. Slíka reynslu höfðu þeir ekki öðlast í kennslunni.

Rannsókn á stærðfræðiskilningi unglinga

Fyrir tæpum 15 árum gáfu Bretar út niðurstöður einnar umfangsmestu rannsóknar sem þá hafði verið gerð á hugtakaskilningi 11-16 ára nemenda í stærðfræði. Rannsóknin nefndist: *Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS)*. Ellefu efnisþáttum í stærðfræði voru gerð sérstök skil og var algebra einn þeirra. Niðurstöður birtust í skýrslunni *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* og nokkrum viðbótarskýrslum sem fylgdu í kjölfarið.

Í rannsókninni var athugað hvernig nemendur skildu viðfangsefni algebrunnar, ekki síst undirstöðuatriði, með það í huga að finna hvað væri hægt að kenna og hvernig. Þetta var kannað skriflega og með viðtölum. Í ljós kom að skilningur nemenda á merkingu bókstafa í algebru var afar mismunandi og var um sex ólíkar gerðir að ræða.

Rangtúlkun var ýmiss konar:

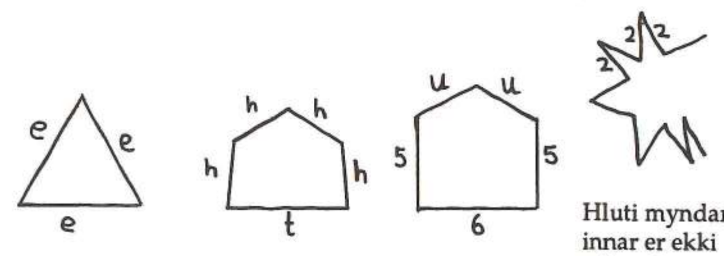
1 Nemandi setti einfaldlega tölu í stað bókstafsins.
2 Nemandi sleppti bókstafnum.
3 Nemandi leit á bókstafinn sem nafn á hlut eða skammstöfun, t.d. a sem appelsínur og b sem banana.

Raunhæfari skilningur birtist líka á mismunandi hátt:

4 Nemandi leit á bókstafinn sem sérstaka óþekkta stærð sem hann þurfti að finna gildið á.
5 Nemandi gerði sér ljóst að bókstafurinn getur tekið fleiri gildi en eitt, er eins konar almennur fulltrúi fyrir talnasafn.
6 Nemandi hafði fullan skilning á breytuhugtakinu, leit á bókstaf sem fulltrúa fyrir röð ótiltekinna gilda og gerði sér ljóst samband fleiri breytistærða og þeirra gilda sem þær gátu tekið.

Prófatriði voru síðan flokkuð á fjögur þyngdarstig þannig að nemendur sem gátu leyst prófatriði á 3. stigi gátu ráðið við allt sem var á 1. og 2. stigi. Prófatriði á 1. og 2. stigi var hægt að leysa þótt viðbrögð nemenda við bókstöfum væru einhver þeirra sem lýst var í 1. – 3. lið hér á undan. Til þess að leysa prófatriði á 3. eða 4. stigi varð nemandi a.m.k. að geta farið með bókstaf sem óþekkta stærð og stundum að sýna dýpri skilning. Dæmi um þetta má sjá hér á eftir þar sem hægt er að leysa dæmin þótt nemandi haldi að bókstafurinn sé eins konar skammstöfun eða nafn á hlut. Síðasta dæmið gengur þó ekki á þann hátt. Hundraðshlutar segja til um rétt svör 14 ára nemenda við dæmunum.

Nemendur áttu hér að tákna ummál flatanna.



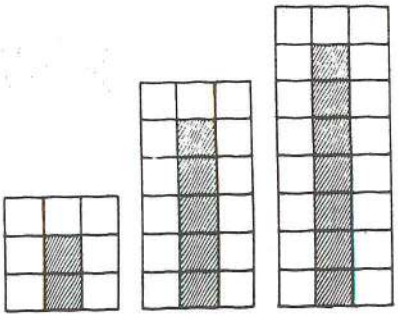
Hluti myndarinnar er ekki teiknaður. Fjöldi hliða er alls n og lengd þeirra er 2.

3e 94%	4h+t 68% 4h+1t	2u+16 u+u+16 64% 2u+25+16	2n 38% n2

Önnur dæmi gera þá kröfu að nemandi hafi að minnsta kosti þann skilning sem fram kom í 5. lið. Aftur segir svarhlutfall til um árangur 14 ára nemenda.

Þyngdarstig 3	%	Þyngdarstig (level) 4	%
Hvað geturðu sagt um c ef c+d=10 og c er minna en d?		L+M+N=L+P+N er alltaf stundum aldrei satt	
c<5 c=1,2,3,4, (kerfisbundinn listi) c= 10-d	11 19 4	Stundum, þegar M=P	25
Óreglulegur listi Aðeins eitt gildi (venjulega 4)	1 39	Stundum Eða M og P gefin sérstök gildi Aldrei	14 51

Fram kom að 53% af 15 ára nemendum voru á 1. eða 2. skilningsstigi og voru því ekki færir um að fást af fullri samkvæmni við prófatriði sem gera í raun kröfu um lágmarksskilning á merkingu bókstafanna. Í skýrslunni er bent á það hvernig mikilvægt sé að vinna með þessum nemendum í kennslu og t.d. bent á viðfangsefnið sem hér fer á eftir þar sem nemendur finna hve margar hvítar flísar þarf fyrir t.d. 10, 20 eða 100 svartar og fikra sig þannig yfir í að geta tjáð fjölda hvítu flísanna fyrir hvaða fjölda svartra sem vera kynni.



Einnig er lögð áhersla á að reyna í kennslu að hjálpa nemendum að ná skilningi á því hvað bókstafirnir merkja og að gera sér ljóst að það er misræmi milli þess að nota bókstafi sem „hluti" eins og t.d. þegar skrifað er 5 m (fimm metrar) og þess aftur sem gerist í algebru að bókstafir standa fyrir einhverjar tölur (til að byrja með náttúrlegar tölur eða fjölda) eins og í 5a.

Að lokum eru hér prófdæmi af 3. og 4. stigi og sýnt hvaða hlutfallsárangri 15 ára nemendur náðu í þeim.

Með því að nýta þessar niðurstöður, og fleiri af sama toga, má láta samræmda prófið okkar greina mun betur en það gerir nú. Það getur þá sagt betur en áður til um skilning nemenda og verið um leið betri ávísun á raunverulegan skilning í framhaldsskóla.

Það vekur e.t.v. athygli að hér eru fá eða engin dæmi þar sem nemanda er sagt að framkvæma eitthvað án þess að draga ályktun enda henta slík dæmi ekki vel til að sannreyna skilning á inntaki og merkingu. Því miður fá þau hins vegar of mikið vægi í kennslu og svokallaðri þjálfun í algebru og er það á kostnað dæma sem í raun „kenna" meira og betur.

Samræmda prófið getur hvatt til skynsamlegri vinnubragða og betri nýtingar á tíma nemenda. Auk þeirra vísbendinga sem ég hefi reynt að benda á hér á undan tel ég þurfa að fjölga þar dæmum sem láta glögga nemendur njóta sín og hvetja nemendur almennt til þess

$e + f = 8$, $e + f + g =$

13 ára: 25 14 ára: 41 15 ára: 50

$r = s + t$, $r + s + t = 30$, $r =$

13 ára: 30 14 ára: 41 15 ára: 39

n-hliða mynd þar sem lengd hverrar hliðar er 2. $u =$

13 ára: 24 14 ára: 38 15 ára: 41

Bættu 4 við 3n

13 ára: 22 14 ára: 36 15 ára: 41

$c + d = 10$, $c < d$
$c =$

13 ára: 21 14 ára: 30 15 ára: 35

L+M+N=L+P+N
Alltaf - Stundum (hvenær) - Aldrei

13 ára: 11 14 ára: 25 15 ára: 27

$(a - b) + b =$

13 ára: 15 14 ára: 23 15 ára: 32

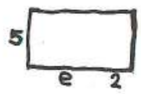
Hvað merkir 4c + 3b (ef kökur kosta c krónur hver og bollur kosta b krónur hver og ef keyptar eru 4 kökur o.s.frv.)

13 ára: 14 14 ára: 22 15 ára: 30

Margfaldaðu n + 5 með 4

13 ára: 8 14 ára: 17 15 ára: 25

$F =$



13 ára: 7 14 ára: 12 15 ára: 16

Ef $(x + 3)^3 + x = 349$ þegar $x = 6$, hvaða gildi á x gerir þá $(5x + 1)^3 + 5x = 349$ satt?

13 ára: 4 14 ára: 12 15 ára: 16

Hvor er stærri 2n eða n + 2 ?
Skýrðu út

13 ára: 4 14 ára: 6 15 ára: 10

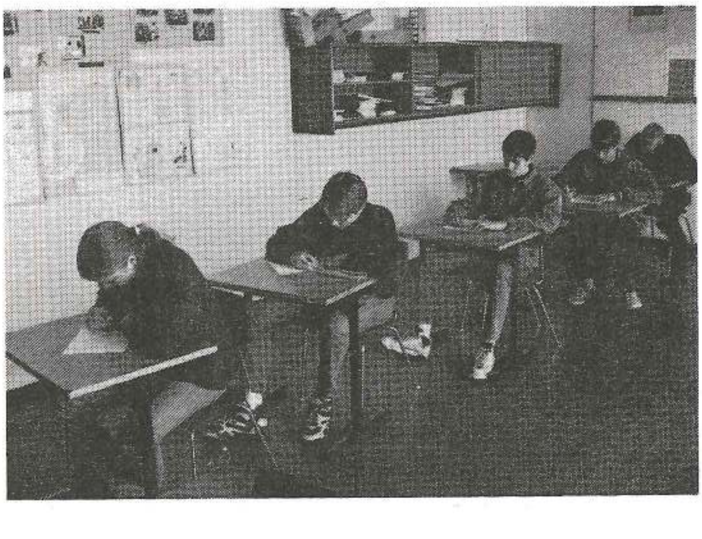
að beita glöggskyggni. Fleiri nemendur geta það en þeir efstu. Það skiptir máli að nemendur, sem sjá í hendi sér einfaldar lausnir og geta sannprófað þær og rökstutt, njóti þess vegna þess að slíkt er verðugur og mikilvægur eiginleiki. Það er of algengt að prófað sé hvort nemandi hafi náð tiltekinni aðferð fremur en að prófa hvort hann hafi raunverulega skilið og ráðið við að leysa viðfangsefni. Aðferðir breytast í samræmi við þá tækni sem við búum yfir en glöggur skilningur á viðfangsefnum fyrnist ekki.

Margir hafa skrifað um þetta mál

Skrif um nám og kennslu í stærðfræði hafa aukist að vöxtum og gæðum síðustu áratugi. Víða er algebrukennslu og skilningi nemenda á algebru lýst í þeim erlendu skrifum sem við eigum aðgang að. Ég vel nokkur dæmi um slíkt.

Freudenthal (1983) benti á að í hefðbundinni algebrukennslu sé þess krafist að nemendur verði leiknir í að beita máli algebrunnar á sama tíma sem þeim er ætlað að öðlast skilning á því hvernig nota megi þetta mál til þess að leysa merkingarbær vandamál. Erfitt er að mæta hvoru tveggja samtímis og flestir kennarar og kennslubækur eru færari í einfaldara viðfangsefninu sem nefnt var á undan. Þess vegna er svo mikil áhersla lögð á að umskrifa tákn á ýmsa vegu. Afleiðing birtist m.a. í því sem Wheeler (1989) bendir á. Hann segir að það séu ekki mjög margir sem geta leyst annars stigs jöfnu á formlegan hátt en þó margfalt fleiri en þeir sem vita hvenær og hvernig hægt er að nota þessa þekkingu til þess að leysa raunveruleg vandamál.

Niðurstöður rannsókna hafa sýnt í vaxandi mæli að skilningur margra nemenda er mjög fátæklegur á þeim stærðfræðilegu venslum eða samhengi sem eru grundvöllur „algebraiskrar" framsetningar. En skilningsskorturinn tengist ekki aðeins þeirri algebru sem nemendur eru e.t.v. að kynnast. Í yfirliti Kieran (1989) yfir rannsóknir á þessu sviði kemur skýrt í ljós að vandamálið á rætur í reikningi og erfiðleikar nemenda í algebru stafa að mestu af því að þeir skilja ekki vensl eða samhengi talna. Hæfileikinn til að vinna af skilningi í algebru, og þar með talið að ráða léttilega við hefðbundna meðferð tákna, er háður því að nemandi hafi fyrst náð merkingarlegum skilningi á því sem hann hefur fengist við í talnareikningi.



Í rannsóknum á námi og kennslu í algebru verður að taka á þeim vanda sem birtist í að nemendur verða fráhverfir stærðfræði. Kaput (1989) telur hana afleiðingu þess að áhersla er lögð á að kenna setningafræði (syntax) algebrunnar í stað þess að kenna merkingarfræði (semantics) hennar. Vandinn er margslunginn en birtist á tvennan hátt. Annars vegar fylgja erfiðleikar því að fást við hárnákvæma og samsetta setningafræði algebrunnar. Hins vegar skortir kunnáttu í að tengja táknræna notkun við fjölbreyttan framsetningarmáta til þess að nemendur eigi möguleika á að fylgjast stöðugt með því í leit sinni að lausn viðfangsefnis hve vel hvert skref á leiðinni eigi við.

Bodin (1993) bendir á að nemendur geti leyst uppgefnar jöfnur án þess að geta lýst því á sundurgreindan hátt hvernig þeir fara að því, hvers vegna leiðin stenst, hverju viðfangsefnið geti tengst eða hvaða tilgangi þjónað. Nemendur gátu leyst jöfnuna

$$7x - 3 = 13x + 15$$

en voru ekki færir um að svara spurningunni: Er 10 lausn á jöfnunni $7x - 3 = 13x + 15$? Um er að ræða mismunandi þekkingarstig. Fyrra dæmið er hægt að leysa með því að fylgja lærðri forskrift en hið síðara gerir kröfu til dómgreindar nemandans. En það er vissulega um leið nokkur prófsteinn á það hvort fyrrnefnda kunnáttan sé líkleg til að koma nemandanum að gagni.

Margir hafa spurt: Hvers vegna sætta nemendur sig við að æfa síendurtekin og þeim merkingarlítil dæmi og hvers vegna búa kennarar til viðbótardæmi af þeim toga til þess að þjálfa nemendur? Eins og fram kemur hér á undan hafa ýmsir sýnt að það sé vegna þess að það krefst minni áreynslu af hálfu bæði nemenda og kennara ef nemandi lærir aðeins að framkvæma en að hann nái skilningi á því sem hann er að framkvæma. Þá er að sjálfsögðu ekki hugsað um námið í víðtækara samhengi og horft er fram hjá óskinni um að nemendur geti beitt þekkingu sinni á raunhæfar aðstæður og viðfangsefni, að þeir geti notað hana til að skilja samhengi betur og að setja í samhengi. Ár eftir ár verður sú ósk að þoka fyrir tilbúnum skammtímaþörfum.

Kannske má ganga enn lengra í leit að ástæðum og velta því upp hvort e.t.v. sé of mörgum hulið að algebruþekkingu sé hægt að beita á merkingarbær viðfangsefni sem mæta okkur í lífinu. Ef sú er raunin þá er skiljanlegt að lögð sé einvörðungu áhersla á að æfa umröðun tákna og lausn á tilbúnum jöfnum sem fjalla ekki um neitt nema sjálfar sig. Það er hins vegar umhugsunar vert hve lengi slíkt má viðgangast.

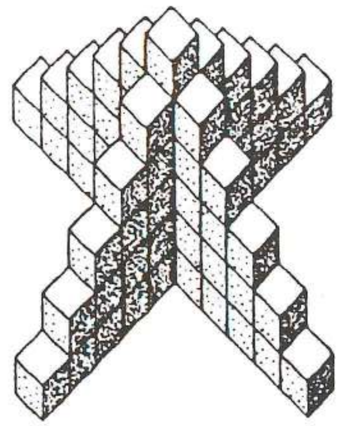
Cooney o.fl. (1993) hafa flokkað prófdæmi sem kennarar hafa notað í fernt:

1 Verkefnið kallar á einfaldan reikning eða að nemandi muni eitthvað.
2 Verkefnið krefst skilnings. Nemandinn verður að taka einhverja ákvörðun en að því loknu er lausnarferlið skýrt, t.d. einfalt orðadæmi.
3 Um er að ræða að beita þekkingu eða fara gegnum samsett dæmi þar sem nemandinn verður að taka nokkrar ákvarðanir um ferli eða hvaða aðgerðir sé rétt að nota.
4 Viðfangsefnið er opið og lausn er ekki samkvæmt lærðri forskrift.

Dæmin sem þau taka úr algebru ná of langt inn í námsefni framhaldsskólans til þess að þau henti hér þannig að ég vel í staðinn að sýna greiningu þeirra á brotadæmum. (Sjá hér að neðan).

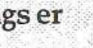
Í grein sinni *Assessing Wider Range of Students' Abilities* bendir Swan (1993) á mikilvægi þess að meta hversu vel nemendur hafa náð valdi á að gera stærðfræðilegar áætlanir í leit að lausnum. Hann tekur m.a. eftirfarandi prófdæmi máli sínu til skýringar.

1 Hve marga teninga þarf til að byggja þennan turn?
2 Hve marga teninga þarf til að byggja turn af sömu gerð þar sem hæð er 12?
3 Skýrðu út hvernig þú fannst lausnina í 2. lið.
4 Hvernig myndir þú finna hæð turns þar sem hæðin er n?



Lokaorð

Samræmda prófið er mikilvægt stjórntæki og áhrif þess geta verið af mismunandi toga. Í orðum mínum hefi ég reynt að benda á gildi algebrukennslu en einnig á þá pytti sem hún getur auðveldlega fallið í. Vilji menn forðast það er mikilvægt að lesa það sem skrifað er á sviði stærðfræðimenntunar, leita leiða til að átta sig betur á því hvernig nemendur okkar

1. stig	2. stig	3. stig	4. stig
1 3/8+1/4=? 2 Hve stórt brot rétthyrnings er skyggt? 	María og Jóhann fara í 80 km ferð. María ók 2/5 hluta leiðarinnar. Hve marga km ók hún?	Baldur snæddi 1/4 úr pepperonipitsu, 2/3 af ostapitsu og 1/2 skinkupitsu. Hve mikið borðaði hann alls af pitsu? (Væntanlega gert ráð fyrir að þær séu allar af sömu stærð!)	Gerðu töflu sem sýnir hvernig dæmigerður sólarhringur gæti skipst niður í lífi unglings. Settu niðurstöðurnar fram myndrænt.

skilja hugtökin sem þeir eru að glíma við og láta góða kennslu endurspeglast í kunnáttusamlegu og vönduðu mati. Við gerð mats sem er kunnáttusamlegt og vandað þarf samræmda prófið að vera í fararbroddi.

Anna er formaður Flatar og prófessor í KHÍ.

Heimildir

Bodin, A. (1993) What does to assess mean? In M.Niss (ed.) *Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI Study*. Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cooney, T.J., Badger E., Wilson, M.R. (1993) Assessment, Understanding Mathematics, and Distinguishing Visions from Mirages. In N. Webb (ed.) *Assessment in the Mathematics Classroom*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech, The Netherlands: D. Reidel

Hart, K.M. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (1981). London: John Murray.

Kieran, C (1989) The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner and C. Kieran (eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J.J: (1989) Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner and C. Kieran (eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Measuring What Counts. A Conceptual Guide for Mathematics Assessment (1993). Washington, DC: Mathematical Sciences Education Board. National Research Council.

Swan, M. (1993) Assessing a Wider Range of Students' Abilities. In N. Webb (ed.) *Assessment in the Mathematics Classroom*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wheeler, D. (1989) Contexts for Research on the Teaching and Learning of Algebra. In S. Wagner and C. Kieran (eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Ráðstefna í Noregi

Á þriggja til fjögurra ára fresti hafa verið haldnar góðar norrænar ráðstefnur ætlaðar stærðfræðikennurum. Árið 1983 var t.d. haldin ráðstefna í þessari ráðstefnuröð á Íslandi. Áhersla verður á starf bekkjarkennarans og áhrif hans. Í ágúst 1997 verður haldin ráðstefna í Noregi, skipulögð af Háskólanum í Bergen. Sett verða upp verkstæði og fyrirlestrar verða haldnir.

(Sett kryss)

☐ *Jeg er interessert i å delta på konferansen i aug 1997, og ber om å få mer informasjon tilsendt i løpet av året. Dette er foreløpig, ikkeforpliktende påmelding.*

☐ *Jeg er interessert i å lede et verksted på konferansen og legger ved et brev om det.*

Navn____________________
Skole____________________
Adresse____________________
____

Send til:

NORKON,
Nordisk matematikklærerkonferanse,
Seksjon for matematikk fagdidaktikk
v/Johnsen Hoines,
Høgskolen i Bergen,
5030 Landås
Norge

Fax 55 595809
epost: marith@lsv.hib.no

Af sjónarhóli prófsemjanda

Erindi flutt á málþingi Flatar um samræmd próf

Lárus H. Bjarnason

Ég er einn af fjórum sem samið hafa samræmt próf í stærðfræði síðastliðin tvö ár. Hópurinn fær það verkefni að semja samræmt próf, sem uppfylla skal vissar grundvallarreglur prófafræðinnar. Þær reglur eru reyndar fyllilega í samræmi við það sem okkur leikmönnum finnst að eigi að einkenna góð próf. Samræmda prófið er fyrst og fremst hugsað sem kunnáttupróf en ekki sundurgreinandi próf. Í slíku kunnáttuprófi á að vera mögulegt að sundurliða frammistöðu eftir námsþáttum.

Hvaða kunnáttu á að prófa? Um það geta menn auðvitað deilt og haft ýmsa sýn á en ljóst er að prófsemjendur hljóta að hafa námskrá gunnskóla sem grundvallarviðmiðun, þ.e. þann hluta almennu námskrárinnar sem fjallar um stærðfræði. Þar segir að meginmarkmið með stærðfræðikennslu í grunnskóla séu að nemendur:

1. - fáist við stærðfræðileg hugtök og læri að nota táknmál stærðfræðinnar.
2. - nái svo góðum tökum á völdum sviðum stærðfræðinnar að hún nýtist þeim í daglegu lífi.
3. - nái þeim tökum á völdum sviðum stærðfræðinnar að á þeim megi byggja áframhaldandi nám.
4. - temji sér að beita stærðfræði við ný viðfangsefni þegar við á, hvort sem er í dagsins önn eða fræðilegri viðleitni, og fái þannig tækifæri til að beita ímyndunarafli sínu og frumkvæði.
5. - geri sér grein fyrir að skýr röksemdafærsla og kerfisbundin framsetning er mikilvæg vinnuaðferð í stærðfræði.
6. - geri sér grein fyrir hve vel stærðfræði getur verið fallin til þess að lýsa fyrirbærum og athuga þau. Nemendur læri smám saman að beita stærðfræði í þeim tilgangi.
7. - hafi það viðhorf til stærðfræðinnar að þeir vilji leggja við hana rækt og að hún geti orðið þeim uppspretta ánægju og vinnugleði.

Ég vek sérstaka athygli á 1. og 4. lið í þessari upptalningu. Í þeim hluta námskrárinnar sem fjallar beint um efnisþætti er alllöng upptalning varðandi 8. - 10. bekk. Kaflinn sem fjallar um reikning og algebru hefst þannig:

Ræðar tölur: Samlagning, frádráttur, margföldun og deiling ...

Þetta eru atriði sem eðlilegt er að prófa úr og ef gera á það með sem minnstum umbúnaði þá er ekki um að annað að ræða en að leggja fyrir dæmi í líkingu við þau sem við sjáum á fyrstu síðu prófsins frá því í vor, strípuð reikningsdæmi:

Reiknaðu:
1. $384 + 7618 =$
2. $37 \cdot 68 =$
3. $80{,}32 - 5{,}782 =$
4. $79{,}2 : 4 =$

Lítum nú á aðrar greinar námskrárinnar, sér í lagi þær sem varða annað en „rútínuna". Þar sem segir að nemendur temji sér að beita stærðfræði, sbr. 4 lið hér að framan er eftirfarandi:

Jafnframt því sem æfð eru afmörkuð atriði sem blasa við í daglegu lífi barna, unglinga eða fullorðinna, eða eru nauðsynlegur þáttur í undirstöðu frekara náms, þarf að gefa nemendum tækifæri til að mæta viðfangsefnum, þar sem leita þarf lausna án þess að gefnar séu fyrirfram ákveðnar aðferðir.

Í kaflanum sem fjallar um námsmat segir ennfremur:

Matsverkefni þurfa að vera nægilega fjölbreytt til að prófa sem flesta þætti í getu nemandans, s.s. kunnáttu, færni, skilning, getu til að greina og tengja ólíka þætti , frumleika, frumkvæði, vinnubrögð og úthald.

Allt þetta eru atriði sem prófsemjendur reyna að koma til móts við. Dæmi um slíkt er síðasti hluti verkefnisins um húsið í prófinu 1995, þar sem athuga átti stystu leiðina milli tveggja horna garðsins. Þar reynir greinilega á eitthvað annað en einhverja utan að lærða leikni og vísast er ekki hægt að finna þetta í einum afmörkuðum kafla kennslubókarinnar. Annað dæmi er verkefnið um atvinnuleysið, í valhluta sama prófs, þar sem lögð var til grundvallar mynd með tilheyrandi texta úr dagblaði. Þarna tel ég að reyni á hvort nemanda lánast að greina kjarna málsins; í textanum eru til að mynda tölur sem ekki þarf að nota til að svara spurningunni. Ennfremur bendi ég á síðustu tvö dæmin í hluta II:

24. S = 3L - 22 er formúla fyrir skónúmer kvenna þar sem S táknar skónúmerið og L táknar fótlengd mælda í tommum. (1 tomma ~ 2,54 cm.) Hver er fótlengd konu sem notar skóstærð nr. 7? (Svaraðu í cm.)

25. Eftirfarandi upplýsingar eru úr leiðbeiningum ríkisskattstjóra vegna framtals 1995:

Útreikningur vaxtabóta: Frá vaxtagjöldum dragast 6% af tekjum. Mismunurinn er vaxtabætur. Hæstu vaxtabætur eru 232.064 kr. Settu upp jöfnu og reiknaðu út hve tekjur mega verða háar til þess að fá hæstu vaxtabætur ef vaxtagjöld eru 385.100 kr?

Síðara dæmið varð reyndar fyrir nokkurri gagnrýni, varð meira að segja einhverjum tilefni til að láta þung orð falla í *Þjóðarsálinni*. Sú gagnrýni tel ég að hafi verið vanhugsuð; fólk lét truflast af því að nefnd eru orð sem við notum sjaldan en eru engu að síður orð sem venjulegur borgari þarf að geta fengist við. Þau koma samt sem áður stærðfræðinni ekkert við í þessu dæmi. Það sýndi sig líka að þetta dæmi er ekki í hópi þeirra sem komu hvað verst út í prófinu í heild.

Vissulega viljum við hafa prófin þannig að þau prófi kunnáttuna sem best en jafnframt viljum við ekki að þau séu alveg útreiknanleg, að unnt sé að „læra á" prófin. Reyndar sýnir það sig að prófin eru afar stýrandi fyrir kennsluna og samanburður á heildarframmistöðu nemendahópsins í sumum verkefnum gefur til kynna að viss atriði séu þjálfuð upp án þess að viðeigandi skilningur fylgi. Dæmi eru um verkefni þar sem „þyngra" verkefni kemur betur út en hið léttara, þ.e.a.s. út frá því sem virðist fyrirfram um þyngdarstigið. Til að fylgja þessari fullyrðingu eftir tilfæri ég það sem kom mér e.t.v. mest á óvart í niðurstöðum síðasta prófs, sem er frammistaða nemenda í dæmum 16 b) og 17 b) í hluta II, samanborið við til að mynda 19. dæmið:

Einfaldaðu stæðurnar eins og hægt er:
16. b) $ab + ba =$
17. b) $2^2 \cdot 2^{-2} \ =$
19. $(x+2)^2 - x^2 - 5 =$

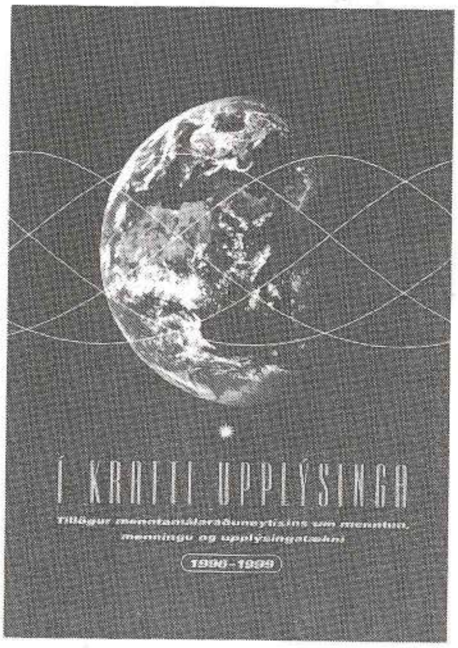
Aðeins þriðjungur nemenda gat reiknað 16 b) rétt, tæp 10% dæmi 17 b), en um helmingur reiknaði nr. 19 rétt. Í rauninni er skelfilegt að svo stór hluti nemenda hafi ekki vald á víxlreglu margföldunar, sbr. 16 b), sem hlýtur að teljast til grundvallaratriða í öllum reikningi og algebru. Sömu nemendur sýna hins vegar nokkra leikni í margföldun og einföldun liðastærðanna í dæmi 19, en það dæmi er í augum flestra kennara afskaplega fyrirsjáanlegt.

Hér hefur aðeins verið drepið á fátt eitt sem segja mætti um samræmdu prófin. Ég get ekki stillt mig um að nefna skiptinguna í tvo valhluta, algebru og hagnýta stærðfræði, sem virðist komin hefð á. Ég tel hana orka tvímælis og veit að ýmsum framhaldsskólakennurum finnst óþægilegt að uppgötva að nemandi með tiltölulega háa einkunn á samræmdu grunnskólaprófi kann miklu minna í algebru heldur en þeir áttu von á, en þá kemur stundum í ljós að hann hafði ekki farið í algebruvalhlutann og var e.t.v. í bekkjardeild þar sem ekki var lögð teljandi áhersla á algebruna.

Útilokað er að semja próf sem tekur til allra markmiða og ég tel einnig ástæðulaust að keppa að því. Við erum með mat í skólunum þar sem betra færi gefst til þess að prófa ýmsa þætti en í samræmda prófinu. Innbyrðis áherslur í prófinu verða alltaf umdeildar. Ég held því fram að unnt sé að semja mörg gerólík samræmd próf sem öll væru „góð" í ýmsum skilningi. Að lokum minni ég á að ég er aðeins einn af fjórum sem samið hafa prófin síðustu tvö skipti og ég hef ekki haft tök á að ráðfæra mig við samstarfsfólk mitt fyrir þetta, en samvinna okkar hefur reyndar verið með ágætum. Ég bið menn því að skoða orð mín í því ljósi; ég er hér að lýsa minni sýn á þessi mál og er þakklátur fyrir þennan vettvang til þess.

Lárus er aðstoðarrektor við Borgarholtsskóla.

Í krafti upplýsinga



Haustið 1995 skipaði Björn Bjarnason menntamálaráðherra þrjár nefndir til að móta svonefnda upplýsingastefnu menntamálaráðuneytisins. Skyldi ein þeirra fjalla um menntamál, önnur um menningarmál og sú þriðja um meðferð ráðuneytisins á upplýsingum varðandi þessa málaflokka. Náið samráð var milli nefndanna þriggja og leiddi aðstoðarmaður ráðherra þá vinnu.

Í febrúar kom út sameiginleg stefnumótun í kjölfar nefndastarfanna sem nefnist *Í krafti upplýsinga*. Þetta er fyrsta heildstæða stefnumörkun menntamálaráðuneytisins varðandi áhrif upplýsingatækni á mennta- og menningarmál. Í bókinni er að finna víðtæka markmiðasetningu og skýrar leiðir.

Nú eru liðnir um tveir áratugir síðan fyrstu skrefin voru stigin í íslenskum skólum til að nýta upplýsingatækni. Einkennandi hefur verið að framkvæmdir hafa verið á undan mótun meginstefnu og þær hafa einkum byggst á frumkvæði og dugnaði einstakra skóla eða starfsmanna þeirra. Því er full ástæða til að fagna heildstæðri stefnumörkun sem setur skýra viðmiðun og styrkir brautryðjendastarfið sem hefur verið unnið.

Í ritinu er fjallað á margvíslegan hátt um þær breytingar sem skólinn stendur nú frammi fyrir varðandi aðstæður til náms, námsefni, kennsluhætti og hlutverk kennara. Ekki er unnt að gera efninu skil hér nema á mjög takmarkaðan hátt en ritið mun þegar vera til í öllum skólum landsins. Þar eru ákvæði um að endurskoða allar námskrár með tilliti til þeirra aðstæðna og möguleika sem skapast með upplýsingatækni. Þá er lögð mikil áhersla á að í kennaramenntun og endurmenntun sé upplýsingatækni tengd námsgreinum og þróun þeirra og að stutt sé við það brautryðjendastarf sem unnið hefur verið í grunn- og framhaldsskólum svo og kennaramenntun og það eflt enn frekar. Í skólum er nú víða unnið að skýrri mótun á stefnu sem varðar nám og námsaðstæður. Í ritinu *Í krafti upplýsinga* er lögð áhersla á að stefnumótun skóla taki mið af þeim samfélagsbreytingum sem upplýsingatæknin hefur haft í för með sér og bent er á leiðir. Á flestum sviðum þjóðlífsins hefur þessarar tækni gætt í meiri eða minni mæli undanfarna áratugi og hér er bent á hve mikil áhrif hennar eru orðin á starf skólanna.

Miklu máli skiptir nú að víðtæk og framsýn umræða eigi sér stað meðal skólamanna í kjölfar stefnumörkunar menntamálaráðuneytisins. *Flatarmál* geta verið vettvangur slíkrar umræðu enda er það í fullu samræmi við stefnu Flatar - samtaka stærðfræðikennara.

Anna Kristjánsdóttir

Skólaalgebra

Fyrirlestur Christer Bergsten í KHÍ

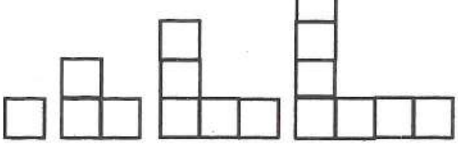
Guðbjörg Pálsdóttir

Í september 1995 hélt *Christer Bergsten* opinn fyrirlestur í Kennaraháskóla Íslands um skólaalgebru. Christer Bergsten starfar við háskólann í Linköping, þar sem hann kennir bæði við verkfræði- og kennaradeildina. Hann hefur í rannsóknum sínum sérstaklega athugað skilning á gerð og hlutverki stærðfræðilegs táknmáls.

Heiti fyrirlestrarins var „Teaching a school-algebra". Christer Bergsten kom inn á ýmis atriði varðandi algebrukennslu. Fyrst gerði Bergsten að umtalsefni hvernig skoðun umhverfis með gleraugum stærðfræðinnar getur gert lífið auðugra. Slík skoðun verður oft til þess að við sjáum nýjan flöt á gömlu efni og greinum tengsl milli áður ótengdra þátta. Sem dæmi má taka áhugaverðar tölur, t.d. töluna 5. Hvernig getum við skrifað hana? Hvað með:

$$((9+6) \cdot 2 - 2) : 2) - 9 =$$

Gefur þetta einhverja hugmynd um táknmál og skilning á því?
Hvað er eiginlega algebra?



Er þetta algebra?
Er það algebra að leita að ferningsrótinni af 2 eða kannski þetta hvort tveggja?

Christer Bergsten gerði einnig að umtalsefni algengar villur sem nemendur gera í algebru eins og t.d. $2x - x = 2$ sem þeir reikna eins og $2\ 1/2 - 1/2 = 2$, eða $11 - 6 =$ ___ $- 11$ og nemendur setja 5 í eyðuna. Hver kannast ekki við $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Skýringin á svona villum getur verið sú að farið er út í að æfa og kenna tækni of fljótt. Spurningin um á hvaða viðfangsefni og hvernig þessi tækni nýtist er kannski aldrei sett fram né rædd. Þannig eiga nemendur að læra tæknilegu atriðin við algebrureikning án nokkurra tengsla og algebran verður óskiljanleg tæknibrella.

Algebran birtist í ýmsum myndum og nýtist víða. Skólaalgebra flokkast í fjögur svið fyrst og fremst. Á hverju sviði nýtist algebra á mismunandi hátt og nemendur vinna ólíkt.

<u>Algebra sem</u>	<u>Bókstafir sem</u>	<u>Aðgerð</u>
alhæfður reikningur	sýna mynstur	þýða alhæfa
þrautalausnatæki	óþekkt stærð fasti	leysa einfalda
rannsókn á tengslum	rök breyta	tengja teikna
rannsókn á kerfi	tákn valin af handahófi	undirbyggja handleika af kunnáttu

Christer Bergsten taldi mikilvægt að átta sig á muninum á algebru og reikningi. Sjá töflu hér á eftir.

Hann tók sem dæmi mismunandi leiðir til að leysa viðfangsefni eftir því hvort farin var algebruleið eða reikningsleið. Hvernig er hægt að leysa þetta dæmi: Fótboltavöllur hefur ummálið 272 metrar. Lengd vallarins er

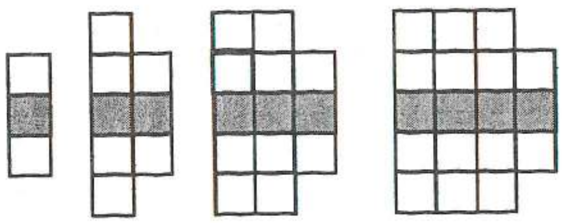
24 metrum meiri en breiddin. Hvert er flatarmálið?

Reikningur	Algebra
Aðgerðir á tölum	aðgerðir á algebrískum táknum
Samlagning, frádráttur...	einfalda, þátta...
Reikningur sem aðgerðir	reikningur sem bygging (structure)
Merkið = er lesið sama sem	= lesið jafnt og
Aðgerðir afturábak	aðgerðir áfram
Mikið daglegt mál	lítið daglegt mál
Tölulegar niðurstöður	fáar tölulegar niðurstöður

Leið algebrunnar væri að hugsa áfram og tákna breiddina með x og lengdina með x+24 og setja síðan upp jöfnuna 2 (x+x+24) = 272, og leysa hana. Reikningsleiðin gengur út frá að hugsa aftur á bak, finna fyrst helminginn af 272 sem er 136, draga síðan 24 frá, finna helminginn af þeirri útkomu og það verður 56. Þá er breiddin fundin og flatarmálið fundið út frá því. (272 : 2 - 24) : 2. Fleiri aðferðir eru til t.d. að rökleiða út frá mynd.

Mörg verkefni má finna þar sem nemendur geta glímt við að finna mynstur og átta sig á regluleika. Þar nefndi Christer Bergsten m.a. þrjú eftirfarandi dæmi. Hve mörgum sinnum er tekist í hendur þegar 28 manns heilsast? Þetta má setja upp í töflu til að átta sig betur á regluleikanum og finna svarið.

Hvernig eykst kubbastaflinn?



Hvað eru margir kubbar í mynd 10?

Töfraferningur, þar sem sama summa kemur fram hvort sem lagt er saman lóðrétt, lárétt eða á ská, er góður undirbúningur að viðfangsefnum í algebru.

Ef við höfum ferninginn...

	5	
4		6

...er hægt að búa til töfraferning út frá þessum forsendum með summuna 18? En með einhverri annarri tölu eða tölum?

Þar sem tvær tölur eru gefnar er hægt að skrá þá þriðju sem mismun á þeim og summunni eins og sýnt er í ferningnum.

$s-11$		$s-9$
	5	
4	$s-10$	6

Af þessu má sjá að 5+s-10 = s-11+s-9, og með einföldun fæst að s = 15. Með enn frekari rannsóknum komust við að því að talan í miðjunni er alltaf einn þriðji af summunni.

Christer Bergsten gerði næst að umtalsefni hvernig byrjað væri að vinna með jöfnur með nemendum. Oft væru jöfnur kynntar þannig að það væri mun einfaldara að leysa dæmin án þeirra. Mikilvægt er að nemendur finni að það að nota jöfnur til að leysa viðfangsefni gefur nýja möguleika og getur einfaldað lausn dæma. Kennarar þurfa að hafa yfirsýn yfir hvað algebran spannar og hvernig hún getur birst í skólastarfinu. Christer Bersten setti fram ramma sem kennarar geta skoðað kennslu sína og nám nemenda sinna í.

Víddir í algebrunámi og -kennslu (glæra):

Þættir:
- mynstur og alhæfingar
- jöfnur
- föll

Stig:
- forvinna fyrir algebru
- algebra fyrir byrjendur
- algebra

Hliðar:

- athugun á kerfum
- margþætt framsetning
- táknun
- þrautalausnir
- rannsókn
- félagsleg samskipti
- stærðfræðilíkön
- framþróun
- af hverju algebra
- ....

Fyrirlestur þessi var mjög áhugaverður og benti okkur kennurunum á að skólaalgebra getur verið spennandi glíma fyrir nemendur ef viðfangsefni og vinnubrögð í skólastofunni gefa færi á því. Christer Bergsten sýndi okkur einnig fram á að mörg viðfangsefnanna eru líka skemmtileg glíma fyrir okkur kennarana sem við getum unnið í samvinnu við nemendur okkar. Nokkur verkefnanna sem hann nefndi má einnig sjá í Hornalínu og Skuggsjá (námsbókum fyrir unglingastig) í kafla þar sem lagt er til að nálgast algebruna á svipaðan hátt og Christer Bergsten lagði til. Nám og kennsla í stærðfræði gefa tilefni til margvíslegra vangaveltna um kennsluhætti og þessi fyrirlestur var gott innlegg í umræður um það meðal íslenskra kennara.

Guðbjörg Pálsdóttir er æfingakennari í Æfingaskólanum.

Í minningu Stieg Mellin-Olsen

Í Flatarmálum hefur athygli oft verið vakin á því að þekking skólamanna á stærðfræðinámi og -kennslu hefur aukist mjög síðustu áratugi. Rannsóknaniðurstöður eru farnar að skila sér í stefnumörkun og framkvæmdum og almenn umræða meðal stærðfræðikennara er orðin meiri en var.

Ekkert gerist af sjálfu sér. Brautryðjendur gegna lykilhlutverki áður en fjöldinn er orðinn nógu mikill til þess að framvinda sé stöðug og eðlileg. Einn slíkra brautryðjenda, Stieg Mellin-Olsen prófessor við Háskólann í Bergen, lést langt um aldur fram árið 1995. Hans er minnst hér vegna þess að hann var einn öflugasti frumkvöðull þess að norrænir fræðimenn á sviði stærðfræðimenntunar sameinuðu krafta sína í samstarfsverkefnum og útgáfu tímaritsins NOMAD (Nordisk matematikdidaktik).

Stieg var mjög virkur í umræðu um stærðfræðikennslu bæði í Noregi og á alþjóðlegum vettvangi. Með skrifum sínum vakti hann víða athygli á því sem betur mátti fara, einkum varðandi þá sem höllum fæti stóðu á einhvern hátt. Þetta kemur skýrt fram í einu stærsta verki hans *The Politics of Mathematics Education* sem kom út hjá Kluwer forlaginu 1987. Heima fyrir gaf Stieg einnig út fjölda bóka sem eru notaðar í kennaramenntun og víðar. Til þess að skapa grundvöll fyrir umræðu meðal norskra stærðfræðikennara hóf hann útgáfu tímaritsins *Tangenten* árið 1990 og í Bergen skapaði hann ásamt, sífellt vaxandi hópi samstarfsmanna, öflugt umhverfi um rannsóknir á stærðfræðinámi. Þar er hans nú minnst, sem og miklu víðar, af þakklæti og virðingu.

Anna Kristjánsdóttir

Stærðfræðikennsla byrjenda í samræmi við skilning og kunnáttu

Frásögn af námskeiði Flatar

Hafdís Guðjónsdóttir

Í júní 1995 kom hingað til lands í boði Flatar-samtaka stærðfræðikennara maður að nafni Donald Chambers. Hann hefur tekið þátt í að þróa kennsluaðferðir sem leggja áherslu á að byggja stærðfræðikennslu á skilningi barna. Hann kynnti okkur leiðir til að átta okkur á og flokka hugsun og skilning barna á þeim verkefnum sem þau fá að glíma við. Hugmyndakerfið sem Donald notar nefnist á ensku *Cognitively Guided Instruction.*

Donald veitti okkur innsýn í stærðfræðilega hugsun barna og benti okkur á þann mun sem er á börnum og fullorðnum. Hann lét okkur fá dæmi úr samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu og bað okkur um að koma með hugmyndir að því hvernig við héldum að nemendur myndu leysa þau. Það var greinilegt að fyrir margar okkar (það voru einungis konur á námskeiðinu) var erfitt að fara frá okkar hugsunarhætti eða leiðum að hugsunarhætti barna þrátt fyrir að við værum flestar vanar kennslu barna á þessu aldursskeiði.

Verkefni sem við leysum eða hugsum um á einn hátt, leysa börn oft á mismunandi vegu og finnast þau vera mjög ólík. Hér á eftir eru sýnishorn af þeim dæmum sem Donald lét okkur vinna með.

> Það er 31 tré í garðinum hennar Láru. Hún vill hafa 47 tré þar. Hvað þarf hún að planta mörgum trjám?

> Það eru 47 tré í garðinum hennar Láru. Hún heggur 31. Hvað eru mörg tré eftir?

> Það er 31 tré í garðinum hennar Láru en 47 tré í garðinum hennar Gunnu. Hvað munar miklu?

Þessi þrjú frádráttardæmi leystu flestar okkar á sama hátt þ.e.a.s. við drógum 31 frá 47. Hann benti okkur á að börn sæju þetta sem þrjú mjög ólík dæmi og myndu sennilega nota mismunandi aðferðir við að leysa þau. Þetta segir okkur að í augum barna eru samlagningar- og frádráttardæmi mjög ólík, þó okkur finnist sem þetta séu annað hvort samlagningar eða frádráttardæmi. Það er munur á þessum dæmum og sá munur skiptir miklu hvað varðar unga nemendur með tilliti til þess á hvern hátt þau skilja dæmin og leysa.

Hann sýndi okkur deilingardæmi en benti okkur um leið á að þó við sæjum bæði dæmin sem deilingardæmi þá sæju börnin þau oftast sem einhvers konar aðgerð. Og sú aðgerð sem börnunum finnst eðlilegast að beita er háð þroska þeirra.

Eðlileg nálgun?

Samkvæmt þessari hugmyndafræði þarf ekki að kenna börnum hvaða aðferðir reynast best við ákveðin dæmi, þau læra það sjálfkrafa ef þau fá tækifæri til þess að vinna með mismunandi verkefni og eru hvött til að leysa þau á sinn hátt. Börn finna sjálf leiðir sem tengjast þeim aðgerðum eða tengslum sem koma fram í verkefninu.

Þegar börn byrja í skóla búa þau þá þegar yfir óformlegri þekkingu eða innsæi í stærðfræði. Þessi þekking eða innsæi getur þjónað sem grunnfærni á þeim skilningi sem nauðsynlegur er í fyrstu bekkjum grunnskóla.

Börn geta leyst ótrúlegustu verkefni. Grunnfærni í samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu er hægt að þjálfa innan þessara verkefna en þá um leið í tengslum við getu þeirra, áhugamál og daglegt líf. Ef við skoðum nánar litlu reynslusöguna sem ég sagði frá í byrjun og berum saman við það sem börnin eru að gera þar og þær kröfur sem oft eru gerðar til 6 ára barna þá er verið að vinna með mjög ólík tölugildi en einnig miklu flóknari aðgerðir.

Til þess að kennarar geti áttað sig á því hvernig nemendur hugsa um samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu er nauðsynlegt að þeir taki tillit til ólíkra þátta innan mismunandi verkefna. Donald kynnti fyrir okkur töflu til þess að við gætum betur skilið þær leiðir sem börn nota við að leysa dæmin sín og greint á hvaða hugsunar- og þroskastigi þau vinna. Kennarinn verður að gæta þess að verkefnin séu nemendum ekki of erfið því þá er hætta á að þeir gefist upp en hann verður líka að gæta þess að þau séu ekki of létt því þá er hætta á að nemendur verði leiðir og missi áhugann.

Til þess að kennarinn skilji betur hvernig nemendur hugsa um verkefnin og leysa þau, þarf hann að nota tímann betur til þess að hlusta á börnin útskýra hvernig þau leysa verkefnin í staðinn fyrir að útskýra sjálfur hvernig á að vinna þau. Hann þarf að spyrja: Hvernig ætlar þú... eða heldur þú... eða hvernig gerðir þú... í staðinn fyrir að segja: Svona áttu að... Kennarinn þarf að hlusta vandlega á nemendur og nýta síðan það sem hann heyrir og greinir til þess að taka kennslufræðilegar ákvarðanir.

Samantekt

1. Kennarinn byggir námið á þrautalausnum.
2. Kennarinn hvetur nemendur til að segja frá því hvernig þeir leysa verkefnin og hlustar á það sem þeir hafa að segja.
3. Kennarinn velur verkefni með hliðsjón af því hvernig nemendur leysa þau.
4. Kennarinn velur verkefni sem tengjast því sem er að gerast í skólanum, daglegu lífi nemenda og áhugamálum þeirra.
5. Kennarinn hvetur nemendur til að velta lausn verkefnisins fyrir sér og þeim leiðum sem þeir fara til að leysa það. Hann reiknar með að þeir fari mismunandi leiðir og hvetur þá til að finna nýjar leiðir.
6. Í staðinn fyrir að fylgja kennaranum við lausn verkefnisins þá fær kennarinn nemendur til þess að taka þátt í þrautalausnum.

Í haust hittust nokkrir kennarar sem höfðu verið á námskeiðinu og báru saman bækur sínar. Því miður hafa ekki allir átt kost á að reyna þessa aðferð ýmist vegna þess að þeir eru ekki við kennslu, eins og er, eða kenna eldri nemendum. Þó að kennarar séu allir af vilja gerðir og hafi mikla trú á nýjum aðferðum, vilja og þekkingu, þá er ekki auðvelt að breyta til. Ýmsar ástæður eru sennilega fyrir því en augljóst er að kennarar þurfa mikinn stuðning frá samstarfskennurum og öðrum fagmönnnum. Þó eru nokkrir að fikra sig áfram. Ég trúi því að nemendur framtíðarinnar eigi þó eftir að kynnast þessum aðferðum.

Heimildir:

Carpenter,T,. Fennema, E, Franke,M. (1995) *Children's tinking about whole numbers.* Wisconsin Center for Education Research.

Chambers, D. (1992) *Improving instruction by listening to children in schools.* Mathematics and the world of reality, Needham Heigts Mass: Allyn and Bacon.

Glósur af námskeiði í júní sumarið 1995.

Hafdís er kennari viðLækjarskóla en stundar nú doktorsnám í Bandaríkjunum.

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Rögnvaldur Möller

Stærðfræðikeppnin hóf göngu sína í núverandi mynd haustið 1985. Fyrri hluti keppninnar fer fram á haustin í skólum þátttakenda. Fyrri hlutinn er í tveimur stigum; neðra stig ætlað nemendum á fyrstu tveimur árum framhaldsskólans og efra stig sem er ætlað nemendum sem hafa lokið tveimur árum í framhaldsskóla. Fjöldi þátttakenda í þessum hluta hefur að jafnaði verið á bilinu frá 400 til 450, en nú í haust var metþátttaka, eða 746 þátttakendur úr 18 skólum.

Meðfylgjandi dæmi eru úr keppninni nú í haust. Hafa ber í huga að um keppni er að ræða, ekki próf. Því er reynt að hafa dæmin svo mörg og svo fjölbreytt að keppendur nái virkilega að sýna hvað í þeim býr. Markmiðið er að léttustu dæmin séu aðgengileg fyrir alla, en að þau erfiðustu taki virkilega í. (Stundum eru erfiðustu dæmin of erfið og vefjast jafnvel fyrir hámenntuðustu stærðfræðingum, t.d. leysti enginn keppandi „súkkulaðidæmið" hér að framan fullkomlega.) Það telst mjög góður árangur að leysa 40% dæmanna á fyrirfram ákveðnum tíma, allt þar fram yfir frábært. Efstu menn hafa oft leyst um 70% verkefnanna. Á lengri tíma ættu góðir nemendur samt að geta ráðið við flest öll dæmin.

Viðurkenningar eru veittar tuttugu efstu keppendunum á hvoru stigi og þeim boðið að taka þátt í úrslitakeppninni sem fer fram í Reykjavík snemma á vorin. Þessum nemendum er einnig sent lesefni og heimaverkefni til þjálfunar fyrir úrslitakeppnina.

Auk þessa tökum við þátt í þrem alþjóðlegum stærðfræðikeppnum. Fyrst er það Eystrasaltskeppnin sem fer fram á haustin. Þangað sendum við fimm manna lið, og hefur skapast sú hefð að það skipi efstu menn úr fyrri hlutanum. Sú keppni er liðakeppni og skilar lið hvers lands sameiginlegri lausn á þeim þrautum sem eru lagðar fyrir.

Næst er það Norræna stærðfræðikeppnin. Hún fer fram í skólum þátttakenda á vorin. Okkar þátttakendur hafa venjulega verið tíu efstu menn úr úrslitakeppninni.

Punkturinn yfir i-ið er svo Ólympíukeppnin, sem venjulega er haldin í júlí (oft í fjarlægum og framandi löndum). Þangað sendum við 4-6 þátttakendur sem eru valdir á grundvelli frammistöðu sinnar í keppnum vetrarins. Væntanlegir þátttakendur, ásamt nokkrum öðrum efnilegum ungmennum, taka þátt í 4-6 vikna undirbúningsnámskeiði við Háskóla Íslands fyrir keppnina.

Félag raungreinakennara og Íslenska stærðfræðafélagið standa að þessari starfsemi og er öll vinna unnin í sjálfboðavinnu. Ýmis fyrirtæki og stofnanir styrkja keppnina auk menntamálaráðuneytisins, sem ávallt hefur sýnt málefninu velvilja.

Rögnvaldur hefur séð um undirbúning stærðfræðikeppni framhaldsskólanna.

Íslenska stærðfræðafélagið — Félag raungreinakennara

Stærðfræðikeppni framhaldskólanema 1995-1996
Neðra stig

24. október 1995 — Tímalengd: 2 klst.

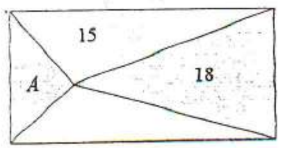
Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar og er hver spurning 3 stiga virði. Setjið kross í reitinn framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1. Tvær ólíkar tölur eru valdar úr -9, -7, -5, 2, 4 og 6. Ef þær eru margfaldaðar saman, þá er lægsta mögulega gildið á útkomunni

☐ -63 ☐ -54 ☐ -18 ☐ 8

2. Rétthyrningi með kantlengdirnar 5 og 10 er skipt í fjóra þríhyrninga eins og myndin sýnir. Flatarmál tveggja þríhyrninga er sýnt á myndinni. Flatarmál svæðisins sem merkt er með A er



☐ 7 ☐ 9 ☐ 14 ☐ 17

3. Ef $a = b = c$ og $a + b + c = 1$, þá er gildið á

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

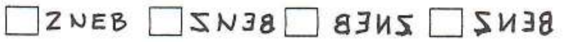
☐ 8 ☐ $\frac{64}{27}$ ☐ 27 ☐ 64

4. Gerum ráð fyrir að allir ráðherrar séu þingmenn og að sumir lögfræðingar séu ráðherrar. Hverjar eftirtalinna fullyrðinga hljóta þá að vera réttar:

X: Allir þingmenn eru lögfræðingar.
Y: Sumir lögfræðingar eru þingmenn.
Z: Til eru lögfræðingar sem eru ekki ráðherrar.

☐ Aðeins X ☐ Aðeins Y ☐ Aðeins Z ☐ Aðeins Y og Z

5. Ef þú stendur fyrir framan bílinn hennar Jarþrúðar þá geturðu lesið stafina BENZ framan á honum. Þegar Jarþrúður keyrir á nýja bílnum sínum á eftir þér, þá sérðu í baksýnisspeglinum framan á bíl Jarþrúðar letrað



6. Sexhyrnd stjarna er mynduð með því að framlengja hliðarnar í reglulegum sexhyrningi. Ef ummál sexhyrningsins er 21 þá er ummál stjörnunnar

☐ 49 ☐ $31\frac{1}{2}$ ☐ 42 ☐ 40

7. Mamma og hjúkrunarkonan þurfa að vigta Gutta í fjögurra ára skoðuninni. Gutti vildi aldrei vera kyrr á vigtinni, gretti sig og bara hló. Að lokum gripu þær til þess ráðs að mamma sté á vigtina og hélt á Gutta, og hjúkrunarkonan las 78 kg, síðan hélt hjúkrunarkonan á Gutta og mamma las 97 kg og að endingu hélt mamma á hjúkrunarkonunni og Gutti las 141 kg af vigtinni. Hvað er Gutti þungur?

☐ 34 kg ☐ 17 kg ☐ 20 kg ☐ 14 kg

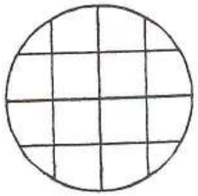
8. Sjöunda rót tölunnar $7^{(7^7)}$ er

☐ 7^7 ☐ $7^{(7^7-1)}$ ☐ $7^{(6^7)}$ ☐ $7^{(7^6)}$

9. Ef $3^x + 2^y = 985$ og $3^x - 2^y = 473$, þá er $x + y$ jafnt

☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15

10. Tveir hornréttir miðstrengir eru dregnir í hring með geislann 2 og síðan allir mögulegir strengir samsíða þeim í fjarlægðinni 1, eins og sýnt er á myndinni. Samlögð lengd þessara sex strengja er



☐ $8(\sqrt{5}+1)$ ☐ $4(\sqrt{3}+2)$ ☐ $8(\sqrt{3}+1)$ ☐ $4(\sqrt{5}+2)$

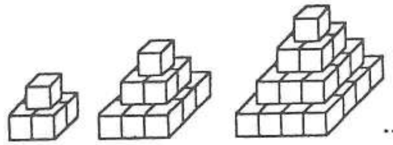
Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm spurningar. Hver spurning er 4 stiga virði. Setjið kross í reitinn framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

11. Jörmunrekur og Gutti eru í leik þannig að fyrir framan þá er hrúga með 41 eldspýtu, og fer leikurinn þannig fram að þeir skiptast á að taka eldspýtur úr hrúgunni. Í hvert skipti má taka 1, 2, 3, 4 eða 5 eldspýtur. Sá tapar sem tekur síðustu eldspýtuna. Gutti hóf leikinn og tryggði sér strax sigur. Hvað tók Gutti margar eldspýtur í fyrsta sinn?

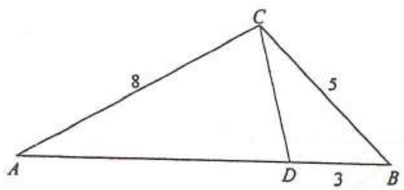
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

12. Faraóinn Jörmunrekur II var búinn að láta höggva 1000 teningslaga steinblokkir, allar jafnstórar. Úr þessum blokkum átti að reisa píramíta með ferningslaga grunni. Fyrsti píramítinn sem var reistur var tveggja hæða, svo var reistur þriggja hæða og svo koll af kolli (sjá mynd). Þegar framkvæmdir höfðu staðið yfir um skeið uppgötvaði Jörmunrekur að hann ætti ekki eftir nógu margar blokkir til að klára næsta píramíta. Hvað á Jörmunrekur eftir margar steinblokkir þegar hann hefur lokið síðasta píramítanum sem hann getur klárað?



☐ 824 ☐ 461 ☐ 161 ☐ 176 ☐ 94

13. Í þríhyrningnum ABC liggur punkturinn D á hliðinni c, þannig að $\angle BCD = \angle A$. Gefið er $a = 5$ og $BD = 3$. Þá er lengd c jöfn



☐ $7\frac{2}{3}$ ☐ 8 ☐ $8\frac{1}{3}$ ☐ $8\frac{2}{3}$ ☐ 9

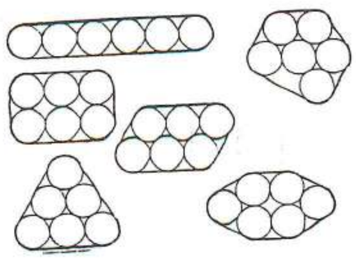
14. Stærðtáknið

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}},$$

er jafnt

☐ $\sqrt{a+1}$ ☐ $\sqrt{a}$ ☐ $2\sqrt{a+1}$ ☐ $2\sqrt{a}$ ☐ 0

15. Á myndinni hér til hliðar má sjá sex mismunandi aðferðir til að pakka saman sex gosdrykkjadósum. Utan um dósirnar er bundinn þráður sem teygist ekki. Í sumum tilvikum hefur þráðurinn utan um dósirnar sömu lengd. Í hve mörgum tilvikum fáum við minnstu mögulegu lengd?



☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Þriðji hluti

Í þessum hluta er hvert dæmi 6 stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16. Ef við skrifum heilu tölurnar frá 1 upp að 999 (báðar meðtaldar) niður á blað, hvað höfum við þá skrifað tölustafinn **0** oft?

Svar: ______________

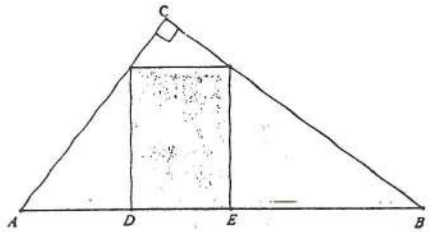
17. Skrifum samlægar sléttar tölur, 31 talsins, í röð þannig að síðasta talan sé jöfn summu 13. og 15. talnanna. Hver er miðtalan í röðinni?

Svar: ______________

18. Hver er 1995. aukastafurinn þegar almenna brotið $\frac{1}{13}$ er skrifað sem tugabrot?

Svar: ______________

19. Þríhyrningurinn ABC á myndinni er rétthyrndur, auk þess er $|DE| = \frac{1}{4}|AB|$. Hvað er flatarmál skyggða rétthyrnda ferhyrningsins stór hluti af flatarmáli þríhyrningsins?



Svar: ______________

20. Talnamengin $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eru mynduð samkvæmt eftirfarandi mynstri:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4,5,6\}, A_4 = \{7,8,9,10\}, \ldots$$

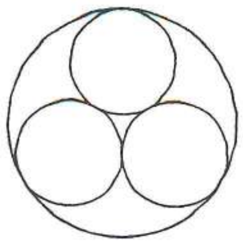
Hver er summa talnanna í menginu A_{21}?

Svar: ______________

Fjórði hluti

Í þessum hluta er hvert dæmi 10 stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

21. Þrír hringir með geislann 1 og einn stór hringur eru lagðir eins og myndin sýnir. Ákvarðið flatarmál stóra hringsins. (Svarið á að vera á forminu $(\frac{a+b\sqrt{3}}{c})\pi$ þar sem a, b og c eru heilar tölur).



22. Hver eru möguleg gildi á tölu $n > 9$ þannig að n börn geti skipt 9 eins súkkulaðistykkjum jafnt á milli sín án þess að skipta nokkru stykki í fleiri en tvo hluta.

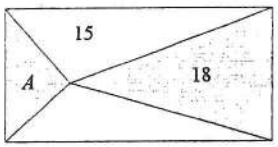
Stærðfræðikeppni framhaldskólanema 1995-1996
Efra stig

24. október 1995 — Tímalengd: $2\frac{1}{2}$ klst.

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar og er hver spurning 3 stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið 1 stig frá.

1. Rétthyrningi með kantlengdirnar 5 og 10 er skipt í fjóra þríhyrninga eins og myndin sýnir. Flatarmál tveggja þríhyrninga er sýnt á myndinni. Flatarmál svæðisins sem merkt er með A er



☐ 7 ☐ 9 ☐ 14 ☐ 17

2. Mamma og hjúkrunarkonan þurfa að vigta Gutta í fjögurra ára skoðuninni. Gutti vildi aldrei vera kyrr á vigtinni, gretti sig og bara hló. Að lokum gripu þær til þess ráðs að mamma sté á vigtina og hélt á Gutta, og hjúkrunarkonan las 78 kg, síðan hélt hjúkrunarkonan á Gutta og mamma las 97 kg og að endingu hélt mamma á hjúkrunarkonunni og Gutti las 141 kg af vigtinni. Hvað er Gutti þungur?

☐ 34 kg ☐ 17 kg ☐ 20 kg ☐ 14 kg

3. Gerum ráð fyrir að allir ráðherrar séu þingmenn og að sumir lögfræðingar séu ráðherrar. Hverjar eftirtalinna fullyrðinga hljóta þá að vera réttar:
X: Allir þingmenn eru lögfræðingar.
Y: Sumir lögfræðingar eru þingmenn.
Z: Til eru lögfræðingar sem eru ekki ráðherrar.

☐ Aðeins X ☐ Aðeins Y ☐ Aðeins Z ☐ Aðeins Y og Z

4. Ef þú stendur fyrir framan bílinn hennar Jarþrúðar þá geturðu lesið stafina BENZ framan á honum. Þegar Jarþrúður keyrir á nýja bílnum sínum á eftir þér þá sérðu í baksýnisspeglinum framan á bíl Jarþrúðar letrað

☐ ZNEB ☐ ƧNƎB ☐ BƎИƧ ☐ ƧИƎB

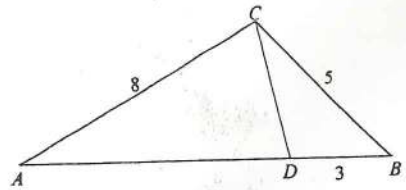
5. Jörmunrekur og Gutti eru í leik þannig að fyrir framan þá er hrúga með 40 eldspýtum, og fer leikurinn þannig fram að þeir skiptast á að taka eldspýtur úr hrúgunni. Í hvert skipti má taka 1, 2, 3 eða 4 eldspýtur. Sá tapar sem tekur síðustu eldspýtuna. Gutti hóf leikinn og tryggði sér strax sigur. Hvað tók Gutti margar eldspýtur í fyrsta sinn?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

6. Hver eftirtalinna margliða gengur upp í $x^{17} - 4x^{15} - x^3 + 4$?

☐ $x+2$ ☐ $x-2$ ☐ $x+1$ ☐ $x-1$

7. Í þríhyrningnum ABC liggur punkturinn D á hliðinni c, þannig að $\angle BCD = \angle A$. Gefið er $a = 5$ og $BD = 3$. Þá er lengd c jöfn

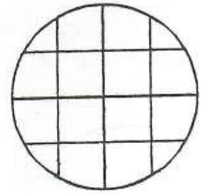


☐ 8 ☐ $8\frac{1}{3}$ ☐ $8\frac{2}{3}$ ☐ 9

8. Ef $3^x + 2^y = 985$ og $3^x - 2^y = 473$, þá er $x + y$ jafnt

☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15

9. Tveir hornréttir miðstrengir eru dregnir í hring með geislann 2 og síðan allir mögulegir strengir samsíða þeim í fjarlægðinni 1, eins og sýnt er á myndinni. Samlögð lengd þessara sex strengja er



☐ $8(\sqrt{5}+1)$ ☐ $4(\sqrt{3}+2)$ ☐ $8(\sqrt{3}+1)$ ☐ $4(\sqrt{5}+2)$

10. Stærðtáknið
$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}},$$
er jafnt

☐ $\sqrt{a+1}$ ☐ $\sqrt{a}$ ☐ $2\sqrt{a+1}$ ☐ $2\sqrt{a}$

Annar hluti

Í þessum hluta eru 5 dæmi og er hvert dæmi 6 stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Tölurnar $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$, eru skrifaðar í röð í bók þannig að á hverri síðu er 100 tölur. Byrjað er að skrifa efst á síðu 7. Á hvaða síðu lendir talan 11111?

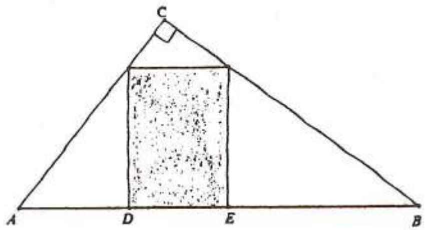
Svar: ____________________

12. Finnið allar rauntölulausnir jöfnunnar

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

Svar: ____________________

13. Þríhyrningurinn ABC á myndinni er rétthyrndur, auk þess er $|DE| = \frac{1}{4}|AB|$. Hvað er flatarmál skyggða rétthyrnda ferhyrningsins stór hluti af flatarmáli þríhyrningsins?



Svar: ____________________

14. Talnamengin $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eru mynduð samkvæmt eftirfarandi mynstri:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4,5,6\}, A_4 = \{7,8,9,10\}, \ldots$$

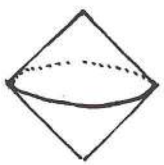
Hver er summa talnanna í menginu A_{21}?

Svar: ____________________

15. Hvert er yfirborðsflatarmál og rúmmál hlutar sem fæst með því að snúa ferningi með hliðarlengd a um hornalínu?

Flatarmál: ____________________

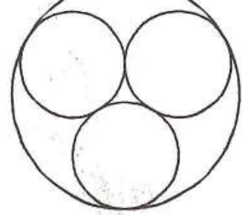
Rúmmál: ____________________



Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi. Hvert dæmi er 10 stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

16. Þrír hringir með geislann 1 og einn stór hringur eru lagðir eins og myndin sýnir. Ákvarðið flatarmál stóra hringsins. (Svarið á að vera á forminu $(\frac{a+b\sqrt{3}}{c})\pi$ þar sem a, b og c eru heilar tölur).



17. Hver eru möguleg gildi á tölu $n > 9$ þannig að n börn geti skipt 9 eins súkkulaðistykkjum jafnt á milli sín án þess að skipta nokkru stykki í fleiri en tvo hluta.

18. Látum p og q vera ólíkar jákvæðar heiltölur. Sannið: Að minnsta kosti önnur jafnan

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{eða} \qquad x^2 + qx + p = 0,$$

hefur rauntölulausn.

19. Sannið að til sé náttúruleg tala n þannig að $1996^{1995} < 1995^n < 1996^{1996}$.

FLATARmál

1. tbl. 4. árg.