

FLAFTARMÁL

2010

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆÐIKENNARA
2. TBL., 17. ÁRG.



Flatarmál 2. tbl., 17. árg.
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2010 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Rannveig Þorvaldsdóttir *formaður*
Öldutúnsskóla
Martin Kollmar *gjaldkeri*
Verzlunarskóla Íslands
Borghildur Jósúadóttir *ritari*
Grundaskóla
Ingólfur Gíslason *vefumsjón*
doktorsnemi í stærðfræðimenntun við HÍ
Laufey Einarisdóttir *ritstjóri Flatarmála*
Korpuskóla
Rannveig A. Guðmundsdóttir *meðstjórnandi*
Breiðagerðisskóla
Þórgunnur Óttarsdóttir *meðstjórnandi*
Brekubæjarskóla

Ritnefnd Flatarmála

Laufey Einarisdóttir *ritstjóri*, Korpuskóla
Þórgunnur Óttarsdóttir, Brekkubæjarskóla


Prófarkalestur

Birna Hugrún Bjarnardóttir
Laufey Skúladóttir

Umbrot og myndvinnsla

Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

Prentun

Prentsmiðjan Oddi ehf. 

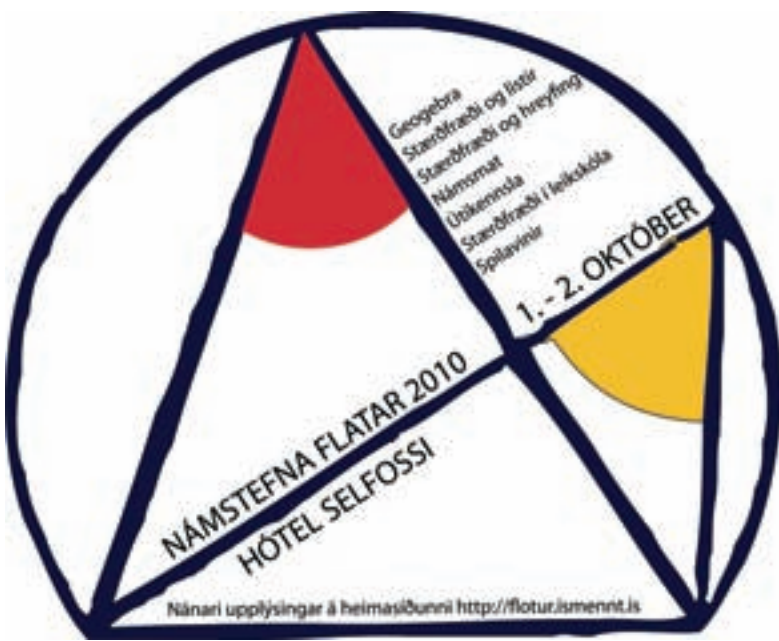
Veffang / netfang

flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

Til höfundu greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvu-póst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

Heil og sæl!
Það hefur verið skemmtilegt og lærdómsríkt ferli að ritstýra Flatarmálum. Starfið hefur jafnframt verið krefjandi og nú er komið að leiðarlökum. Mig langar því að nota tækifærið og þakka greinarhöfundum, ritnefnd, prófarkalesurum, uppsetjara og öllum þeim sem komið hafa að útgáfu blaðsins þau tvö ár sem ég hef verið ritstjóri fyrir að sýna verkeinu alúð, áhuga og ekkí síst óþrjótandi þolinmæði. Ég óska nýjum ritstjóra velfarnaðar í starfi og vona að hann hafi gaman af. Flatarmál lengi lífi!
Bestu kveðjur,
Laufey



Af hverju erum við að læra þetta? - spyrja nemendur oft þegar þeir sjá ekki tengingu viðfangsefnisins, sem þeir eru að kljást við í skólanum, við umhverfi sitt. Þess vegna er gott að viðfangsefni séu rauntengd og að nemendur geti skoðað þau út frá ýmsum sjónarhornum og í tengslum við fleiri en eina námsgrein.

Samþætting námsgreina og raunveruleg viðfangsefni auka líkurnar á að nemendur sjái einhvern tilgang með náminu. Meginmarkmið námsvefsins *Mynstur* er að gefa nemendum tækifæri til að skoða, kanna og skapa mynstur á fjölbreyttan og skemmtilegan hátt í tengslum við raunveruleikann. Á vefnum er að finna ýmsan fróðleik um mynstur bæði í texta og myndum, sem og fjölbreytt verkefni. Vefurinn var unninn með hliðsjón af markmiðum aðalnámskrár unglingsstigs og náms-efni fyrir 8. bekk í stærðfræði, en fróðleikur og verkefni gætu einnig höfðað til annarra aldurs hópa bæði í stærðfræði og myndlist. Við verkefnagerð var stefnt að því að nemendur fengju að prófa og skapa til að mynda og þróa sinn eigin skilning á viðfangsefninu.

Vefurinn er uppbyggður með það í huga að nemendur fái að kanna og skapa mynstur á eigin spýtur. Annars vegar er hægt að skoða viðfangsefnið með augum stærðfræðingsins og hins vegar með augum listamannsins. Stærðfræðingurinn og listamaðurinn eru þannig nokkurs konar leiðsögmenn í samþættingu þessara greina. Listamaðurinn segir frá tveimur listamönnum, Magdalenu Margrétu Kjartansdóttur og Maurits Cornelis Escher, og nokkrum myndum þeirra. Stærðfræðingurinn útskýrir eiginleika hliðrunar, speglunar og snúnings og segir frá samhverfum. Í sameiningu fræða þeir nemendur um mynstur. Auk þess fá þeir nemendur til að skapa mynstur og skoða uppbyggingu þeirra

MYNSTUR

stærðfræði & listir

LAUFHEY EINARSDÓTTIR SEGIR FRÁ NÁMSVEFNUM MYNSTUR SEM HÚN VANN ÁSAMT HILDI KRISTJÁNSDÓTTUR SEM LOKAVERKEFNI TIL B.ED. GRÁÐU VIÐ KENNARAHÁSKÓLA ÍSLANDS Á VORÖNN 2006

með flutningum sem og að skoða og greina mynstur í listaverkum. Mörg verkefni styðjast við smáforrit þar sem nemendum gefst kostur á að vinna gagnvirkt með efnið. Það hefur ýmsa kosti í för með sér að setja upp náms-

vef með gagnvirkum verkefnum í stað námsefnis á pappír. Auðvelt er fyrir nemendur að nálgast efnið og mögulegt er fyrir þá að endurtaka verkefni án mikillar fyrirhafnar, en það getur aukið löngun nemenda til að kanna viðfangs-



Hérna sérðu myndina sem Magdalenu Margrét sýndi í myndbandinu og fyrir neðan er einn af dúkunum sem hún skar út í og notaði í þrykkib.



- Getur þú séð hvar þessari mynstureiningu hefur verið þrykkð á myndina?
- Hvaða lit notaði listakonan þegar hún þrykkði þessum dúk á myndina?
- Hversu margar dúka ætli hún hafi notað til að búa til þessa einu mynd?

Skoðaðu rauðu hringina sem eru í bakgrunninum. Reyndu að lmynda þér hvernig dúkurinn, sem þeir voru gerðir með, litur út.

efnið nánar (Beck o.fl. 2000a:162). Á vefnum eru einnig tvö myndbönd þar sem Magdalena Margrét lýsir því hvernig mynstur verða til í grafíkverkum hennar.

Námsvefurinn er hugsaður sem sýnishorn af þeim óþrjótandi möguleikum sem hægt er að vinna með í sambandi við mynstur. Á vefnum er lögð áhersla á samþættingu stærðfræði og myndlistar í tvívíðu rúmi, þótt ekkert sé því til fyrirstöðu að vinna með mynstur í þrívíðu rúmi og í tengslum við önnur listform. Má þar sérstaklega nefna textíl og tréskurðarlist, sem tengjast íslenskum veruleika og menningu mjög náið. Einnig væri hægt að vinna með mynstur í samþættingu við aðrar greinar, eins og félagsfræði og trúarbragðafræði, og þá skoða og kanna mynstur í menningarlegu eða trúarlegu samhengi.

Á kennarasíðum vefsins er að finna röksemdarfærslu fyrir samþættingu stærðfræði og lista. Einnig er þar umfjöllun um kenningar er varða nám barna og unglunga og er sérstök áhersla lögð á kenningar um fjölgreindir, hugsmíðihyggju og nám í tengslum við umhverfið. Að auki er bent á nokkur markmið *Aðalnámskrár grunnskóla* sem tengjast viðfangsefninu. Gagnlegar og áhugaverðar vefslóðir, bækur og smáforrit sem tengjast efninu er að finna undir heimildum og ítarefni. Á vefnum er einnig að finna veftré sem auðveldar notendum að finna það sem leitað er að. Helstu hugtök sem unnið er með á þessum námsvef er að finna í hugtakalista þar sem gerð er grein fyrir þeim í stuttu máli.

Samþætting stærðfræði og lista

Stærðfræði og listir tengjast óvæfengjanlega á margan hátt enda má segja að þessar greinar séu einungis mismunandi leiðir að sama markmiði, þ.e. þörf mannsins til þess að skilja og greina umhverfi sitt og ná valdi á því (*Aðalnámskrá grunnskóla*. Stærðfræði 1999:5; Kristján Árnason 2002). Samþætting stærðfræði og listgreina í grunnskóla eykur til muna tækifæri nemenda til að kynnst tengslum þessara greina og hjálpar þeim að auka skilning sinn á hvorri grein fyrir sig í víðara samhengi (Beck o.fl. 2000:174; Petersen og Mogensen 2000:16). Listir

ná yfir vítt svið t.d. myndlist, höggmyndalist, textíl, tréskurðarlist, byggingarlist, bókmenntir, tónlist, dans og leiklist. Auðvelt er að samþætta stærðfræði við allar þessar greinar. Línur, form, viddir, taktur, hlutföll, sjónarhorn, mynstur og margt fleira er sameiginlegt með stærðfræði og listum (Petersen og Mogensen 2000:16). Oft er það jafnvel svo að tengslin á milli stærðfræði og lista eru það mikil að erfitt er að greina í sundur hvar annað endar og hitt byrjar.

Með því að fást við stærðfræðileg viðfangsefni í gegnum listir kynnast nemendur stærðfræðinni á nýjan hátt þar sem þá er lögð sérstök áhersla á fagurfræði og sköpun (Petersen og Mogensen 2000:16). Mikilvægt er að nemendur séu hvattir til að skoða listaverk og greina þau með hjálp stærðfræðinnar og að þeir fái að prófa sig áfram með eigin listsköpun. Þannig verða hin stærðfræðilegu viðfangsefni og hugtök ekki aðeins áþreifanlegri fyrir nemendur heldur ná þeir ákveðnum persónulegum tengslum við stærðfræði í gegnum eigin sköpun (Furness 2001:4). Á hinn bóginn má líka segja að nemendur öðlist nýja sýn á tjáningarformum hinna ýmsu listgreina með því að skoða þær með augum stærðfræðinnar. Nemendur geta þannig

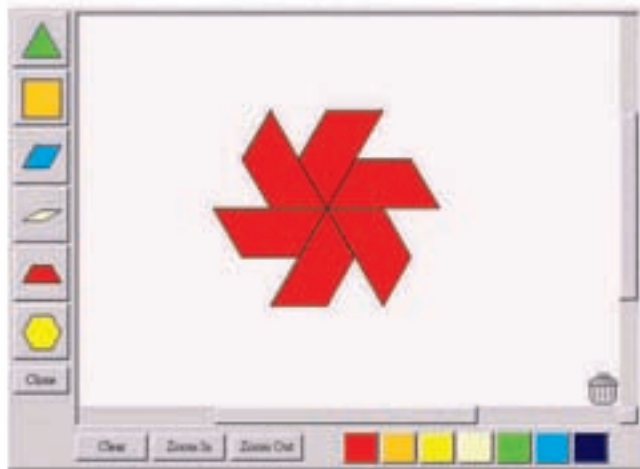
nýtt sér hugtök og tækni stærðfræðinnar bæði til að skapa og útskýra list sem gefur þeim betri innsýn inn í heim listarinnar og hvernig listamenn hafa nýtt sér stærðfræði við listsköpun.

Samþætting stærðfræði og lista getur einnig gefið nemendum, sem eiga í námserfiðleikum með stærðfræði, tækifæri til að nálgast hana frá öðru sjónarhorni og á áþreifanlegri hátt (Beck o.fl. 2000:174; Abrahamsen og Bulien 2004). Óhlutbundin hugtök stærðfræðinnar verða oft skiljanlegri þegar þau eru sett í hlutbundið eða myndrænt samhengi. Einnig fá nemendur sem hafa mikinn áhuga á listum tækifæri til að dýpka þekkingu sína með því að tengja stærðfræði við viðfangsefni sín. Samþætting greinanna er því afar góð leið til að leyfa nemendum að fá útrás fyrir sköpunargleði sína um leið og þeir kynnast undraheimi stærðfræðinnar á skemmtilegan, myndrænan og áþreifanlegan hátt.

Eitt meginviðfangsefni stærðfræðinnar er að skoða og kanna mynstur og regluleika. Stærðfræðin nýtist því vel bæði til að kanna mynstur, sem er að finna í umhverfinu, og til að lýsa þeim (Beck o.fl. 2000:175-176; Petersen og Mogensen 2000:12). Nánari athugun á blómum og dýrum, svo eitthvað sé nefnt,

Að búa til myndur með snúningi

Búðu til krans eins og þennan hér að neðan.



[Myndarferil]

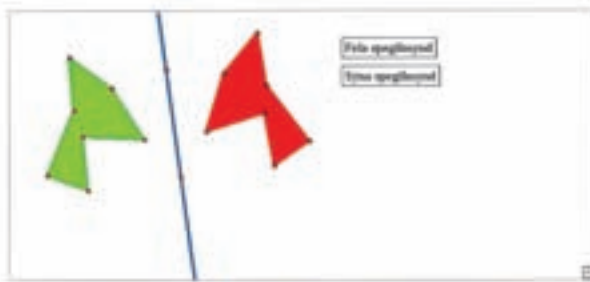
Opnaðu forritið með því að smella á tákann (það opnar í nýjum glugga).

Þú nærð í form með því að smella á það, þá birtist það á flatinum. Til að snúa smellir þú á eitt horn formsins, heldur takkanum niðri og dregur músina til.

- Reyndu að búa til önnur myndur úr fleiri formum með því að snúa þeim.
- Getur þú búið til myndur með fleiri en einu formi með því að snúa þeim?
 - Lýstu í orðum hvernig myndir þitt er búið til.

[Svar]

Hérna fyrir neðan hefur grænu myndinni verið speglað um bláa speglunarsínn. Rauða myndin er speglimyndin. Feidu speglimyndina og færðu rauðu punktana í grænu myndinni til. Reyndu að sjá fyrir þér hvernig rauða myndin líkur út. Athugaðu hvort þú hafðir rétt fyrir þér með því að sýna speglimyndina.



Fangli af vefnum <http://www.mathematikk.no/matematikktarform/visindavefur.asp?id=2448>
Til að endurbúa myndina er smelt á myndina og (T) á R. á lýðingunni.

- Eru grænu og rauðu myndirnar jafnlangt frá bláa speglunarsínum?
- Hvenær eru myndirnar nálægt hvor annari?
- Hvenær skerst myndirnar?
- Feidu speglimyndina og færðu speglunarsínn til. Reyndu að sjá fyrir þér hvernig rauða myndin líkur út. Athugaðu hvort þú hafðir rétt fyrir þér.

leiðir í ljós uppbyggingu sem myndar ákveðið myndur og endurspeglast í mörgu því sem mannkynið hefur skapað. Listaverk eru þar engin undantekning og er hægt að finna myndur m.a. í byggingarlist, höggmyndum, málverkum, grafík og textíl.

Auðvelt er að vekja athygli nemenda á myndur og eiginleikum þeirra með því að skoða listaverk, sérstaklega

vegna þess að þau eru áþreifanlegur hluti af raunverulegu umhverfi okkar. Möguleikarnir á að skoða og vinna með myndur eru auk þess fjölmargir, til dæmis má nefna flutningana hliðrun, speglun og snúning, samhverfur, þökun, samanburð, einingar myndra og tengsl þeirra. Nemendur geta síðan í kjölfarið búið til sín eigin listaverk og þannig lært m.a. að þekkja og meta myndur sem mannkynið hefur notað til

að skapa og skreyta umhverfi sitt (Petersen og Mogensen 2000:12). Á þennan hátt kynnast nemendur margbreytileika myndra og læra að beita stærðfræðilegum hugtökum við myndlýsingar. Einnig er kjörið að nota tækifærið til að velja fyrir sér hugtakinu list sem eflaust margir hafa mismunandi skoðun á, t.d. hvað nemendum finnst um sínar eigin myndir, eru þær listaverk eða ekki (Petersen og Mogensen 2000:52)? Þannig þjálfast nemendur líka í að orða hugmyndir sínar og koma þeim á framfæri á skilmerkilegan og skipulagðan hátt.

Vefurinn **MYNSTUR - stærðfræði og listir** er á slóðinni:

<http://flotur.ismennt.is/mynstur>

Heimildir

- Abrahamsen, Gerd og Tone Bulien. 2004. „Matamatikk og Kunst og Haandverk, to sider av samme sak.“ *Tan-genten 2*. [Sótt 4. ágúst 2010.] Vefslóð: <http://www.caspar.no/tangenten/2004/MaKH204.pdf>
- Aðalnámskrá grunnskóla*. Stærðfræði. 1999. Menntamálaráðuneytið, Reykjavík.
- Beck, Hans Jörgen, Hans Christian Hansen, Anna Jörgensen og Leif Ørsted Petersen. 2000. „Flytninger og symmetri grupper.“ *Matematik i læreruddannelsen 2. Kultur, kundskap og kompetence*, bls. 162-178. Peter Bollerlev ritstjóri. Gyldendal Uddannelse, Kaupmannahöfn.
- Furness, Anthony. 2001. *Matematiken tar form*. Ekelunds Förlag AB, Solna.
- Kristján Árnason. 2002, 31. maí. „Hver er uppruni listarinnar?“ *Visindavefurinn*. [Sótt 5. febrúar 2006.] Vefslóð: <http://www.visindavefur.hi.is/svar.asp?id=2448>
- Petersen, Silla Balzer og Arne Mogensen. 2000. *Eining 5, kennarabók*. Guðbjörg Pálsdóttir og Sigrún Ingimarsdóttir þýddu, staðfærðu og sömdu viðbótarefni. Námsgagnastofnun, Reykjavík.



Úlfur, lamb og heypokinn

SÖGUHORNID

Kristín Bjarnadóttir
Menntavísindasviði HÍ

*Hvernig flutt var yfir á
úlfur, lamb og heypokinn?
Ekkert granda öðru má
eitt og mann tók báturinn.*

TEIKNING ÚR VÍSNAÞÓKINNI EFTIR HALLDÓR PÉTURSSON

Margir kunna vísuna undir myndinni hér til hliðar, sem spyr að því hvernig flytja megi yfir á úlf, lamb og heypoka. Yfirbragðið, haglega ort vísa um búskaparhætti fyrri alda, telur lesandanum trú um að vísan sé alíslensk. Hún var til dæmis birt í *Vísnaþókinni*, sem fyrst kom út árið 1946 og henni fylgdi skemmtileg mynd eftir Halldór Pétursson teiknara.

Ennfremur er gátuna að finna í *Aðalnámskrá grunn-skóla, stærðfræði*. Gáta þessi birtist líka í fyrsta bindi af *Íslenskum gátum, þulum og skemmtunum*, sem Jón Árnason og Ólafur Davíðsson þjóðsagnasafnarar söfnuðu, útgefnu árið 1887. Hún á því eins langar rætur í þjóðmenningunni og elstu menn muna.

Og þó! Gátan virðist álíka íslensk og sagan af Rauðhettu og úlfnum. Úlfa er ekki að finna á Íslandi. Íslenskir bændur hafa varla nokkurn tíma þurft að ferja úlf yfir á.

Gátur af þessu tagi er víða að finna í nýjum og gömlum búningi enda er saga þeirra eldri en Íslandsbyggð. Elstu handrit bókarinnar *Propositiones ad Acuendos Juvenes* eftir Alkvín frá Jórdvík (d. 804) eru frá 9. öld. Bókin geymir 53 dæmi, sumir segja 56, af ýmsu tagi, meðal annarra elstu dæmi um ferjuflutninga þar sem sett eru takmarkandi skilyrði. Þrjár gerðir eru af slíkum dæmum í bók Alkvíns. Dæmið sem skyldast er íslensku gátunni hljóðar þannig:

18. dæmi. Bóndi nokkur fór á markað og keypti úlf, geit og kál. Á heimleiðinni leigði hann sér bát. Báturinn tók aðeins bóndann og eitt af því sem hann keypti, úlfinn, geitina eða kálið. Ef hann liti af þeim æti úlfurinn geitina eða geitina kálið. Bóndinn vildi koma öllu þrennu heilu og höldnu yfir ána. Hvernig fór hann að því?

Önnur tilbrigði við þessa sögu herma að bóndinn hafi ætlað að ferja ref, geit og baunapoka, eða þá hlébarða, svín og graut, og er þá aðeins fátt eitt talið.

Önnur gáta Alkvíns um ferjuflutninga hljóðar svo:

17. dæmi. Þrír karlmenn eru á ferð, hver með sinni systur. Þau ætla að komast yfir á á bát sem tekur aðeins tvo. Aldrei má skilja stúlku eftir í viðurvist karlmanns nema bróðir hennar sé einnig viðstaddur. Hvernig komast þau öll yfir ána?

Þetta dæmi birtist annars staðar þar sem dregin er upp mynd af þremur afbrýðissömum eiginmönnum sem eru þá í hlutverki bræðranna. Gátan um þrjá kristniboða og þrjár mannætur er af sama toga en aðeins einfaldari. Mannæturnar mega aldrei verða fleiri en kristniboðarnir. Dæmum af þessu tagi má breyta með því að breyta fjölda para, rýmd bátsins eða hvoru tveggja. Á 17. öld kom fram tilbrigði við dæmið með eyju í miðri á. Þriðja ferjugáta Alkvíns er eftirfarandi:

19. dæmi. Karlmaður og kona, bæði jafnhung, og tvö börn, sem veða hvort um sig helming á við fullorðinn, ætla á bát yfir á. Báturinn tekur ekki meira en það sem einn fullorðinn vegur. Hvernig komast þau öll fjögur yfir ána?

Fjórða gerð af gátum, þar sem ferðast er yfir á, er eftirfarandi:

Fjórir menn koma að á að nóttu til. Þar er mjó brú en hún getur aðeins borið tvo í einu. Af því að dimmt er af nóttu þarf að nota blys. Aðeins eitt blys er til sem endist í 15 mínútur. Blysið þarf því að senda til baka yfir brúna áður en næsti hópur leggur af stað. Ari kemst yfir ána á einni mínútu, Bergur á tveimur mínútum, Cecil á fimm mínútum og Dóri á átta mínútum. Þegar tveir fara yfir ána í einu tekur það tíma þess sem hægar gengur. Spurt er hvort þeir komist allir yfir ána á 15 mínútum eða skemur.

Þessi gáta mun hafa komið fram árið 1981. Hér má breyta forsendum, s.s. endingu blyssins og fjölda og hraða ferðamannanna. Gátan hefur verið sett upp sem leikur á netinu.

Marcia Ascher, sem er kunn fyrir rit sín um þjóðháttastærðfræði (ethnomathematics), ritaði grein í *Mathematics Magazine* árið 1990 þar sem hún fjallaði um myndir gátunnar í ýmsum löndum. Þeirra á meðal eru nokkrar áhugaverðar sögur frá Afríku þar sem ólíkar lausnir gátunnar eru ræddar og metnar. Sögurnar gætu vel höfðað til stálpaðra barna.

Hvaða erindi eiga gátur af þessu tagi inn í stærðfræðitíma? Kennslutíminn er afmarkaður og takmörk fyrir þeim tíma sem er hægt að verja til skemmtunar eingöngu. Í upphafi var nefnt að gátuna væri að finna í *Aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði*. Hún er nefnd sem dæmi um verkefni til að vinna að markmiðum 6.

þreps í stærðfræði. Vinnu með þrautina er ætlað að þroska rökhugsun. Nemendur leita lausna sem leiða til sem fæstra ferða. Ekki er víst að lausnin sé aðeins ein. Breytingar á forsendum eru ekki síður þroskandi fyrir rökhugsun og útsjónarsemi eins og til dæmis í þrautinni um blysið.



Alkvín frá Jórvík (d. 804) fékkst við að safna gátum um ferjuflutninga sem birtar voru á bók hans *Propositiones ad Acuendos Juvenes*.

Heimildir

Aðalnámskrá grunnskóla. Stærðfræði. (1999). Reykjavík: Menntamálaráðuneytið.

Alkvín (9. öld). *Propositiones ad Acuendos Juvenes*.

Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes. Sótt 10. júlí 2010.

Ascher, Marcia (1990). A river-crossing problem in cross-cultural perspective. *Mathematics Magazine*, 63 (1), bls. 26–29. <http://www.jstor.org/stable/2691506?> Sótt 11. júlí 2010.

Ferðamennirnir og blysin, leikur á netinu. <http://www.visi.com/~heyyousir/bridgepuzzle.html>.

Gátan um ref, gæs og baunapoka. Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Fox,_goose_and_bag_of_beans_puzzle. Sótt 10. júlí 2010.

Jón Árnason og Ólafur Davíðsson (1887). *Íslenskar gátur, skemtanir, vikivakar og þulur*. Kaupmannahöfn: Hið íslenska bókmenntafélag.

Simon Jóh. Ágústsson (1946). *Vísnaðókin*. Reykjavík: Hlaðbúð.

Fagmenntun

og viðhorf stærðfræðikennara á Akureyri til stærðfræði og stærðfræðikennslu

Í þessari grein er sagt frá meistaraþrófsverkefni til fullnaðar M.Ed. gráðu í náms- og kennslufræði (stærðfræðimenntun) við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Kveikjan að þessu verkefni voru hugleiðingar höfundar um fagmenntun og fagþekkingu kennara sem kenna börnum í grunnskóla stærðfræði ásamt viðhorfi þeirra til greinarinnar.

Markmið verkefnisins var að vekja athygli á og færa rök fyrir, með því að vísa í fyrirbyggjandi heimildir, að traust og góð undirstaða í stærðfræði sé mikilvæg fyrir þá sem kenna stærðfræði sem og þekking á kennslufræðilegum þáttum stærðfræðinnar sem námsgreinar. Einnig var markmið að skoða menntun grunnskólakennara í stærðfræði og kanna viðhorf þeirra til eigin stærðfræðináms og -kennslu. Það var gert með meginlegrri rannsókn þar sem spurningalisti var lagður fyrir hóp kennara sem kenna stærðfræði í 1. - 10. bekk á Akureyri. Sendir voru út 108 spurningalistar og af þeim svöruðu 89 sem er 82,4% þátttaka. Hér verður sagt frá helstu niðurstöðum þeirrar rannsóknar, en fyrir þá sem frekari áhuga hafa á efninu má benda á að ritgerðin í heild sinni er aðgengileg á rafrænu formi í Gegni.

Við úrvinnslu svara kom í ljós að áberandi margir svara á hlutlausan hátt, þ.e. merkja við valmöguleikann „hvorki ... né“

frekar en að taka afstöðu. Við 25 spurningum sem varða viðhorf svara að meðaltali 27% þátttakenda á hlutlausan hátt, þ.e. „hvorki ... né“ og að meðaltali 37% kennara svara „veit ekki“ við spurningum um hversu mörgum einingum í stærðfræði þeir hafa lokið í námi í framhaldsskóla og háskóla. Þetta gæti haft áhrif á niðurstöður.

ANNA BERGRÓS ARNARSDÓTTIR, KENNARI VIÐ ODDEYRARRSKÓLA Á AKUREYRI

Til að skoða og bera saman viðhorf var kennurum annars vegar skipt eftir stigum, þ.e. í kennara á yngsta stigi, miðstigi og unglingastigi en hins vegar í fagmenntaða stærðfræðikennara og aðra grunnskólakennara sem hafa önnur sérsvið en stærðfræði.

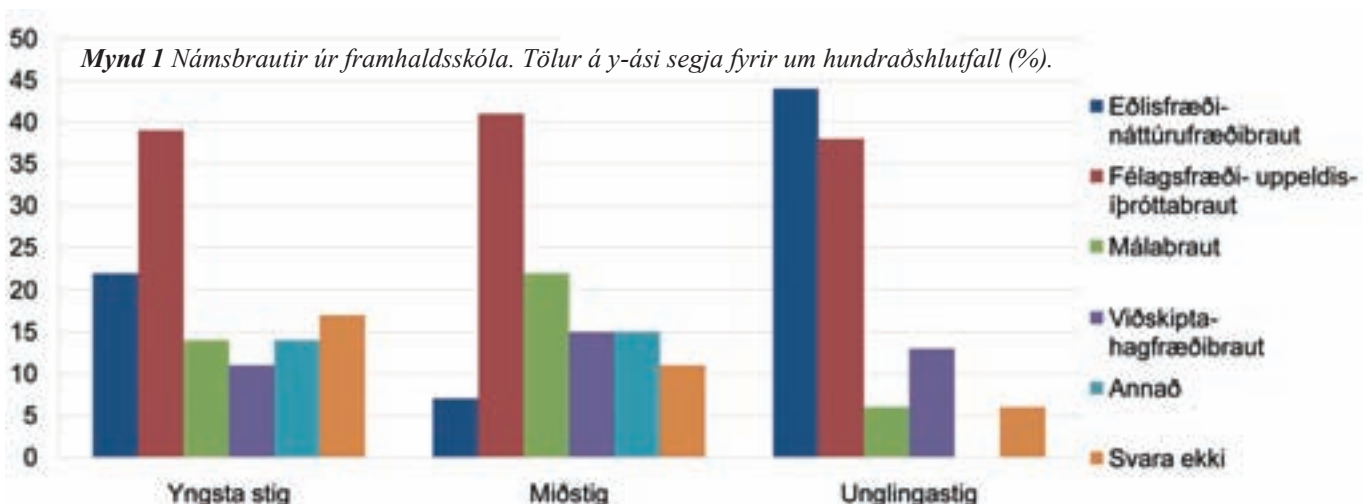
NÁM KENNARA Í FRAMHALDSSKÓLA

Í heildina eru fáir sem luku stúdentsprófi úr framhaldsskóla af eðlisfræði- eða náttúrufræðibraut eða 19% kennaranna. Af unglíngastígskenndurum eru hlutfallslega

flestir af þeim brautum eða tæplega 45% úr þeirra hópi. Af félagsfræðibraut útskrifuðust 35% aðspurðra en sú braut veitir góðan undirbúning undir margt sem tengist kennaranámi, s.s. félags- og sálfræðinámskeið og algengt er að kennaraefni séu af þeirri braut. Stærðfræðinámskeið á félagsfræðibrautum og öðrum bóknámsbrautum eru oft umfangsminni en á náttúrufræðibraut svo hugsanlegt er að einhverjir kennaranna hafi meðvitað reynt að velja sig frá stærðfræðinámskeiðum.

Margir svara því til að þeir viti ekki hve margar einingar þeir tóku í stærðfræði í framhaldsskóla en 35% kennara segjast hafa lokið 16 einingum eða meira. Flestir kennarar sem þátt tóku voru í framhaldsskóla meðan fleiri stærðfræðinámskeið voru skylda en samkvæmt nógildandi námskrá fyrir framhaldsskóla. Því má ætla að á næstu árum verði sá grunnur sem kennarar fá úr stærðfræði í framhaldsskólum enn minni en raunin er nú og er hann þó ekki mikill miðað við könnun Friðriks og Kristínar Höllu (1992) á kunnáttu fyrsta árs kennaranema í stærðfræði.

Tæp 30% kennara telja að stærðfræðin í framhaldsskólanum hafi verið frekar erfið eða mjög erfið. Þar eru yngsta stígs kennarar hlutfallslega flestir, síðan miðstígs kennarar en fáir kennarar af unglíngastigi



telja svo vera. Það að stærðfræðin hafi þótt erfið bendir til þess að erfitt hafi verið að skilja hana. Það er ekki nógu gott því mikilvægt er að kennarar búi yfir góðum skilningi á stærðfræði til þess að geta kennt hana og útfært á ólíka vegu. Einnig þurfa kennarar að búa yfir hæfniauka eða meiri þekkingu en það stig sem þeir kenna á og framhaldsskólastig er næst á eftir grunnskólastigi.

Nokkrum þótti stærðfræðin í framhaldsskólanum leiðinleg eða 16% sem er heldur hátt hlutfall. Þar af eru hlutfallslega flestir af miðstigi og svo yngsta stigi. Helsta hættan er að kennararnir hafi enn neikvætt viðhorf til stærðfræðinnar sem getur ómeðvitað einnig valdið neikvæðni hjá nemendum og aukið líkur á stærðfræðifælni.

MENNTUN KENNARA Í STÆRÐFRÆÐI Í HÁSKÓLA

Meirihluti kennaranna er með B.Ed. gráðu, eða 36 frá Kennaraháskóla Íslands og 37 frá Háskólanum á Akureyri. Af þessum 36 úr KHÍ eru fimm með stærðfræði sem valgrein, annað hvort einungis stærðfræði eða stærðfræði sem aðra grein af tveimur. Þar af kenna fjórir á unglingsstigi. Einn kennari á unglingsstigi til viðbótar er með nokkra stærðfræðimenntun af raungreinasviði HA. Þessir fimm kennarar af 17 á unglingsstigi eru tæplega 30% unglingsstigskenndar sem hafa sérhæfingu í stærðfræðikennslu. Sé það borið saman við könnun menntamálaráðuneytis frá árinu 2003 á menntun stærðfræðikennara á unglingsstigi kemur í ljós að þetta er mjög svipað hlutfall en þar voru 33% með B.Ed. gráðu með stærðfræðimenntun sem sérsvið (Menntamálaráðuneytið, 2005:7). Þeir sem útskrifast af náttúrufræðibraut HA skila sér að litlu leyti í kennslu í stærðfræði en þeir voru auk eins unglingsstigskenndar þrjár á miðstigi og þrjár á yngsta stigi en þetta eru aðeins 14% af þeim sem útskrifast hafa af sviðinu frá árinu 1996.

Þessar niðurstöður sýna að mikið vantar upp á að kennarar með sérhæfingu í stærðfræði og stærðfræðimenntun sinni stærðfræðikennslu grunnskólanema. Innan við þriðjungur þeirra sem kenna á elsta stiginu hafa sérhæfða menntun og eru þá taldir með þeir sem útskrifaðir eru af raungreinasviði Háskólans á Akureyri sem verður að teljast umhugsunarefni. Kennarar verða að hafa djúpa þekkingu á viðfangsefninu og

hafa stærðfræðileg atriði fullkomlega á valdi sínu. Það er ekki nóg að þeir kunni sjálfir viðfangsefnið heldur verða þeir að hafa á því skilning svo þeir geti útskýrt fyrir nemendum sínum ýmis flókin atriði. Þeir verða að vera færir um fleira en að koma á framfæri algengustu útskýringum á hlutum. Þeir verða einnig að geta útskýrt hvers vegna ákveðið stærðfræðilegt vandamál er leyst á tiltekinn hátt, hvers vegna það er þess virði að læra það og hvernig það tengist öðrum vandamálum (Shulman 1986:9).

Þegar spurt var um fjölda eininga í stærðfræði í háskóla var miðað við gamla fyrirkomulagið, þ.e. ekki ECTS sem nú er farið að nota, enda var viðmiðið til B.Ed. gráðu 90 einingar. Það er svipað uppi á ten-

Stórum hluta aðspurðra þótti stærðfræðin í háskóla auðveld eða frekar auðveld en það bendir til þess að menn hafi jákvæðar minningar um stærðfræðinámskeiðin og skilningur hafi verið góður. Rúmum helmingi hinna 89 kennara sem svöruðu þótti stærðfræðin skemmtileg. Þrettán þótti hún leiðinleg; enginn þeirra er af stærðfræðikjörsviði í KHÍ eða raungreina-kjörsviði HA. Það er gott að þeir eru í minnihluta sem höfðu slæma upplifun af stærðfræðinámi sínu því slíkt getur yfirfærst í kennslu (Gresham 2007).

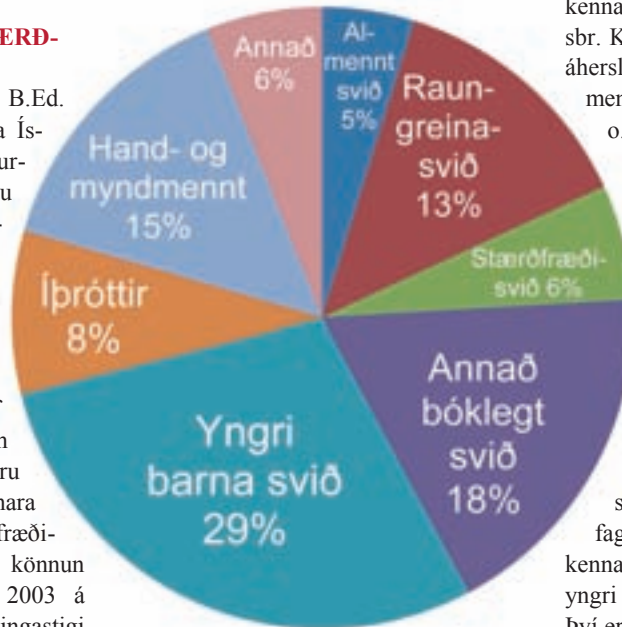
ENDURMENNTUN

Meira en helmingur kennara hefur sótt endurmenntunarnámskeið í stærðfræði síðastliðin 5 ár. Nauðsynlegt er fyrir kennara að viðhalda eigin stærðfræðinámi sbr. Kilpatrick (2001). Finnar leggja einnig áherslu á að kennarar haldi áfram að mennta sig eftir að námi lýkur (Pehkonen o.fl. 2007). Þá er endurmenntun ekki síður nauðsynleg þegar til kemur nýtt námsefni eins og raunin hefur verið síðustu ár. Hins vegar hefur meirihluti þeirra sem sótt hafa endurmenntunarnámskeið aðeins sótt mjög stutt námskeið svo nám sem þar fer fram er takmarkað. Allt er þó betra en ekkert og það er jákvætt hve áhugasamir kennararnir eru. Kennarar unglingsstigs hafa varið mestum tíma í endurmenntun í stærðfræði sem er eðlilegt því þeir eru fagkennarar, þ.e. eru flestir aðeins að kenna stærðfræði á meðan þeir sem kenna á yngri stigum kenna oftast margar greinar. Því er eðlilegt að unglingsstigskenndar séu með fleiri stundir í endurmenntun í stærðfræði en hinir sem þurfa að huga að fleiri námsgreinum í sinni kennslu.

TILFINNINGAR TIL STÆRÐFRÆÐIKENNSLU

Tæpur þriðjungur kennara telur að auðveldara sé að kenna stærðfræði en aðrar greinar og rúmur helmingur að það sé hvorki erfiðara né auðveldara. Ég bjóst við að þessu væri öfugt farið, þ.e. að kennurum þætti það fremur erfitt, bæði þar sem nemendur eiga oft erfitt með að skilja stærðfræði og kennarar þurfa að hafa djúpan skilning á viðfangsefninu til að geta útskýrt vel og á fjölbreyttan hátt.

Nokkuð stór hluti telur sig finna til vanmáttar gagnvart verkefnum nemenda eða nærri fjórðungur kennara á miðstigi og 17% af yngsta stigi. Helmingur þeirra sem



Mynd 2 Sérsvið kennara.

ingnum með einingafjölda í stærðfræði úr háskóla og framhaldsskóla að því leyti að stór hluti kennara veit ekki hve margar einingar voru teknar. Aðeins 9 kennarar segjast hafa tekið 1-5 einingar en það er sá flokkur sem rúmar skyldunámskeið í stærðfræði á sérsviðum utan stærðfræðikjörsviðs og hefur gert gegnum tíðina í bæði HA og KHÍ. Rúm 30% hafa lokið 5-10 einingum sem bendir til þess að þessir kennarar hafi valið sér stærðfræði aukalega sem valgrein - og er það gott ef svo er. Fimm unglingsstigskenndar hafa lokið 15 einingum eða meira sem er í eðlilegu samræmi við þann fjölda sem útskrifaðist af stærðfræðikjörsviði KHÍ eða raungreinasviði HA.

finna til vanmáttar kemur af kjörsviðinu yngri barna kennsla.

Tæpur helmingur kennara telur sig hafa mikla kunnáttu á viðfangsefninu stærðfræði en 8% telur sig hafa litla kunnáttu í stærðfræði. Þeir kenna flestir á yngsta stigi. Tæpur helmingur segist hvorki hafa mikla né litla kunnáttu svo þeir virðast vera sáttnir við stöðu mála. Ekki kemur á óvart að mun fleiri úr hópi þeirra sem hafa stærðfræðikjörsvið telja sig hafa betri þekkingu en kennarar með önnur kjörsvið.

Kennurunum gengur almennt vel að mæta þörfum þeirra sem eiga við erfðleika að glíma í stærðfræðináminu og fáir sem telja að það gangi illa. Kennararnir eru einnig ánægðir með árangur af kennslunni og í heildina voru aðeins 3% því frekar ósammála að árangur væri góður. Áberandi er að þeir sem eru af stærðfræðikjörsviði eru ánægðari með árangur sinn en aðrir. Enginn af unglingsstigi taldi sig ósáttan við árangur sinn af kennslu í stærðfræði. Það kemur svolítið á óvart því alltaf er hluti nemenda sem ekki nær góðum árangri, t.d. á samræmdum prófum í 10. bekk þar sem nálægt 30% nemenda á svæðinu nær ekki 4,5 sem hefur verið lágmarkskrifa til að komast inn á bóknámsbraut framhaldsskóla. Kennararnir gætu þó túlkað það þannig að það að veita nemendum náms efni við hæfi sé að mæta þörfum nemendanna því nær allir segjast leitast við að finna námsefni við hæfi þó svo að niðurstöður á stöðluðum prófum sýni að það ná ekki allir viðunandi árangri.

Rúmur þrjú fjórðu kennarahópsins hafa lesið nýjustu aðalnámskrána en 9% hafa ekki gert það. Samkvæmt Shulman (1986) og Kilpatrick o.fl. (2001) er það einn af þremur mikilvægustu þáttunum sem stærðfræðikennarar verða að hafa á valdi sínu ásamt fræðilegri þekkingu á námsefninu og þekkingu á kennslufræði. Þetta er eitt af því sem allir ættu að vera með á hreinu en hugsanlega hafa þeir sem ekki eru sammála lesið eldri útgáfu námskrár, frá 1999, en efnisleg breyting varðandi námsþætti, inn-tak og aðferðir er lítil milli útgáfa.

KENNSLUADFERÐIR

Stór hluti kennara, eða rúm 80%, segist nota fjölbreyttar kennsluáferðir í stærðfræðikennslunni. Fáir segja að kennslan fari að mestu fram með innlögn en það eru helst unglingsstigs-kennarar eða tæpur fjórðungur þeirra og svo þeir sem hafa meiri sérmenntun í stærðfræði. Hugsanleg skýring er sú að þeir hafi betri tök á efninu og trúir því að þeir geti með góðum árangri komið eigin þekkingu til skila. Fjórðungur kennaranna segist leggja mikla áherslu á að nemendur vinni hver og einn í sínum bókum en unglingsstigs-kennarar eru þar í meirihluta eða tæpur helmingur þeirra. Kennarar á yngsta stigi leggja minnsta áherslu á einstaklingsvinnu nemenda í bókum sínum.

Kennarar á yngsta stigi og unglingsstigi nota mikið umræður, eða í nálægt helmingi tilfella, þar sem nemendur tjá sig um lausnarleiðir sínar. Þar skera miðstigs-

kennarar sig úr þar sem aðeins rúmur fjórðungur þeirra segist nota umræður mikið í kennslunni. Athyglisvert er að ekki mælist marktæk fylgni milli þekkingar kennara á kennslufræði og því hvort þeir nota mikið umræður í kennslunni (þar sem umræðurnar þjálfar notkun tungumáls í stærðfræði sem aftur er mikilvægur hæfnipáttur og í raun forsenda stærðfræðilegrar hæfni, miðað við það sem Niss (2002) og félagar segja í KOM skýrslunni). Boaler og Humphreys (2005) eru einnig á þessari skoðun, því umræður efla nemendur í tjáningu og þjálfu þá í að koma hugsun sinni í orð. Ekki er það síður mikilvægt fyrir aðra nemendur að sjá ólíkar útfærslur á lausnarleiðum, eins og til dæmis með því að hlusta á samnemendur. Eins er það lærdómsríkt að sjá og hlusta á nemendur sem fá röng svör, því læra má af því.

Nokkuð stór hluti kennara, eða tæp 40%, telja að mestu máli skipti að kenna nemendum réttar aðferðir þar sem áhersla er á eina rétta leið að réttu svári. Yfir 90% kennara telja að skilningur nemenda á viðfangsefni skipti mestu máli en það er það sem Niss (2002), Kilpatrick (2001), Carpenter (2003), Krauss (2008) ásamt samstarfsfólki leggja áherslu á.

VIÐHORF KENNARA TIL NÁMS- EFNIS Í STÆRÐFRÆÐI

Kennarar nota almennt annað efni til viðbótar við grunnnáms efni í sinni kennslu og er það í samræmi við það að þeir leitist við að finna námsefni við hæfi hvers nemanda.

Tafla 1 Hver er helsta skýringin á óánægju með grunnnáms efni.	Yngsta stig %	Miðstig %	Unglingastig %
Erfitt	2		
Mikið um villur	2		
Kennarastýrt	5		
Farið úr einu í annað	12	7	
Fá æfingadæmi	10	13	
Lítið um endurtekningar	5	13	
Einhæft	5	10	
Of mikið uppgötvunarnám		7	
Vantar aukin þyngdarstig		3	
Þjálfun í grunnaðferðum vantar		7	
Margar spurningar í sama dæmi		7	
Mikið lesmál	5	37	6
Sýnidæmi vantar		10	6
Ekki foreldravænt			6
Svör aðeins á vef			6

Algennt var á öllum stigum að þeir notuðust við eldri bókaflokka, s.s. *Almennu stærðfræði I-III* á unglingsstigi og ljósrít af bókaflökknum *Stærðfræði 1A-6B* sem ekki er lengur gefið út, á yngsta og miðstigi.

Nærri helmingur unglingsstigskenndra notar *Almennu stærðfræðina* í sinni kennslu. Þeir virðast samt flestir ánægðir með nýja efnið, *8-tíu*, en finnst hugsanlega *Almennu stærðfræðin* henta ákveðnum hópi nemenda betur. Það er einnig hugsanlegt að einhverjir kennarar noti eingöngu *Almennu stærðfræðina* í sinni kennslu þar sem það námsefni er enn fáanlegt hjá Námsgagnastofnun en ekki er hægt að sjá í þessari rannsókn hvort námsefnið sé notað eitt og sér eða með námsefninu *Átta-tíu*. Þeir nota einnig *Stærðfræði 8+ - 10+* bækurnar nokkuð, en þar er áhersla á að þjálfandi undirstöðuatriði og texti er einfaldur. Það á líka við um bókaflökkinn *Stærðfræði í dagsins önn* sem um fjórðungur hópsins notar og ætlaður er þeim sem ekki hafa tók á að fylgja þeirri stærðfræði sem kennd er á unglingsstigi. Annað algengt efni notað í kennslu er, heimaðæmi, heimatilbúin verk-efni og gömul samræmd próf. Þetta bendir til þess að kennarar reyna að finna efni fyrir þá nemendur sem eiga í erfiðleikum en athyglisvert er að lítið sem ekkert var nefnt af þyngra námsefni s.s. efni fyrir framhaldsskólanema. Þannig virðist eins og frekar sé reynt að koma til móts við þá sem minna mega sín í stærðfræðinámi en þá sem skara fram úr.

Á miðstigi eru fleiri óánægðir með sitt grunnnámsefni en ánægðir. Helst er nefnt að þar sé mikið lesefni sem valdi því að nemendur sem eiga í erfiðleikum með lestur séu þar með líka í erfiðleikum með stærðfræði. Einnig er nefnt að lítið sé um endurtekningar og æfingadæmi fá. Þarna má lesa út að sumir kennarar vilji að stærðfræðinámi gangi mikið út á að reikna aftur og aftur svipuð dæmi og nemendur nái þannig tókum á ákveðnu reikniriti eða aðferð. Á miðstigi er algengt að kennarar noti eldra námsefni, s.s. *Stærðfræði 4A-6B* ásamt *Stjörnubókum* og heimatilbúnu efni.

Yngsta stigs kennarar notast einnig við bókaflökkinn *Stærðfræði 1A-3B* eins og miðstigskenndarar, en það er einnig algengt að þeir noti bækur eins og *Í undirdjúpunum*, *Línuna* og *Viltu reyna* bókaflökkinn. Þá notast margir við bækurnar *Við stefnum á margföldun* og *Við stefnum á deilingu*, ásamt því að stór hluti nefnir annað, s.s. ljósritað heimatilbúið efni og eldri hefti. Kennurum á yngsta stigi stendur til boða

mikið úrval bóka sem þeir geta pantað hjá Námsgagnastofnun og greinilegt er að þeir notfæra sér það.

Á yngsta stigi eru fleiri kennarar ánægðir með grunnnámsefnið en óánægðir eru 21%. Það sem veldur þessari óánægju einna helst er að þeir telja að farið sé úr einu í annað, æfingadæmi séu fá og lítið um endurtekningar. Þá var nefnt að lesmál væri mikið og efnið kennarastýrt.

SAMANTÆKT

Þessi rannsókn gefur ákveðnar vísbendingar um menntun og viðhorf kennara þó varla sé hægt að yfirfæra niðurstöðurnar á kennara almennt vegna þess að úrtakið er ekki dreift á landsvísu heldur afmarkast við ákveðið lokað svæði. Það að á svæðinu sé háskóli sem menntar kennara breytir einnig heildarmyndinni mikið, miðað við kennara á landsvísu, þar sem stór hluti kennara sem tóku þátt (42%) voru útskrifaðir úr HA.

Niðurstöður sýndu að viðhorf til stærðfræði, bæði eigin náms og kennslu, er frekar jákvætt en neikvætt. Stór hluti veit ekki hversu mikla stærðfræði, í einungum talið, hann hefur lært, hvorki í framhaldsskóla né háskóla. Einnig að einingafjöldi er yfirleitt meiri, bæði í framhaldsskóla og háskóla, en sá lágmarksfjöldi eininga sem ljúka þarf á námsbrautunum. Kennarar af stærðfræðikjörsviði KHÍ og raungreina-sviði HA hafa frekar þá skoðun að þeir hafi góða þekkingu á stærðfræði, kennslufræði stærðfræðinnar og námsferli nemenda heldur en kennarar sem brautskráðst hafa með önnur kjörsvið. Þá finna fagmenntaðir stærðfræðikennarar síður fyrir vanmætti gagnvart verkefnum nemenda og eru ánægðari með árangur sinn af kennslunni. Þeir nota einnig frekar umræður og eru ánægðari með grunnnámsefnið heldur en kennarar með önnur sérsvið.

Heimildir

- Aðalnámskrá framhaldsskóla - stærðfræði.* (1999) Reykjavík: Menntamálaráðuneytið. Sótt 4. október 2009 af <http://bella.mrn.stjr.is/utgafur/AFstaerdfraedi.pdf>
- Anna Bergros Arnarsdóttir. (2010). *Fagmenntun og viðhorf stærðfræðikennara á Akureyri til stærðfræði og stærðfræðikennslu.* Lokaverkefni til M.Ed. gráðu. http://skemman.is/stream/get/1946/5630/2/meistarritgerd010210-Anna_Bergros3.pdf
- Boaler, J. & Humphreys, C. (2005). *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching & Learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

- Carpenter, T.P., Franke, M.L. og Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically.* Portsmouth, NH: Heinemann.
- Friðrik Diego og Kristín Halla Jónsdóttir. (1992). *Könnun á stærðfræðigetu fyrsta árs kennaranema í Kennaraháskóla Íslands í janúar 1992.* Skýrslur rannsóknarstofnunar Kennaraháskóla Íslands, Nr. 1.
- Gresham, G. (October 2007). A Study Of Mathematics Anxiety in Pre-Service Teachers. *Early Childhood Education Journal.* 35(2):181. Sótt 30 mars 2009 af <http://www.springerlink.com/content/kh78506n203292j2/fulltext.pdf>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. og Finell, B. (ritstjórn). (2001) *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.
- Krauss, S., J. Baumert & W. Blum, in print. Secondary Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge: Validation of the COACTIVE Constructs.
- Menntamálaráðuneytið. (2005). *Menntun kennara í stærðfræði- og náttúrufræðigreinum í grunn- og framhaldsskólum 2003–2004.* Reykjavík. Sótt 21. september af <http://bella.mrn.stjr.is/utgafur/skyrslakennara.pdf>
- Námskrá handa framhaldsskólum: Námsbrautir og áfangalýsingar.* (1990). 3. útgáfa. (1. útg. 1986). Reykjavík: Menntamálaráðuneyti, skólamála-skrifstofa.
- Niss, M og T.H. Jensen. (2002). *Kompetancer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Kaupmannahöfn: Undervisningsministeriet. Sjá einnig <http://www.nyfaglighed.emu.dk/kom>.
- Pehkonen, E., M. Ahtee og J. Lavonen. (2007). *How Finns learn mathematics and science.* Rotterdam: Sense publishers.
- Shulman, L.S., 1986. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.



Spjallað við höfund GeoGebru

Á dögunum (12. til 14. ágúst) var haldin ráðstefna í Reykjavík um kvika stærðfræðiforritið GeoGebra. Lesendur Flatarmála gætu kannast við forritið því um það birtist umfjöllun í öðru tölublaði síðasta árs. Á ráðstefnunni voru um 80 manns, bæði kennarar í grunn- og framhaldsskólum og fræðimenn við háskóla. Meðal gesta var Markus Hohenwarter, höfundur forritsins, og var hann tekinn tali af því tilefni. Markus er 34 ára kennari við Háskólann í Linz í Austurríki. Hann er kvæntur og á fimm mánaða dóttur þegar viðtalið er tekið.

Hvað varð til þess að þú hófst að skrifa GeoGebra, þegar þú varst meistara-nemi? - Ég hafði séð önnur forrit eins og Cabri og fleiri rúmfræðiforrit og líka reikniforrit eins og Derive. Gallinn við þessi forrit er sá að þau tengja ekki saman rúmfræði og algebru. Í sumum forritum var hægt að slá inn formúlu og fá teikningu í hnitakerfi en það var engin leið að eiga við teikninguna sjálfa, þú gast bara breytt henni með því að breyta formúlunni sjálfri. Í hinu gat maður gert rúmfræðiteikningar en ekki reiknað eða átt við jöfnurnar sem lýstu hlutunum á myndunum.

Skipti máli að forritin voru ekki ókeypis? - Ég gerði þetta ekki vegna þess. Flest forritin voru ókeypis í Austurríki þar sem yfirvöld höfðu keypt leyfi á þau forrit sem ekki voru hvort

sem er ókeypis fyrir alla. Þetta snerist um að gera forrit sem gerði hluti sem hin forritin gátu ekki gert, nefnilega að tengja rúmfræði og algebru og hafa kvik tengsl þar á milli. Hitt er annað mál að nú til dags er yfirleitt boðið upp á einhver slík tengsl í öllum þessum forritum. En þau eru ekki hugsuð þannig frá upphafi, heldur sem annað hvort rúmfræðiforrit eða reikniforrit.

Hvernig sérðu fyrir þér að Geogebra geti haft áhrif og stuðlað að framförum í skólum? Það hafa áður vaknað vonir um slíkt sem lítið hefur orðið úr. Hvað er öðruvísi við GeoGebra en til dæmis Logo sem sumir bundu miklar vonir við en hafði lítil áhrif? - Ég held aðallega að nú séu aðrir tímar og það kemur GeoGebra í sjálfu sér ekki við. Tölvur eru miklu ódýrari og útbreiddari: Þær eru náttúrulegur hluti af lífi nemenda. Þeir leika sér í tölvum, senda tölvupósta, eru á Facebook, skrifa ritgerðir og margt fleira í daglegu lífi. Og nýjustu kynslóðir farsíma eru ekkert annað en tölvur. Miklu auðveldara er að deila efni og forritum nú en áður eftir tilkomu og útbreiðslu netsins. Því ætti að vera auðveldara að nota svona hugbúnað í skólum þó að hugmyndirnar að baki séu orðnar nokkuð gamlar. Svo má líka nefna notendasamfélagið um forritið. Það er mjög mikilvægt að hafa stuðning annarra notenda. Kennarar geta fengið hjálp og leiðsögn og deilt reynslu og efni.

Hvaða hindranir eru helstar í vegi fyrir því að forritið nái útbreiðslu og sé notað með góðum árangri? - Kennarar. (Hlær.)

Hvað með lokapróf? Það var nefnt á ráðstefnunni að svo lengi sem loka-prófin eru skrifleg á pappír sé gildi forritsins takmarkað því nemendur vilji aðallega æfa sig í því sem kemur á prófi. - Þetta er í raun pólitísk ákvörðun. Viljum við upplýsingatækni í skólunum? Það er ekki endilega þannig. Sumstaðar er stuðningur, annars staðar ekki og þá er annað hvort ekkert gert eða jafnvel unnið á móti. Í Noregi er notkun kvikra rúmfræðiforrita komin inn í námskrá svo þar er auðvelt að sannfæra skólustjóra og kennara um að nota þau. En lokaprófin eru stóra málið. En ég held að þau muni breytast og færast meira inn í tölvur að minnsta kosti að hluta.

Gefur Geogebra færi á því að nemendur verði meira skapandi í stærðfræði? - Já! Forritið var alltaf hugsuð sem tól til að smíða líkön. En stundum, sérstaklega á yngstu stigum, eru kennarar vanir mjög tilbúnu kennslu-efni. Þeir ætlast oft til þess að hugbúnaðurinn sé einhver leikur, eða eitthvað slíkt, þar sem nemendur geta æft sig í einhverju tilteknu eða prófað einhverja takmarkaða möguleika. Þeir eru ekki vanir að hafa í höndunum tól sem hægt er að nota frjálst til að skapa stærðfræðilega hluti sjálfur. En GeoGebra getur líka virkað fyrir þessa kennara vegna þess að það er hægt að búa til (og er þegar til í miklu magni) tilbúið og stýrt efni. Svo hugbúnaðurinn hentar bæði þeim sem vilja vinna á skapandi hátt með öflugum tækjum og þeim sem vilja hafa stjórn á hlutunum.

Er Geogebra þá bæði tól til þess að kenna gömlu hlutina betur og tól til að kenna betri hluti? - Já, og það þarf að vera bæði - þetta er ekki bylting heldur þróun! Það er óraunhæft að gera ráð fyrir að hægt sé að gjörbreyta allri kennslu. Við verðum að styðja þá sem vilja halda áfram að kenna í sama anda

og þeir hafa gert og þekkja og hjálpa þeim að gera aðeins betur, gefa þeim tæki til að sýna nemendum hluti myndrænt til dæmis. Svo vonum við að þeir fari að prófa sig áfram. Þegar við höfum kannað hvernig kennarar nota forritið hefur komið í ljós ákveðið mynstur. Fyrst nota þeir forritið fyrir sjálfa sig til að undirbúa sig og prenta út verkefni og vinnublöð. Næst nota þeir það við kennslu, með skjávarpa til dæmis, til að sýna nemendum eitthvað. Og að síðustu fara þeir að leyfa nemendum sjálfum að nota það. Þetta er löng leið en það verður að byrja á byrjuninni!

Er einhver hættu á því að nemendum með veikari grunn þyki forritið jafnvel gera sér erfðara fyrir? Ég er sérstaklega að hugsa um eldri nemendur sem hafa ekki vanist því að nota svona hugbúnað. „Stærðfræðin er nógu erfð eins og er. Af hverju ertu að koma með þetta til að flækja málin,“ gætu þeir sagt. Þurfum við ekki að byrja strax með yngstu börnin svo þau venjist því að nota svona forrit?

- Já, þetta þarf ekki að koma á óvart. Það hefur alltaf verið svo með hluta nemenda að þeirra eina von til að komast í gegnum stærðfræðina er að reikna eftir tilbúnum uppskriftum. Þegar við tökum uppskriftirnar af þeim og látum þá fá opin verkefni sem þeir hafa ekki séð áður, lenda þeir auðvitað í vandræðum. Það er rétt að það er best að byrja snemma. Það er ekki bara hægt að mæta einn daginn í 10. bekk með forritið og byrja á fullu því margir nemendur þar skilja ekki undirstöðuatriðin. Þetta væri bara of mikið fyrir þá.

Stundum heyrir maður raddir sem segja eitthvað á borð við: „Börnin verða að læra að reikna. Tölvurnar eiga ekki að reikna fyrir þau. Því stærðfræði er reikningur, deiling upp á striki og þess háttar. Það má ekki verða útundan.“ Hefur þú orðið var við þetta? - Ég held að þetta sé ekki svo mikið vandamál með GeoGebra því það

er fyrst og fremst litið á það sem tæki til myndrænnar framsetningar. Menn sjá það ekki svo mikið sem reiknivél þó að það geti auðvitað reiknað alla þessa hluti. Við heyrum þetta ekki mikið. En þetta vísar auðvitað alltaf aftur að þessari grunnspurningu: Hvað er stærðfræði og hvað ættu nemendur að læra í stærðfræði í skólanum? Við erum á þeirri skoðun að það sé ekki bara reikningur. Auðvitað ættu nemendur að læra að reikna líka en aðalatriðið í stærðfræði er að útskýra hvers vegna eitthvað er eins



og það er. Og ég held að það sé að færast í þá átt. Í flestum nýjum námskrám út um heiminn er meiri áhersla á þetta: Stærðfræði snýst um að útskýra, tjá sig, geta notað þekkinguna en ekki bara að reikna stöðluð verkefni. Ég held að að tæknin geti nýst til að styðja svona stærðfræðilega hugsun.

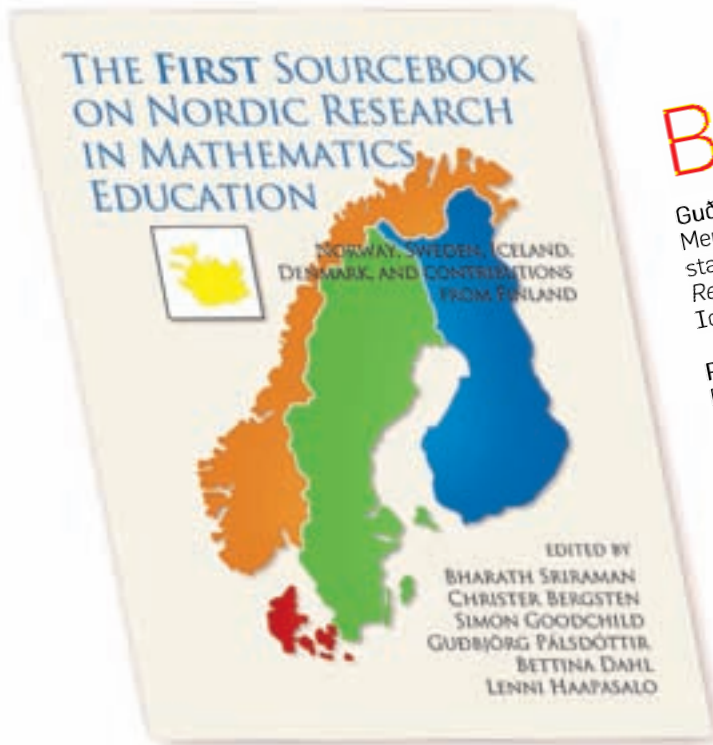
Viltu segja eitthvað að lokum um þau vandamál sem við er að glíma í stærðfræðimenntun? - Já, mig langar að minnast á gjána milli heims háskólanna og heims grunn- og framhaldsskóla. Það er einhverskonar sambandsleysi milli þeirra sem vinna að rannsóknum í háskólum og við kennaranám annars

vegar, og kennara í skólum hins vegar. Þetta er eitthvað sem við erum að reyna að yfirvinna. Ég held að GeoGebra sé ein góð leið til að brúa þetta bil. Auðvitað þyrfti að gera miklu fleira og meira en forritið býður upp á mjög náttúrulega leið því það er mjög haldfast og ákveðið tól. Hægt er að sýna kennurum hluti sem gera má með því, deila með þeim kennslufni, og þeim finnst það yfirleitt gagnlegt og geta notað það. Svo er það líka áhugavert fyrir háskólafolk sem vill rann-

saka notkun hugbúnaðarins og vinna með kennurum. Það er mjög mikilvægt fyrir okkur. Og við þurfum þetta samfélag um hugbúnaðinn svo það verði framfarir í báðum þessum heimum. Háskólafolk getur lært af þeim sem vinna í grunn- og framhaldsskólum, hvaða vandamál koma upp við að nota forritið, og kennarar fá innsýn í rannsóknir og þekkingu sem er góð viðbót við persónulega reynslu þeirra. Það er gott að læra af eigin reynslu en það er líka gott að læra af reynslu

annarra. Það er það sem rannsóknir snúast um. Við söfnum reynslu alls staðar að sem fræðimenn en það er þetta samskiptavandamál milli þessara hópa sem þarf að leysa. Og ég held að ráðstefnur eins og þessi sé gott dæmi um það hvað hægt er að gera því hér eru bæði kennarar og háskólafolk. Venjulega gengur illa að ná þeim hópum saman. Og folkið hérna talar mikið saman, ekki bara um forritið heldur um stærðfræðikennslu. Það er eitt það ánægjulegasta við þessa ráðstefnu.

Viðtal tekið af Ingólfi Gíslasyni, doktorsnema í stærðfræðimenntun við Háskóla Íslands.



Bókarkynning

Guðbjörg Pálsdóttir, lektor í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið HI, segir frá bók um norrænar rannsóknir á stærðfræðimenntun: *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education - Norway, Sweden, Iceland, Denmark and contributions from Finland*

Ritstjórar:
 Bharath Sriraman, Háskólanum í Montana, Bandaríkjunum
 Christer Bergsten, Háskólanum í Linköping, Svíþjóð
 Simon Goodchild, Háskólanum í Agder, Noregi
 Guðbjörg Pálsdóttir, Háskóla Íslands, Íslandi
 Bettina Dahl Söndergaard, Háskólanum í Arósum, Danmörku
 Lenni Haapasalo, Háskólanum í Austur-Finni

Útgefandi er IAP - Information Age Publishing, Inc.

Bók þessi er í flokknum *The Montana Mathematics Enthusiast: Monograph Series in Mathematics Education* og er Bharath Sriraman, prófessor í stærðfræðimenntun við háskólann í Montana ritstjóri þess bóka-flokks. Hann átti hugmyndina að þessari bók og fékk til liðs við sig norræna fræðimenn á sviði stærðfræðimenntunar. Bókin gefur góða innsýn í norrænar rannsóknir á sviðinu því margir af helstu fræðimönnum Norðurlandanna eiga kafla í bókinni. Hún er skipulögð þannig að hvert land fær sinn hluta þar sem ritstjóri í hverju landi hefur í samráði við aðalritstjóra safnað efni frá eigin landi. Bókin gefur góða mynd af þeirri flóru rannsókna sem gerðar hafa verið á Norðurlöndum á þessu sviði bæði hvað varðar viðfangsefni og rannsóknaraðferðir. Í þætti hvers lands er að finna kafla þar sem greint er frá sögu stærðfræðimenntunar en aðaláhersla er lögð á að greina frá nýlegum rannsóknum á ýmsum sviðum stærðfræðimenntunar. Bók þessi er mikil að vöxtum og hefur verið í smíðum í nokkur ár. Hún kom út í júlí 2010 og er til á bókasafni Menntavísindasviðs Háskóla Íslands, auk þess sem panta má hana hjá útgefanda.

Í bókinni eru yfir 50 kaflar, þar af eru 9 kaflar frá Íslandi. Hér verður íslenski hlutinn sérstaklega kynntur því mikilvægt er að íslenskir stærðfræðikennarar þekki hvað íslenskir rannsakendur eru að skrifa um. Aðrir hlutar bókarnnar eru ekki síður áhugaverðir fyrir Íslendinga því sameiginlegur menn-

ingararfur og samstarf Norðurlandanna gerir það að verkum að norrænar rannsóknir gefa innsýn í íslenskan heim stærðfræðimenntunar umfram rannsóknir frá öðrum löndum.

Upphafskafliinn í íslenska hlutanum byggir á samræðum aðalritstjórans, Bharath Sriraman, Guðbjargar Pálsdóttur, ritstjóra íslenska hlutans, og Guðnýjar Helgu Gunnarsdóttur lektors um stærðfræðimenntun á Íslandi og rannsóknir á henni. Þau telja að í íslenska hlutanum megi greina nokkra sameiginlega þræði:

- Sjónum er beint að kennurum og kennslu þeirra.
- Skoðað er hvað má læra af eigin kennslu og kennslu annarra.
- Kennaramenntunin er í þróun þar sem kennararnir eru að greina eigið hlutverk sem kennaramenntakennarar.
- Rannsakendur tengja við rannsóknir í öðrum löndum því lítið er til af íslenskum rannsóknum.

Með auknu framboði á framhaldsmenntun á háskólastiginu hefur rannsóknum á stærðfræðimenntun vaxið fiskur um hrygg. Anna Kristjánsdóttir prófessor vann á áttunda og níunda áratug síðustu aldar ótulllega að því að kynna fræðasviðið stærðfræðimenntun fyrir íslenskum kennurum og í nokkur ár

hefur verið í boði að taka meistaraáráðu hér á landi á því sviði. Hér á landi er því að verða til hópur rannsakanda á sviðinu og á hverju ári bætast fleiri meistarar við. Fáir hafa lokið doktorsgráðu en vonandi fer þeim fjölgandi á næstu árum.

Kristín Bjarnadóttir hefur skrifað kaflann *The history of public education in mathematics in Iceland and its relations to secondary education*. Í ágripi hennar kemur fram að hún byggir rannsóknir sínar á skoðun og greiningu á stærðfræðikennslubókum frá mismunandi tímum með hliðsjón af opinberum tilskipunum, lögum og reglugerðum. Danskar reglugerðir og danskir háskólar höfðu áhrif á hvaða áherslur voru lagðar í menntaskólum hér á landi en það hafði svo áhrif á námsefni á yngri stigum. Framboð af kennslubókum var takmarkað að mestu við útgáfu frá Ríkisútgáfu námsbóka. Kynning á nýju stærðfræðinni svokölluðu hafði mikil áhrif því stöðun hafði ríkt í stærðfræðikennslu um árabil. Nýlegar rannsóknir hafa leitt í ljós að margir íslenskir unglingar sýna frammistöðu sem er í meðallagi en fáir sýna mjög góða frammistöðu og að þörf er á fleiri stærðfræðikennurum með sérhæfða stærðfræðimenntun.

Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir skrifa í kaflanum; *Mathematics teacher education at Iceland University of Education: Recent development of mathematics education courses* um hvernig þær hafa unnið að þróun námskeiða á sviði stærðfræðimenntunar í kennaramenntuninni og tekið við það mið af rannsóknum á sviðinu. Á Menntavísindasviði hefur kennaramenntun verið að þróast í átt að meiri fag-

legri sérhæfingu þar sem kennaranemar eiga að efla þekkingu sína á stærðfræði samhliða því að byggja upp þekkingu sína á námi og kennslu í stærðfræði. Í ágripni sínu segja þær að rannsóknir á námi hafi í æ ríkara mæli beint sjónum að hlutverki kennara og áhrifum þeirra á nám barna. Á þeim grunni hafa verið þróaðar kenningar og gerðar rannsóknir á kennaramenntun. Þær greina frá rannsókn sinni á því hvernig þessar hugmyndir hafa haft áhrif á skipulagningu og inntak námskeiða og vettvangsnám.

Hafdís Guðjónsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Edda Óskarsdóttir segja frá rannsókn sinni á eigin kennslu á námskeiðinu *Stærðfræði fyrir alla* í kaflanum *Developing team-teaching through self-study*. Námskeiðið er kennt í framhaldsdeild Menntavísindasviðs HÍ. Þær hafa þróað og kennt þetta námskeið saman og samtímis gert rannsókn á hvernig námskeiðið hefur þróast. Stærðfræðimenntun og sérkennsla hefur þróast út frá ýmsum áhrifaþáttum og höfundar segja að sú ólíka þekking og reynsla sem þeir bera með sér inn í námskeiðið hafi gert kennarahópinn sterkari en einstaklingirnir eru sem mynda hópinn. Í kaflanum er sagt frá kennslunni og þeim ögrunum og hindrunum sem kennararnir mættu en tókust á við saman. Þeir hafa í samvinnunni skoðað mörg sjónarhorn á því hvernig kennarar og kennaranemar læra og hvernig þeir hafa brugðist við nemum sínum.

Í kaflanum *Teachers' development in mathematics teaching through reflective discussions* greinir Jónína Vala Kristinsdóttir frá rannsókn sinni á þróun starfs stærðfræðikennara. Kennararnir sýndu mikið frumkvæði og fengu Jónínu til liðs við sig eftir að hafa tekið þátt í stærðfræðikennaranámskeiði. Þá fór af stað kraftmikið þróunarstarf með áherslu á þróun stærðfræðilegs skilnings nemenda. Með stöðugri samræðu og ígrundun um lausnaleyndir nemenda sem og ígrundun um eigin kennslu byggðu kennarnir upp traust og gefandi starfsumhverfi byggt á rannsóknarmálun og skólaflokkum sem hvatti til krefjandi náms.

Katrín Friðriksdóttir og Sigrún Aðalbjarnardóttir skrifa kaflann, *Relating Life Story and Pedagogical Vision: A Teacher's Voice* sem byggður er á meistaraþrófsritgerð Katrínar. Sjónum er beint að tengslum milli líffssögu kennara og uppeldissýnar þeirra. Einum kennara, Mörtu, er fylgt og rannsakaðar eru hugmyndir hennar um kennslu, markmið hennar og kennsluáferðir. Skoðuð eru tengsl hugmynda og framkvæmda í kennslu.

Einnig er greint hvernig markmið hennar og kennsluáferðir tengjast hennar eigin lífi. Með því að skoða líffssögu kennara í tengslum við markmið og kennsluáferðir má öðlast dýpri skilning á uppeldissýn þeirra. Það má nota sem grunn til að styðja kennarana í starfsþróun sinni og í að þróa skólaflokkum.

Starfsþróun kennara er viðfangsefni Guðrúnar Angantýsdóttur í kaflanum *Professional development: How did teacher's participation in the professional development program influence their teaching practices?* Hér er sagt frá starfendarrannsókn þar sem sérfræðingur vann með kennurum á miðstigi. Kennararnir voru að glíma við að læra að nota nýtt námsefni í stærðfræði og Guðrún hafði áhuga á að skoða hvernig það gæti nýst þeim til að efla starfsþróun þeirra. Kennarar og rannsakandi skoðuðu saman hvernig kennarar tókust á við viðfangsefnið og lærðu bæði nýja stærðfræði og ný vinnubrögð við að kenna stærðfræði. Kennararnir þróuðu mismunandi kennsluáferðir og leiðir til að ígrunda kennslu, gera athuganir og meta eigin kennslu og annarra. Niðurstöður benda til

byggingu kennslustunda og hins vegar áferðir frá stóru samanburðarrannsókninni *Learner's Perspective Study* til að rannsaka ólík samskipti og kennslu sem kennarar nota til að ná markmiðum sínum. Niðurstöður benda til ákveðins munar milli landanna. Í Finnlandi fylgja kennslustundirnar uppbyggingu; upprifjun - bein kennsla - æfingar, meðan byggt var á einstaklingsbundnu námi í meira en helmingi íslensku kennslustundanna. Þá er því stundum sleppt að fara í sameiginlega þætti. Þetta er í mótsögn við finnsku kennslustundirnar þar sem áhersla er lögð á kennarastýrð verkefni með þátttöku nemenda.

Síðasti kaflinn í íslenska hluta bókarinnar fjallar um rannsókn á nýju námsefni fyrir unglingastig. Þar skrifa höfundar náms-efnisins *8-Tíu*, Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, um greiningu sína á hvernig þeir sjá áferðamarkmið aðalnámsskrár birtast í námsefninu. Á þessari öld hefur verið að koma út nýtt námsefni frá Námsgagnastofnun þar sem mið er tekið af *Aðalnámsskrá grunnskóla – stærðfræði* (1999). Í þeirri námskrá eru mörg nýmæli og miklar breytingar eru gerðar á áherslum í



MISSOULA, MONTANA Bharath Sriraman, prófessor í stærðfræðimenntun við háskólann í Montana, og Guðbjörg Pálsdóttir, lektor í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið HÍ, en þau eru meðal ritstjóra bókarinnar.

að kennararnir telja þetta gefandi leið og gagnlega til að læra nýjar áferðir í kennslu og að þeir telja að þeir hafi vaxið sem kennarar.

Lasse Savola gerði í doktorsverkefni sínu samanburðarrannsókn á stærðfræðikennslu í Finnlandi og á Íslandi. Í kaflanum *Structures of Finnish and Icelandic Mathematics Lessons*, skrifar hann um rannsókn sína sem hann byggði á myndbandsupptökum úr 40 finnskum og íslenskum kennslustundum. Við gagnagreiningu notaði hann annars vegar áferð sem þróuð er út frá hugmyndum sem notaðar voru í TIMSS myndbandsrannsókninni árið 1999 til að skoða upp-

stærðfræðinámi og gert ráð fyrir að nemendur byrji yngri að fást við ýmis viðfangsefni úr fjölbreyttum þáttum stærðfræðinnar. Sett eru fram í fyrsta sinn áferðamarkmið og það var mikil ögrun fyrir höfunda að finna góða leið til að kennarar gætu unnið að þessum markmiðum með nemendum sínum. Því þótti mikilvægt að beina sjónum að því hvernig greina mætti áhrif þeirra í námsefninu.

Teiknum, reiknum & rímum

Ingólfur Gíslason,
doktorsnemi í
stærðfræði-
menntun við HÍ,
spjallar um list &
stærðfræði

*Myndlist er fleira en að teikna.
Stærðfræði er fleira en að reikna.*

Stærðfræði er ekki um handfasta hluti heldur um vensl, mynstur og lögmál almennt. Aðferðir hennar má nota til að rannsaka og skapa bæði líkön og framsetningar á raunverulegum aðstæðum (eins og gert er í vísindum) en einnig á í-mynduðum heimum. Stundum er sagt að stærðfræði sé list eða þeir sem vilja vera varkárari í orðum gætu sagt að hrein stærðfræði og list séu í það minnsta skyld fyrirbæri. Einhvern mun er þó hægt að gera þar á, til dæmis er í stærðfræði lögð áhersla á röklegt samhengi og yfirleitt eru notuð ták- og hugtakakerfi sem eiga sér langa sögu svo sem talnakerfi, algebra, föll og margt fleira.

Stærðfræði nýtist einnig við hversdagslegri verk en þó eigum við stundum til að fella óþarflega margt undir slíka notkun. Ef „allt er stærðfræði“ þá hefur orðið ekki lengur neina merkingu. Það getur líka verið gagnlegt að gera greinarmun á fyrirbæri annars vegar og hins vegar leiðum til að horfa á og skilja fyrirbærið. Því mörgum hlutum og ferlum má lýsa með stærðfræði en það er ekki þar með sagt að þeir „séu stærðfræði“. Til dæmis er stærðfræði notuð til að lýsa og greina flæði loftis þegar flugvélar eru hannaðar og veðurspár gerðar en það væri full mikið sagt að það sé stærðfræðin sem kæli á manni eyrun þegar vindurinn hvín.

Margir listamenn hafa lengi nýtt sér stærðfræði við sköpun sína. Einnig hafa stærðfræðingar rýnt í listaverk með gleraugum greinarinnar í jafn langan tíma. Sjá má stærðfræði í íslamskri skreytingalist (sjá mynd 1) og í hefðbundnum málverkum og teikningum (sjónarhorn) en auk þess eru allar nútíma teiknimyndir og tölvuleikir unnir með tólum og tækjum stærðfræðinnar. Jafnvel mætti segja að í stað þess að vera málaðir með olíu á striga séu þeir málaðir með stærðfræði á skjá. Þó eru

þessi þrjú dæmi þess eðlis að listamennirnir þurfa í sjálfu sér ekki að þekkja til stærðfræði sem fræðigreinar til að geta unnið. Á síðustu árum hafa opnast nýir möguleikar til listsköpunar fyrir þá sem kunna svolítið í stærðfræði eða hafa tamið sér að hugsa stærð-

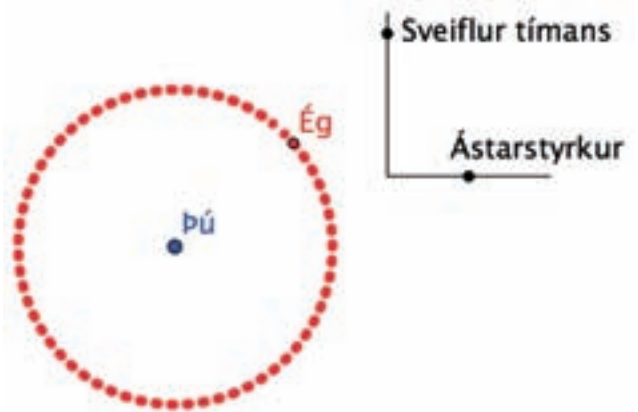
fræðilega. Ég á við ýmis konar hugbúnað sem hægt er að nota til að búa til kvikar (eða staðar) myndir. Önnur forrit gefa færi á að vinna með mikið magn upplýsinga og nýttast því til að skapa list og kalla má upplýsingalist (e. information arts).

Sú stærðfræði sem notuð er til að vinna með myndir byggir á hugmyndinni um hnitakerfi og færslur. Mynd á tölvuskjá er ekki annað en punktar í hnitakerfi og öllum hreyfingum punkta á skjánum er lýst með færslum. Þeir sem hafa gott vald á þessari stærðfræði geta búið til myndir og hreyfimyndir af miklu frelsi. Eitt dæmi um notkun væri að búa til hreyfimyndljóð. Ég tek það sem dæmi vegna þess að ég hef áhuga á slíkum hlutum og vegna þess að myndlistin sjálf þarf ekki að

vera mjög flókin. Aðalatriðin eru orð, hugmyndir og vensl. Ég bjó til eitt einfalt dæmi með GeoGebra, Hringást (sjá mynd 2). Þeir sem vilja prófa það geta farið á slóðina ismennt.is/lovepoem.html. Þar má sjá tvo punkta. Annar þeirra er upphafspunktur hnitakerfisins, (0,0) en hinn er á hringhreyfingu og notandinn (lesandinn) getur haft áhrif á geisla hringferilsins. Til þess að gera þetta þarf einungis að skilgreina punktin á hringnum með hinum sívinsælu hornaföllum kósínus og sinus.



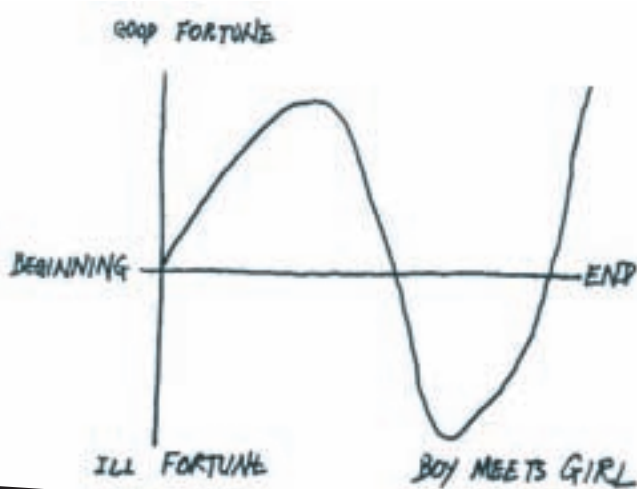
Mynd 1 Íslamskt samhverfumynstur.



Mynd 2 Hringást, ástarljóð.

Í þessari stuttu grein verður ekki gerð nein fullnægjandi grein fyrir notkun stærðfræði í listum en það er gaman að gefa nokkur sýnishorn af stærðfræðilegum afurðum þekktra rithöfunda. Um það má deila að hve miklu leyti um raunverulega stærðfræði er að ræða en hafið er yfir vafa að hugtökin eru stærðfræðileg.

1) Kurt Vonnegut (1922-2007) var bandarískur höfundur, frægur meðal annars fyrir bókina *Slaughterhouse-Five*. Hann lýsti stundum sögum með ferlíteikningum. Mynd 3 er fengin úr bókinni *A Man Without a Country* og sýnir sögu með ferlíteikningu.



Mynd 3 Ferlíteikning Vonneguts sem lýsir ferli í dæmigerðri ástarsögu.

2) Lev Tolstoj (1828-1910) var heimsfrægur rússneskur rit höfundur. Þekktustu verk hans eru *Anna Karenina* og *Stríð og Friður*. Hann hafði mikinn áhuga á að nota stærðfræði til að skilja sögulega framvindu og setti fram þá skoðun í *Stríði og Friði* að söguna þyrfti að rannsaka með tölfræði og stærðfræðigreiningu. Ekki sem röð einstakra atvika heldur sem samfellu – sem einskönar óendanlega summu af óendanlega smáum stærðum. Hann notaði gjarnan stærðfræðilegt tungutak til að lýsa hlutum:

Manneskja er eins og hlutfall, þar sem teljarinn er það sem hún er, en nefnarinn er það sem hún heldur að hún sé. Því stærri sem nefnarinn er, því minna er hlutfallið.

Ef til vill mætti ræða þessa kenningu við nemendur.

3) Í sama anda mætti nefna lítt þekktan brandara í boði Jane Austen. Titill bókar hennar *Emma* vísar nefnilega til hlutfallsins M/A sem átti samkvæmt heimspekingi að nafni Francis Hutcheson að lýsa dyggð manneskju, þar sem A táknar fullkomna dyggð, en M dygdugleikann sem manneskjan nær í raun og veru. Og tiltekin manneskja nær fullkomnun þegar $M = A$ (“Emm-a”).

4) Að lokum nefnum við frönsku bókmenntahreyfinguna OULIPO. Georges Perec, Raymond Queneau og félagar lögðu kapp á að finna upp ýmsar stærðfræðilegar leiðir til að búa til ljóð. Ein afurða Queneau er ljóðabókin *Hundrað þúsund milljarðar ljóða* (Cent mille milliards de poèmes). Hún er þannig gerð að í henni eru tíu sundurskornar „blaðsíður“ og hver blaðsíða inniheldur fjórtán línur. Sonnetta er fjórtán línur og lesandinn velur línurnar: Tíu möguleikar eru í hverri af línunum fjórtán. Þannig fást 100.000.000.000.000 mögulegar sonnettur, allar rétt rímaðar með viðeigandi fjölda atkvæða (sjá mynd 4).

Önnur OULIPO hugmynd, sem þeir nefna $S+7$, er á eftirfarandi hátt. Taktu bók og hafðu orðabók tiltæka. Skiptu hverju nafnorði út fyrir það nafnorð sem er sjöunda nafnorðið frá upphaflega orðinu í orðabókinni.

Endum þessa stuttu grein á umbreyttu upphafi *Bréfs til Láru* eftir Þórberg Þórðarson:

*Mín góða og skemtilega vinmenning!
Gegnumskýrður af heilagri inneign sem blóðpeningar í blásturshljóðfæri, titrandi af hamstola lygamerði, vaggandi af ómþýðu ennisbeini, er til mín hljóma gegnum gengjur og öreyður vorrar vesölu jastar, tvihendi ég penpiuna þér til dýrlings, þér til eilífs dýrlings og veiði, andlegrar umvendingar, sálumessu og syndikalisma, hvar af þú ljómar og forklárast eins og sólbakað saltket frammi fyrir lambagrassins stólpaský.*

Útgáfa Þórbergs er hins vegar svohljóðandi:

*Mín góða og skemtilega vinkona!
Gegnumskýrður af heilögum innblæstri sem blóðmörskpeppur í blásteinslegi, titrandi af hamstola lyftingu, vaggandi af ómþýðum englaröddum, er til mín hljóma gegnum gengishrun og öreigaóp vorrar vesölu jarðar, tvihendi ég pennastöngina þér til dýrðar, þér til eilífrar dýrðar og vegsömunar, andlegrar umturnunar sálhjálpur og syndakvittunar, hvar af þú ljómar og forklárast eins og sólbakaður saltfiskur frammi fyrir lambsins stól.*

(Þórbergur Þórðarson; 1950).



Mynd 4 Ljóðabókin *Hundrað þúsund milljarðar ljóða* eftir Raymond Queneau.

Notkun Geogebra við kennslu

Forritið Geogebra hefur notið nokkurra vinsælda að undanfögnu. Þar ræður ef til vill miklu að forritið fæst frítt á netinu og er vandað. Þar sem ég er tölvuáhugamaður og lærður stærðfræðikennari varð ég strax hrifinn af þeirri hugmynd að nota forritið í stærðfræðikennslu. Varð því lendingin að vinna meistara-verkefni þar sem markmiðið var að rannsaka hvaða áhrif kvika rúmfræðiforritið Geogebra getur haft á skilning unglunga á þríhyrningum.

Tvær stúlkur úr 8. bekk tóku þátt í rannsókninni og unnu verkefni í forritinu. Rannsóknin var eigindleg og byggðist á því að taka viðtöl við þátttakendur og fylgjast með þeim við verkefnavinnu sína. Rannsóknin byggðist ekki á að þátttakendur lærðu á forritið eða að skoða hvernig þeir lærðu á það heldur var fylgst með því hvort og við hvaða aðstæður skilningur þeirra á þríhyrningum jókst þegar þeir unnu að verkefnum með aðstoð forritsins.

Til eru ýmsar gerðir kvikra rúmfræðiforrita og má þar nefna auk Geogebra forritin *Geometer's Sketchpad* (KCP Technologies, 2008) og *Cabri* (Cabrilog, 2009). Öll eiga þessi forrit það sammerkt að vera öflug tól til að vinna með rúmfræði og stærðfræði almennt. Forritin eru hönnuð sem kennsluforrit þar sem hægt er að teikna það sem mann lystir og sjá um leið á einfaldan hátt svör við atriðum sem undir venju-



ÞORSTEINN KRIST- JÁNS JÓHANSSON, M.ED Í NÁMS- OG KENNSLUFRÆÐI STÆRÐFRÆÐI- MENNTUNAR

legum kringumstæðum væri seinlegra að reikna í höndunum, til dæmis hornastærðir, lengdir lína, staðsetningu punkta, línulegar jöfnur og flatarmál svo fátt eitt sé nefnt. Oftast er byrjað á því að búa til punkta á hnit og nota þá til að skilgreina nýja hluti eins og línur, hringi eða aðra punkta. Síðan er hægt að færa til punkta, línur eða form og skoða hvaða breytingar eiga sér stað. Með þessu opnast sá möguleiki að prófa sig áfram um leið og forritið uppfærir allar upplýsingar. Í þessari rannsókn er rannsakað hvernig skilningur á

þríhyrningum og ýmsum hugtökum sem tengjast þeim þróast fyrir tilstilli kennslu þar sem kvika rúmfræðiforritið Geogebra er notað.

Þróun rúmfræðihugsunar

Svissnesku sálfræðingarnir Piaget (1896-1980) og Inhelder (1913-1997) settu fram tvær áhrifamiklar kenningar um nám barna í rúmfræði. Í fyrsta lagi töldu þeir að börn lærðu á rúmfræðilegt umhverfi sitt með því að þreifa á því og prófa sig áfram. Ekki væri nóg að láta þau þekkja form á myndum heldur þyrftu þau að fá að handfjatla formin til að skilja þau betur. Þau þyrftu einnig að fá að prófa sig áfram með að skoða eðli formanna, til dæmis með því að sjá að hægt er að skipta ferhyrningi í tvo þríhyrninga. Tilfinning fyrir eðli formanna yki líkurnar á að rúmfræðiskilningur barna þróaðist hraðar og betur. Í öðru lagi mótist rúmfræðilegar hugmyndir í rökréttri röð, það er að segja skilningur á hugtökum og formum verði til, sem leiðir af sér skilning á eðli þeirra (Clements, 2003). Dæmi um slíkt er þegar nemandi lærir fyrst að þekkja þríhyrninga frá öðrum formum og í framhaldi af því að greina mismunandi gerðir þríhyrninga í sundur.

Hjónin Pierre og Dina van Hiele komu fram með aðra áhrifamikla kenningu um þróun rúmfræðihugsunar sem byggir á kenningum Piaget og Inhelder. Þau segja að rúmfræðiskilningur þróist eftir ákveðnum stigum þar sem skilningur eykst og verður dýpri með hverju stigi (Clements, 2003):

1. **stig** er *hlutbundið/sjónrænt stig* þar sem nemandur geta greint í sundur helstu form en geta ekki séð þau fyrir sér í hугanum. Þeir hugsa ekki um eðli eða eiginleika formanna heldur tengja þau við hluti sem þeir þekkja fyrir, til dæmis er ferhyrningur eins og hurð, hringur eins og diskur, þríhyrningur eins og þak. Þessi tenging við hluti úr lífi nemandans getur orsakað það að hann segi að óreglulegur fer-

hyrningur sé ekki ferhyrningur því hann lítur ekki út eins og hurð.

2. **stig** er *lýsandi/greinandi stig* þar sem nemendur þekkja í sundur form og flokka þau eftir eiginleikum þeirra. Nemendur á þessu stigi fá skilning á eiginleikum forma með því að skoða þau, mæla, teikna og búa þau til. Þeir uppgötva að fleiri en ein gerð forms getur fallið undir sama flokk, til dæmis að tveir rétthyrningar með mismunandi hliðarlengdir eru báðir rétthyrningar þó þeir séu ekki nákvæmlega eins. Nemendur á þessu stigi geta hins vegar ekki greint form í undir- og yfirflokk. Þeir gætu til dæmis haldið því fram að rétthyrningur sé ekki ferhyrningur því að hornin í ferhyrningi eru ekki alltaf 90°. Margir nemendur ná þessu stigi ekki fyrr en á miðstigi grunnskóla eða jafnvel unglingsstigi ef þeir ná því á annað borð.
3. **stig** er *óhlutbundið/tengingarstig* þar sem nemendur geta skilgreint form og aðgreint þau eftir mismunandi eiginleikum. Þeir geta rökstutt flokkun sína, til dæmis að hægt sé að flokka ferning sem tígul þó svo ferningurinn hafi fleiri eiginleika. Þeir geta uppgötvað eiginleika eins flokks út frá öðrum. Dæmi um slíkt er þegar viðkomandi veit að hornasumma þríhyrnings er 180° sem leiðir af sér að í ferhyrningi eru hornin samtals 360° vegna þess að hægt er að skipta öllum ferhyrningum í tvo þríhyrninga með því að draga línu frá einu horni yfir í mótlægt horn. Á þessu stigi geta nemendur ekki notað röksemdafærslur við rúmfræðilegar sannanir.
4. **stig** þýðir að nemendur þekkja mismuninn á skilgreiningum og frumsemdum Evklíðs og hafa getu til þess að búa til sannanir sem byggðar eru á röksemdarfærslum á því sem er gefið.

Í kenningum van Hiele er að finna kennslulíkan sem byggist á því að hjálpa nemendum að komast frá einu van Hiele stigi til annars í fimm skrefum. Hlutverk kennarans felst í því að bera fram hugmyndir og leiða síðan nemendur áfram í eigin þekkingarleit (Clements, 2003):

1. **skref.** *Upplýsingar.* Kennarinn ber fram hugmyndir til nemenda til að vinna úr.
2. **skref.** *Vörðuð þátttaka.* Kennarinn er þátttakandi í að skoða hluti með nemendum og leggur til málanna atriði sem hjálpa þeim að sjá tengingar og eiginleika viðfangsefnisins.
3. **skref.** *Tenging hugtaka.* Kennarinn hjálpar nemendum að koma auga á hvaða hugtök þeir nota við að lýsa formum og leggur inn stærðfræðileg hugtök. Dæmi um slíkt er ef nemandi bendir á horn fernings og segir að formið hafi fjóra kanta þá bendir kennarinn á að nemandinn hefði notað orðið kantur um það sem er kallað horn.
4. **skref.** *Sjálfstæð vinna.* Kennarinn leggur fyrir rúmfræðiverkefni sem hægt er að leysa á margvíslegan hátt og gefur fyrirmæli um að nemendur megi nota margar leiðir og hvetur þá til að skýra frá niðurstöðum sínum og leiðum. Með þessu fá þeir þjálfun í að koma auga á eiginleika þess sem unnið er með og hugtakaskilningur eflist.
5. **skref.** *Samþætting.* Kennarinn hvetur nemendur til að ígrunda rúmfræðiþekkingu sína með áherslu á að þeir setji svar sitt fram skipulega og stærðfræðilega. Þannig styrkjast þeir í þekkingu sinni og fá dýpri skilning á því sem þeir vita nú þegar. Þegar þessu skrefi er lokið eiga nemendur að hafa komist yfir á næsta stig.

Kenningar van Hiele voru notaðar til grundvallar í rannsókn minni. Greining fór fram á þátttakendum til að sjá á hvaða Hiele stigi þeir voru og síðan voru Hiele skrefin notuð við undirbún-

ing allra verkefna. Áður en fjallað verður um verkefnið er mikilvægt að skoða nokkur atriði sem komu fram í rannsóknum á hegðun nemenda þegar þeir nota rúmfræðiforrit.

Nokkur atriði sem kennarar þurfa að íhuga

Kvik rúmfræðiforrit hafa verið rannsókuð á ýmsan hátt, til dæmis hafa mismunandi gerðir kvikra forrita verið borin saman. Rannsakað hefur verið hvernig þau eru nýtt við nám og kennslu og hvaða áhrif þau hafa á nám nemenda (Sinclair, 2003). Hægt er að nýta forritin á ýmsa vegu en algengast er að teikna form, myndir og gröf eða þá að nota svokallað *drag mode* sem hér verður kallað dragleið en sú leið er talin vera helsti kostur kvikra rúmfræðiforrita. Dragleiðin byggist á því að til dæmis punktur eða lína er dregin til og fylgst með hvernig formin og upplýsingar breytast. Hafa ber í huga að dragleiðin hentar ekki öllum því að nemendur geta átt það til koma ekki auga á eiginleikana heldur líta einungis á þetta sem leið til að breyta formum. Dæmi um slíkt er þegar viðkomandi minnkar hæðina í jafnarma þríhyrningi. Þá sér hann ef til vill eingöngu þríhyrninginn minnka en kemur ekki auga á það að grunnlínuhornin eru alltaf jafnstór. Í rannsókn sem Arzarello og samstarfsmenn hans gerðu (1998) er þrem mismunandi gerðum dragleiða lýst og koma þær oftast en ekki hvor á eftir annarri. Fyrst er notuð svokölluð stefnulaus dragleið (*wandering dragging*) þar sem notandinn dregur tilviljanakennt án þess að hafa neitt sérstakt markmið í huga. Síðan kemur dragprófun (*dragging test*) þegar notandinn er að ganga úr skugga um hvað sé draganlegt. Þegar notandinn hefur farið í gegnum fyrstu tvær dragleiðirnar fer hann að nota stefnufasta dragleið (*lieu muet dragging*). Á þessu stigi er hann að draga eitthvað markvisst til að fylgjast með hvað breytist eins og til dæmis að draga punkt á línu til þess að fylgjast með hvernig hliðarlengdir eða horn breytast (Hollebrands, 2007). Kennarar þurfa því ekki að ör-

vænta þó nemendur byrji ekki samstundis að nota stefnufasta dragleið því það er eðlilegt að byrja á stefnulausri dragleið. Sumir nemendur geta jafnvel verið heila kennslustund að átta sig á grunnvirkni forritsins og varla hægt að ætlast til þess að þeir geti unnið markvisst að lausnum verkefna meðan þeir eru að ná tókum á forritinu.

Við notkun kvikra rúmfræðiforrita er talin ein besta leiðin til að fylgjast með hugsanaferli nemendanna og hver skilningur þeirra er á ákveðnu rúmfræðifyrirkæri að láta þá nota stefnuföstu dragleiðina og fylgjast með þeim ásamt því að spyrja spurninga sem krefjast þess að þeir greini og ígrundi það sem þeir eru að gera. Til að auka líkurnar á því að þeir noti þessa leið þarf að skipuleggja vel kynningu á viðfangsefninu og hjálpa þeim að koma auga á það sem á að greina (Sinclair, 2003; Laborde, Kynugos, Hollebrands og Strässer, 2006). Þegar nemendur byrja að nota forrit sem þessi fer af stað visst ferli sem er nánast sammerkt með þeim öllum. Fyrst prófa þeir sig ómarkvisst áfram með einföldustu skipanir. Á þessu stigi heyra þeir sjaldnast hvað kennarinn er að segja þó svo hann sé að útskýra virkni forritsins eða verkefnin. Þess vegna er gott að

kennari útskýri virknina áður en verkefni eru lögð fyrir og jafnvel leyfi nemendum að prófa sig áfram með forritið áður en kennsla hefst. Á næsta stigi fara nemendur að teikna í forritinu og fara þeir þá mikið eftir auganu og eru ekki mjög nákvæmir. Síðan fara þeir að vinna ómarkvisst með rúmfræðileg viðfangsefni án þess endilega að gera sér grein fyrir að þau séu rúmfræðilegs eðlis. Að lokum byrja þeir að átta sig á möguleikum forritsins og nota það markvisst til að vinna með rúmfræðileg viðfangsefni (Laborde og Laborde, 1995). Við skipulagningu kennslu þarf kennari að vera vakandi fyrir þessu ferli og koma þannig í veg fyrir mögulega árekstra. Kennarar gætu litið á það sem veikleikamerki hjá sér ef nemendur fara að prófa sig áfram þegar þeir eiga að vera að vinna markvisst. Jafnvel reyndustu kennarar sem kenna rúmfræði í fyrsta sinn með svona forritum hafa fengið á tilfinninguna að þeir missi stjórn á bekknum. Þessi tilfinning hefur verið skilgreind og byggist sú skilgreining á að kennurum finnst þeir vera að missa tókin á skipulags-, persónulegri og faglegri stjórn. Skipulagsstjórn byggist á því að kennsluumhverfið sé vel skipulagt og þeir geti haldið uppi aga. Persónuleg stjórn er færni kennarans til að meta

eigin væntingar og framfarir nemenda. Fagleg stjórn þýðir að kennarinn getur svarað spurningum nemenda (Clements, 2003). Eflaust kannast margir kennarar við þessa þætti þegar þeir eru að fara að kenna eitthvað í fyrsta skipti, kenna nýjum bekk, nýtt námsefni eða nýjum árgangi. Gott er að hafa þetta bak við eyrað þegar þeir kenna rúmfræði í fyrsta sinn á tölvur. Ekki má gleyma því að sumir kennarar hafa ekki mikla tölvuþekkingu og sú kynslóð nemenda sem nú er í grunnskólum hefur alist upp í kringum tölvur. Slíkt getur orsakað vanmáttarkennd hjá kennurum sem gerir þeim erfitt fyrir að einbeita sér að kennslunni.

Verkefni í Geogebra um flatarmál þríhyrninga

Alls voru 12 mismunandi verkefni lögð fyrir og verður eitt þeirra tekið fyrir hér til glöggvunar á því hvernig hægt er að nota Geogebra við kennslu. Fyrst voru sett fram markmið og í framhaldi af því sett upp kennsluskipulag með van Hiele skrefum. Að því loknu var verkefnið hannað og fylgst með framvindu nemendanna í ákveðnum þrepum þar sem hvert þrep byggist á því að nemendur hafi náð að tileinka sér eða skilja fyrri þrep. Til dæmis ef nemandi skilur þrep 1 er farið í þrep 2, annars ekki.

Hiele skref	Hvað er gert í þessu skrefi samkvæmt Hiele	Athugasemd
1	Upplýsingar	Einu upplýsingarnar sem stúlkurnar fá er að nú á að vinna með flatarmál.
2	Vörðuð þátttaka	Kennarinn leiðir stúlkurnar áfram með leiðandi spurningum. Annað gerir hann ekki. Hér eru nokkur dæmi um spurningar sem leiða frá einu yfir í annað. <i>„Hér er grunnlínan 4 og hæðin 3 og forritið segir að flatarmálið sé 6. Hvernig heldur þú að flatarmálið sér reiknað?“</i> <i>„Af hverju er deilt með tveimur?“</i> <i>„Þú varst að reikna út flatarmál rétthyrnds þríhyrnings. Hvernig breytist flatarmálið ef þú hreyfir til efsta punktinn?“</i> <i>„Hvers vegna breytist flatarmálið ekki?“</i>
3	Tenging hugtaka	Þegar flatarmál þríhyrninga er fundið er talað um grunnlína sinnum hæð en ekki lengd sinnum breidd.
4	Sjálfstæð vinna	Stúlkurnar vinna algerlega sjálfstætt að lausnarleitinni.
5	Sambætting	Ekki verður unnið sérstaklega með sambættingu við annað efni þar sem ekkert annað verkefni tengist flatarmáli.

Markmið:

- Að stúlkurnar skilji hvað liggur að baki flatarmálsformúlu þríhyrninga og hvernig henni er beitt.
- Að stúlkurnar átti sig á því að ef hæð og grunnlína þríhyrnings breytist ekki þá er flatarmálið alltaf það sama.

Verkefnið þrepaskipt:

Þrep 1 – Fyrst er unnið með flatarmál rétthyrnds þríhyrnings og það skoðað út frá flatarmáli rétthyrnings og hvernig þríhyrningurinn er í raun helmingur af rétthyrningnum. Þegar það er komið fram að flatarmál þríhyrninga er lengd (grunnlína) sinnum breidd (hæð) deilt með tveimur, þá er farið í næsta þrep. Allar mælieiningar sem eru gefnar miðast við hnitakerfi forritsins þannig að þegar talað er um hæðina 3 þá er það fjarlægðin frá punktinum (1,1) til punktsins (1,4).

Þrep 2 – Haldið er áfram með sömu hæð og sömu grunnlínu en efri punktur þríhyrningsins er færður til. Þá sést að flatarmálið breytist aldrei, sama hversu mikið þríhyrningurinn er teygður. Í framhaldi af þessu fer fram umræða um það hvers vegna flatarmálið breytist aldrei og hvaða atriði það eru sem hafa áhrif á flatarmálið.

Framkvæmdin:

Báðar stúlkurnar komust í gegnum þetta verkefni hnökra-laust. Í lokin var kominn skilningur á því hvað liggur að baki formúlunnar og þær fundu út að það voru grunnlínan og hæðin sem skiptu máli en ekki lögum þríhyrningsins. Hvorug þeirra kunni í upphafi að reikna flatarmál þríhyrninga sem voru ekki rétthyrndir.

Mat á því hvort markmiðum hafi verið náð:

Að stúlkurnar skilji hvað liggur að baki flatarmálsformúlu þríhyrninga og hvernig henni er beitt.

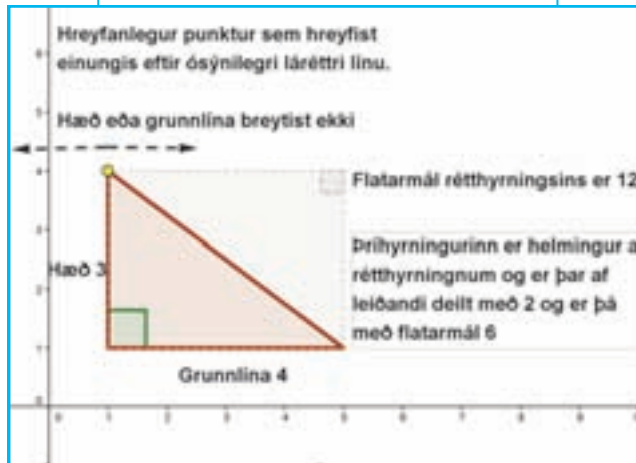
Þær náðu í lokin að skilja formúluna. Þær gátu til dæmis sagt hvers vegna deilt var með tveimur en það höfðu þær ekki vitað fyrir.

Að stúlkurnar átti sig á því að ef hæð og grunnlína þríhyrnings breytist ekki þá er flatarmálið alltaf það sama.

minnkaði. Þær ákváðu samt að treysta forritinu því að forritið sýndi alltaf að flatarmálið breyttist ekki.

Þáttur forritsins í verkefninu:

Hér var notuð dragleiðin með einn punkt til að skoða hvað gerðist þegar hann var hreyfður. Grunnlínan og hæð héldust þannig að flatarmálið breyttist aldrei. Þetta varð til þess að þær áttuðu sig á því að grunnlínan og hæðin voru það sem skipti máli. Þegar verkefninu var lokið vildi önnur stúlkun prófa sig áfram með því að breyta grunnlínu og hæð sem sýndi að forritið er nýtsamlegt þegar verið er að skoða samhengi milli rúmfræðilegra atriða.



Efri mynd: Þrep 1 / Neðri mynd: Þrep 2



Þær áttu auðvelt með að skilja þetta meðan þríhyrningurinn rúmaðist innan rétthyrningsins en erfitt með að skilja hvers vegna formúlan átti við þegar þríhyrningurinn var teygður mjög langt út fyrir rétthyrninginn. Þær sögðust báðar hafa haldið að flatarmálið

Niðurstöður rannsóknarinnar

Niðurstöður rannsóknarinnar sýna að Geogebra nýtist best til að efla skilning þegar nemandinn fær að prófa sig áfram. Kemur það heim og saman við kenningar Piaget og Inhelder (Clements, 2003). Forritið býður upp á að viðkomandi geti prófað sig áfram svo fremi sem færni í forritinu og skilningur á virkni þess er til staðar eða einhver með færni í forritinu er viðstaddur til að hjálpa. Ef kennari leiðbeinir viðkomandi í verkefnavinnu sinni þarf hann að passa að gefa ekki of mikið upp því það getur komið í veg fyrir að skilningur eflist. Í rannsókninni kom fram að þegar rannsakandinn greip of mikið inn í lausnarleit þátttakandanna virtist það frekar trufla en hjálpa. Við slíkar aðstæður voru meiri líkur á að viðkomandi lærði utanað hugtök og hvað býr að baki þeirra en skilningur á þeim virtist vera takmarkaður. Gott dæmi um það var þegar önnur stúlkun var að vinna með einslaga þríhyrninga. Hún fékk lítið að vinna með formin og einkenndist verkefnið af því að rannsakandi mataði hana með upplýsingum. Eftir verkefnavinnu gat hún fundið einslaga þríhyrn-

inga án þess að vita hvers vegna þeir eru í raun einslaga. Einnig kom í ljós að hugtök festust betur í minni þegar þátttakendur skildu hvað býr að baki þeirra. Kvík rúmfræðiforrit geta því vel eflt skilning nemenda á rúmfræðifyrirlæringum svo fremi sem verkefni eru skipulögð þannig að nemandinn fái að prófa sig áfram sjálfur. Verkefni sem er fyrirfram teiknað eða einkennist af endurteknu inngrípi kennara hefur litla þýðingu. Í slíkum verkefnum er í raun verið að fara á mis við þá óþrjótandi möguleika sem forritið býður upp á.

Það kom á óvart að framfarir stúlkunnar sem kennarar töldu lakari í stærðfræði voru umtalsvert meiri en hjá þeirri sem þótti sterkari. Eftir að hugtakabekkingu var náð skildi hún viðfangsefnið í kjölfarið. Hún átti auðveldara með að sjá hlutina myndrænt fyrir sér og það hjálpaði henni að sjá samhengi milli atriða. Dæmi um slíkt var þegar hún áttaði sig á því að með því að draga lóðréttu línu í gegnum jafnarma þríhyrning þá fengust tveir eins þríhyrningar og þar af leiðandi væru grunnlínuhornin eins. Þetta sýnir að hún gat sett þetta röklega fram í huganum og fengið þannig leið til að sanna. Spurningar vöknudu um hvort stúlkan hefði ef til vill betri skilning á þríhyrningum þó svo hugtakabekking hinnar hafi verið betri. Ef það er rétt þá mætti gera ráð fyrir að stúlkan hafi mögulega öflugri rúmfræðihugsun, allavega þegar kemur að þríhyrningum. Þetta vekur óneitanlega upp þá spurningu hvort að kvík rúmfræðiforrit séu ekki vel til þess fallin að hjálpa nemendum sem eru lakari í stærðfræði. Þetta var ekki prófað sérstaklega hér þannig að ómögulegt var að greina það almennilega. Það gæti verið að einstaklingar sem eiga auðveldara með sjónræna úrvinnslu eigi þar af leiðandi auðveldara með að skilja það sem fram fer á skjánum.

Annað sem kom á óvart var að báðar gátu þær klárað verkefnið þar sem þær áttu að sanna að þegar öll horn eru eins þá eru allar hliðar jafnar. Til að leysa þetta þarf nokkuð öflugna rúmfræði-

hugsun (4. van Hiele stig). Þetta leystu þær og sýnir að þær gátu tengt saman það sem þær höfðu lært á undan. Þáttur forritsins í þessu tilfelli var að þær prófuðu sig áfram að svari og samkvæmt kenningu Piaget og Inhelder þá hefur það væntanlega stuðlað að skilningi á því sem þær unnu með.

Þar sem einungis tveir nemendur voru rannsakaðir verður varla hægt að yfirfæra niðurstöður rannsóknarinnar á alla nemendur en vonast er til að þær greiði leiðina fyrir viðameiri rannsókn. Þar sem niðurstöður gáfu til kynna að forrit sem þessi efla skilning nemenda er hægt að víkka hana út enn frekar og taka fyrir stærri hóp nemenda og jafnvel hafa viðmiðunarhópa þar sem annar hópurinn fær rúmfræðikennslu með kviku rúmfræðiforriti og hinn fær kennslu án tölvu.

Niðurstöður rannsóknarinnar sýndu að kvík rúmfræðiforrit nýtast vel til að efla skilning nemenda en til þess að nýta þau sem best þarf kennarinn að hafa einhvern grunn til að byggja á. Ætlar hann að kenna nemendum að nota forritið og/eða ætlar hann að nota forritið sem kennslugagn? Í báðum tilfellum þarf kennarinn að hafa nokkuð góða þekkingu á forritinu til þess að óparfa tími fari ekki í að leita leiða til að leysa tæknivandamál og finna svör við spurningum nemenda. Kennarinn þarf einnig að íhuga hvort Geogebra nýtist vel til að taka fyrir það viðfangsefni sem hann ætlar nemendum að vinna. Ef til vill gæti hann náð sama eða betri árangri með hjálp annarra hjálpargagna. Ég tel mikilvægt að kennarar sem vilja nýta sér kvík rúmfræðiforrit kynni sér forritin til hlítar, reyni að greina það sem getur farið úrskaiðis, hafi skýr markmið, reyni eftir fremsta megni að nota opnar spurningar og síðast en ekki síst leyfi nemendum að vinna sem mest sjálfir.

Heimildaskrá

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D. og Gallino, G. (1998). Dragging in Cabri and modalities

of transition from conjectures to proofs in geometry. Í A. Olivier og K. Newstead (Ritstj.), *Proceedings of the 22nd annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 32-39.

Cabrillog (2009). *Innovate Math Tools*. Skoðað 11. febrúar 2009 á <http://www.cabri.com/>

Clements, D. H. (2003). Teaching and Learning Geometry. Í J. Kilpatrick, W.G. Martin og D. Schifter (Ritstj.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (bls. 151–171). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

GeoGebra (2008). *Download GeoGebra*. Skoðað 7. febrúar 2009 á http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com_content&task=blogcategory&id=71&Itemid=55

Hollebrands, K. F. (2007). The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in the Strategies High School Mathematics Students Employ. *Journal of Research and Mathematics Education*, 36(2), 161-192.

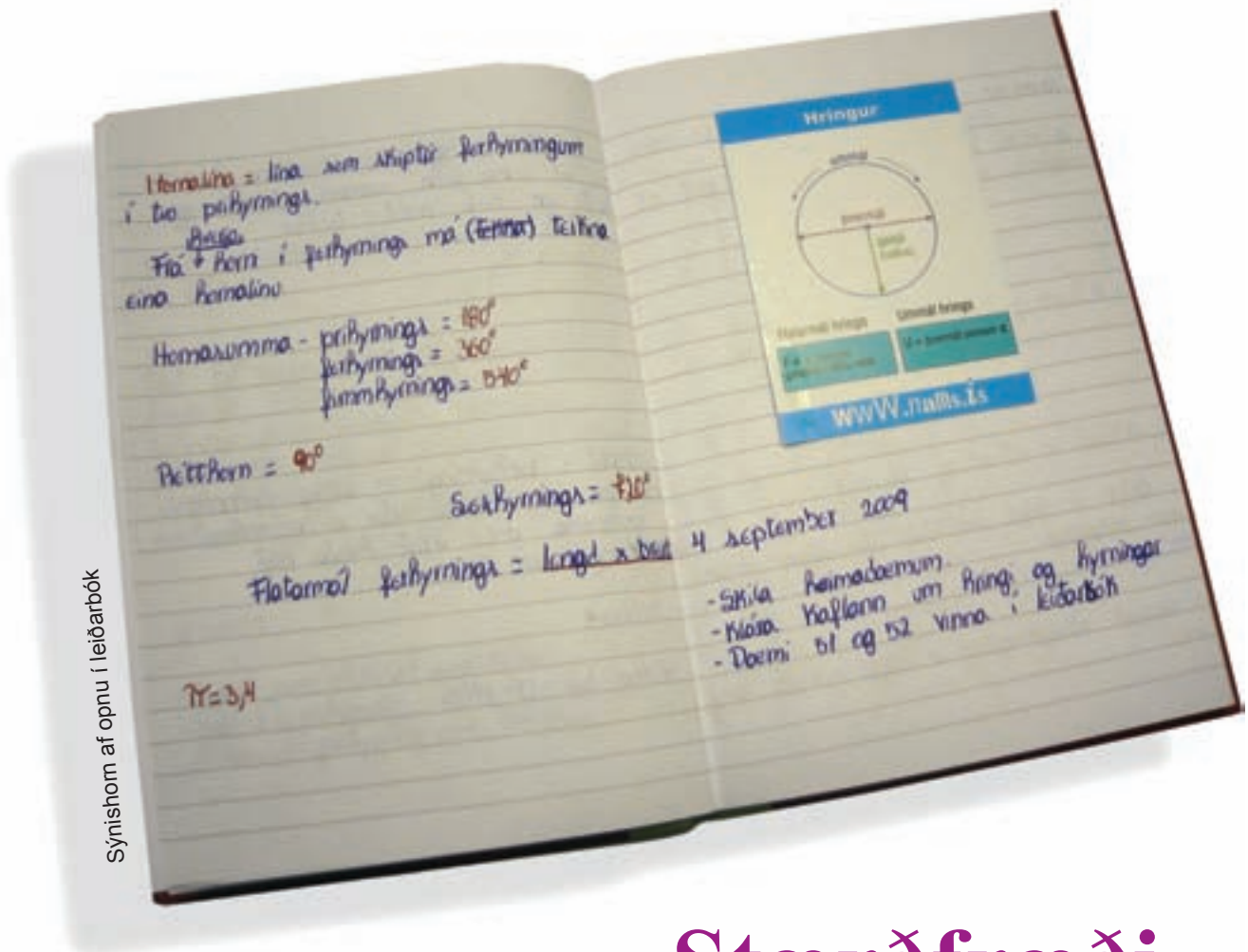
KCP Technologies (2008). *Welcome to The Geometer's Sketchpad® Resource Center*. Skoðað 11. febrúar 2009 á <http://www.dynamicgeometry.com/>

Laborde, C. og Laborde, J-M. (1995). What about a learning environment where euclidean concepts are manipulated with a mouse? Í A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss og L. Edwards (Ritstj.), *Computers for Exploratory Learning* (bls. 241–261). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C., Kynugos, C., Hollebrands, K. og Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. Í A. Gutiérrez og P. Boero (Ritstj.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education : past, present and future* (bls. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 289-317.

Þorsteinn Kristjánsson Jóhannsson (2010). *Áhrif kvikra rúmfræðiforrita á skilning nemenda á þríhyrningum*. Óútgefin meistaraþrófsritgerð, Háskóli Íslands, Reykjavík.



Sýnishorn af opnu í leiðarbók

Haustið 2003 hófst innleiðing á svokölluðu námsmöppukerfi í Laugalækjarskóla. Námsmöppur er yfirheiti á aðferð við söfnun gagna, vinnulagi og mati. Kerfið er í grunninn byggt upp á þann hátt að nemendur hafa eina stóra safnmöppu þar sem þeir safna öllum sínum verkum, hálfkláruðum eða fullunnum, yfir ákveðinn tíma þannig þau séu á vísun stað og hægt sé að sjá framfarir í náminu.

Þrisvar yfir skólaárið á tilteknum möppudögum velja nemendur síðan ákveðið úrval úr verkum sínum í sýnismöppu eftir forsögn kennara. Nemendur rökstyðja valið og sýna með verkefnum að ákveðnum markmiðum hafi verið náð. Sýnismappan á að vera tæki fyrir kennara og nemendur til þess að meta árangur og hvort markmiðum hafi verið náð. Mappan á einnig að bera vitni þeim framförum sem nemandi hefur tekið á

fjórúm árum. Leiðarbækur eru síðan kjarni námsmöppukerfisins. Nemendur hafa eina leiðarbók í hverju fagi og notkun þeirra er fjölbreytt. Markmið með leiðarbókarskrifum er að gera nemendur ábyrgari og virkari í eigin námi og stuðla að einstaklingsmiðun eftir því sem kostur er. Í leiðarbókina skrifa nemendur hugleiðingar sínar um verkefni, eigin getu, framfarir í námi, námsáætlanir o.fl. Þar eru einnig markmið Aðalnámskrár og markmið nemandans. Kennarinn getur líka sett sínar athugasemdir í leiðarbókina. Með því að skoða bókina á nemandinn að geta séð hvaða leið hann fór að settum markmiðum. Þannig öðlast

Stærðfræði og leiðarbækur

Námsmöppukerfi: safnmappa sýnismappa leiðarbók

hann betri yfirsýn yfir vinnu sína bæði í skólanum og heima. Leiðarbækur eiga að nýtast nemandanum við upphaf hvers verkefnis, á meðan á því stendur og eftir að því er lokið. Þær geta geymt markmiðssetningu, bæði hóps og einstakra nemenda. Þær geyma skipulag verkefna, teikningar af afurðum og öll önnur áform.

Mikil gróska er í leiðarbókarstarfinu og með því er leitað fjölmargra leiða til þess að námsmöppurnar falli að starfinu

á þann hátt að nemendur upplifi að bækurnar komi þeim að gagni. Leiðar- bók hentar vel til að efla sjálfsþekkingu. Tilgangur iðgrundunar er að fá nemendur til að hugleiða vinnulag og hvernig þeir geta bætt sig. Nemendur gefa sér einkunn út frá þeim markmiðum sem þeir hafa sett sér og rökstyðja. Sjálfsmat nemenda er mikilvægur hluti náms- möppukerfisins og leiðarbækur koma til mats í leiðsagnarmati. Stundum búa nemendur til persónulega leiðarbók og hanna hana sjálfir.

Stærðfræði og leiðarbækur

Í fyrstu var leiðarbókin eingöngu notuð sem reglubók í stærðfræðikennslu. Nemendur skráðu hjá sér glósur eftir kennaranum og skrifuðu t.d. hjá sér villur eftir próf ásamt leiðréttingum. Mörgum þótti erfitt að sjá fyrir sér hvernig texta- skrif og iðgrundun gæti nýst nemendum við stærðfræðinámsmat en með aukinni notkun, þróun námsmökkupkerfisins í skólanum og nýju námsefni hefur notkun bókarinnar aukist svo um munar og segja má að bókin sé notuð í langflestum kennslustundum í dag. Markmiðið er að nemendur geti notað sömu fagskiptu A5 bókinna í gegnum öll fjögur árin, frá 7.-10. bekk, sem þau eru í skólanum. Skólaárið í Laugalækjarskóla skiptist í þrjár jafnlangar annir og hefst hver önn á því að nemendur setja sér markmið fyrir önnina. Þessi markmið eru skráð í leiðar- bókina með rökstuðningi og hafa nemendur til hliðsjónar spurningar líkt og: „hvernig ætlar þú að vinna að settu markmiði?“ og „af hverju setur þú þér þessi markmið?“ Í lok hverrar annar eru markmiðin skoðuð og nemendur meta ásamt kennara hvort markmiðum hafi verið náð og setja sér um leið ný mark- mið fyrir næstu önn. Þáttur iðgrundunar er stór í þessu ferli og gefst nemendum tækifæri til að skoða eigið nám og velta fyrir sér af hverju sumir hlutir gengu vel en aðrir síður. Nemendur hafa einnig komið með góða endurgjöf á stærðfræði- kennsluna hverju sinni og það hefur reynst dýrmætt að heyra frá nemendum hvað þeir telji að megi betur fara í kennslustundum og í kennsluskipulaginu almennt svo framarlega að endurgjöfin eigi við rök að styðjast. Þetta eru jú nemendurnir okkar og hljóta að hafa eitthvað um málið að segja!

Undanfarið ár höfum við aukið vægi leiðarbókarinnar í tengslum við kaflana í bókinni. Áður skrifuðu nemendur einungis beinar reglur og útskýringar eftir kennara en nú hafa bæst við hug- leiðingar um viðfangsefni, hvernig til tókst í síðasta kafla, upprifjun á því sem nemendur voru að læra og skoðað hvort að markmiðum kaflans hafi verið náð en markmið hans eru alltaf sýnileg á kennsluáætlunum. Notkun hugarkorta í leiðarbókina hefur einnig aukist og hefur kennari þá stjórnað einhvers konar þankahrið á töflu sem nemendur skrá hjá sér sem hugarkort. Þá gefst þeim tækifæri til að setja hugtökinn upp í því sam-

LINDA HEIÐARSDÓTTIR, STÆRÐFRÆÐIKENNARI VIÐ LAUGALÆKJAR- SKÓLA, SEGIR FRÁ LEIÐARBÓKUM SEM NOTAÐAR ERU VIÐ NÁMSMAT Í STÆRÐ- FRÆÐI

hengi sem þeir sjálfir skilja vel. Í lok flestra kaflanna í *Átta – tíu* námsefninu eru spurningar um kaflann og viðfangsefni hans sem krefjast rökstuðnings og hugleiðinga um viðfangsefni. Svör við þessum spurningum eiga hvergi heima á betri stað en í leiðarbók og geta þá komið í kjölfarið á reglum og fleiru sem snýr að kaflanum.

Verkefni, próf og leiðarbókin

Leiðarbókin hefur einnig verið notuð í tengslum við próf og kannanir. Fyrst ber að nefna svokölluð *verkefni með leiðar- bók* þar sem nemendum gefst kostur á að hafa bókinna meðferðis til að vinna verkefni. Þessi verkefni koma inn í náms- matið og skipulögð og vel unnin leiðar- bók getur komið að miklu gagni eins og flestir nemendur okkar þekkja. Það er einnig mjög ánægjulegt að sjá nemendur 9. bekkjar fletta til baka í bókinni og rifja upp hluti sem þeir skráðu hjá sér í 7. og 8. bekk. Markmið okkar er að sjálfsögðu að virkja þá í eigin lausnaleit með því að nýta sér það sem þeir hafa áður gert og byggja ofan á það.

Sjónrænar vísbendingar og gátlistar

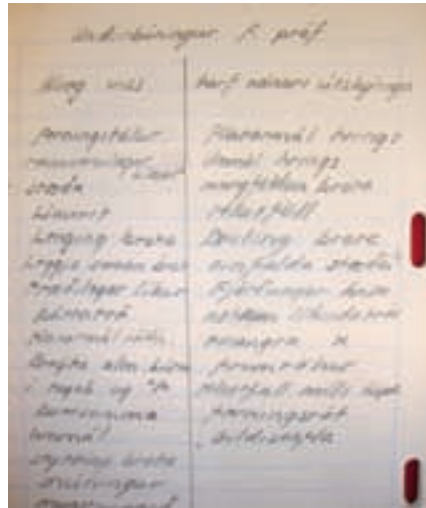
Í fyrravetur sóttum við kennararnir námskeið hjá samstarfskonu okkar Bryn- hildi Önnu Ragnarsdóttur um leiðar- bækur og fengum margar góðar hug- myndir um hvernig við mættum nýta bókinna í öllum greinum. Í vetur höfum við einbeitt okkur að sjónrænum vís- bendingum sbr. að kennarar skrá á töflu skipulag tímans svo nemendur viti nákvæmlega hvað liggur fyrir í kennslu- stundinni. Ekki hefur reynt mikið á þetta hjá okkur en við höfum lagt til við nemendur að skrá þetta alltaf hjá sér við upp- haf kennslustundar til þess að halda utan um það sem er verið að gera hverju sinni. Einnig prófuðum við að útbúa hálfgerðan gátlista á litlum miðum fyrir lokapróf. Þá voru öll hugtök skráð á miða og nemendur sátu saman í hópum og hver nemandi með sína leiðarbók. Blaðsíðunni var skipt upp í tvo dálka, annar sem hét *alveg viss* og hinn sem hét *þarf nánari útskýringu á*. Nemendur drógu síðan miða með hugtökunum á upp úr þar til gerðum umslögum og ræddu viðfangsefnið sín á milli. Til dæmis dró nemandi hugtak líkt og *fern- ingsrót* og hópurinn ræddi um hugtakið og útskýrði og einhver kaus jafnvel að skrá upplýsingar í leiðarbókina. Að lokum var hugtakið skráð á tvískiptu blaðsíðuna og merkt við hvort nemandi væri alveg viss á þessu hugtaki eða þyrfti nánari útskýringu. Þarna voru nemendur að læra fyrir lokaprófið í kennslustund en um leið að útbúa fyrirtaks gátlista.

Framtíð og þróun leiðar- bókaskrifa í stærðfræði

Eins og fram hefur komið viljum við auka ábyrgð nemenda á eigin námi með markvissum skrifum í leiðarbók á þann hátt að nemandi geti séð hvaða leið hann fór að settum markmiðum. Í 7. bekk þegar nemendur hefja nám við skólann er því mikilvægt að kenna þeim vinnu- lagið og öll leiðarbókarskrif í stærðfræði eru stýrð af kennara í 7. og 8. bekk. Við leggjum mikið upp úr því að skrá allar reglur, hugtök eða aðrar hugleiðingar sem eiga að fara inn í bókinna á lista sem hangir upp á vegg. Nemendur hafa þá alltaf aðgang að því sem ætti að vera í bókinni. Þó eru alltaf einhverjir nemendur sem taka ákveðið frumkvæði og setja sjálfir eigin hugleiðingar inn í

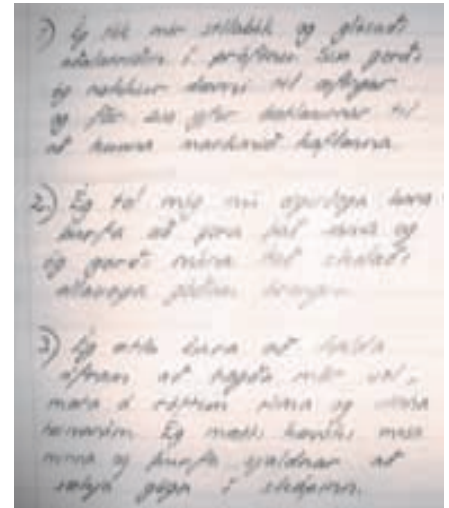
bókina og er mjög ánægjulegt að sjá hversu vel þenkjandi margir ungir nemendur geta verið. Þegar líður á 9. bekk og einna helst í 10. bekk hvílir ábyrgðin töluvert meira á nemendum og þeir setja sér markmið og stjórna því enn frekar hvað fer inn í leiðarbókina. Þegar hér er komið eru nemendur líka farnir að þekkja vinnulagið mjög vel og vel flestir fullfærir um að halda góða leiðarbók upp á eigin spýtur. Eins og í öllu geta komið upp hindranir við leiðarbókskrif og hefur það einna helst birst þegar nemendur leggja lýtinn sem engan metnað í vinnubrögðin og vanda ekki til verka. Vinnulagið skiptir því höfuðmáli og þeir nemendur sem skrá lítið niður, vanda ekki skrift og uppsetningu rekur í vörðurnar þegar kemur að því að nýta sér bókina sbr. í tímum þegar þarf að fletta upp reglum eða við úrvinnslu verkefna með leiðarbók.

Í vetur er stefna okkar í Laugalækjarskóla að auka orðaforða nemenda í öllum fögum og þar mun leiðarbókin



Mynd t.v.: Gátlisti fyrir próf.

koma mikið við sögu. Notkun svo-kallaðra hugtakakorta í stærðfræði verður aukin og stefnt er að því að nemendur auki skilning sinn á stærðfræðilegum hugtökum og textum svo um munar því við teljum þeim þætti ábótavant. Það er mín von að geta útskrifað



Mynd t.h.: Skráning markmiða

ábyrga, sjálfstæða og skipulagða nemendur sem geta stoltir lítið yfir nám sitt og séð framfarir og leiðir að settum markmiðum í gegnum leiðarbókskrif.

Brjóttu upp formið og notaðu **spil** í kennslu

Nokkrar hugmyndir af spilum sem henta í stærðfræðikennslu...



Take it easy

Þjálfar margföldun, samlagningu og líkindareikning.

Leikmenn nota skifur með tölum sem þeir eiga leggja á spjald. Allir vinna með sömu tölurnar, svo heppni hefur lítið að segja.



Blink

Þjálfar þekkingu á fommum, litum og fjölda.

Frábært, vinsælt og hratt spil. Mælt er með því fyrir þá sem nota Davies kerfi við lesblindu og fleira.



Blokus

Þjálfar formþekkingu, múnstur, speglun, einingar og kærsku.

Blokus er margverðlaunað spil þar sem leikreglur eru einfaldar — það tekur innan við mínútu að læra spilið.

Halli Galli

Þjálfar samlagningu, eftirtektarsemi og snerpu.

Skemmtilegt og stutt spil sem hefur með snerpu að gera. Flettir spjöldum með myndum af mismunandi ávöxtum. Þegar samtals 5 eins ávöxtir eru í borði á að hringja bjöllunni.



7áttu9

Þjálfar samlagningu, frádrátt og snerpu.

Spilastokkaspil sem gengur út á snerpu og reikning. Leikmenn eiga að leggja saman eða draga frá 1, 2 eða 3 í samræmi við það sem stendur á spilinu í bunkanum í miðjunni. Frábært hraðaspil.



... og auðvitað fullt, fullt af fleiri spilum

— Minnum á að skólar og stofnanir fá 15% afslátt í verðuninni! —

 **Spilavinir**
Spil og púshúspil fyrir alla fjölskylduna

Langholtiavegur 126 · 104 Reykjavík · Sími 553 3450 · www.spilavinir.is

Hugmynd að skólanámskrá

Námskrá í stærðfræði fyrir 8. - 10. bekk grunnskóla

Námskrár kveða meðal annars á um markmið og fyrirkomulag skólastarfs, kennsluskipan og viðmið um námskröfur og námsframvindu. Skólanámskrá skal vera nánari útfærsla á aðalnámskrá. Hún á jafnframt að lýsa skólastarfi hvers skóla, sérkennum hans, sérstöðu og staðbundnum aðstæðum

(Sigurjón Mýrdal, 2009).

Forsendur stærðfræðikennslu

Af hverju að kenna stærðfræði? Hvað viljum við að nemendur viti um stærðfræði og hverju eiga þeir að hafa náð valdi á? Velja þarf hvað skuli kennt og hvernig og hvað skuli metið. Á hverju á þetta val að byggjast; þekkingu, leikni eða hæfni? Margar skoðanir eru uppi og margir koma að þessu vali eins og ráðuneyti, sveitarfélög, skólar og kennarar. Er þetta val byggt á rannsóknum, tilfinningu eða pólitík? Áður en hægt er að tala um val verður að svara spurningunni: Hvaða not höfum við fyrir stærðfræði í nútímasamfélagi?

á tengsl stærðfræðinnar við daglegt líf. Þá sjá nemendur væntanlega meiri tilgang með náminu og það hefði áhrif á skoðanir fólks á eðli og tilgangi stærðfræðináms. Ef nemendur sjá tilgang með náminu er auðveldara að kveikja hjá þeim áhuga og áhugasömum nemendum gengur mun betur að ná þeirri hæfni sem við viljum að þeir tileinki sér. Eins og Anna Kristjánsdóttir segir er stærðfræðin nauðsynleg öllum í nútímapjódfélagi:

En jafnframt því hve stærðfræði er öflug til skilnings á samhengi, bæði við vísindastörf og listræna iðkan, er hún samofin flestum þáttum í daglegu lífi manna, oft án þess að fólk taki eftir því eða hugleiði það mikið. Hún gefur okkur grundvöll tímamælinga og fjarlægðarmælinga og hlutfalla slíkra stærða. Hún leggur okkur til hugtök til að átta okkur á rými og fjarvidd og ná tökum á slíku. Hún hjálpar okkur til að skilja hvort fyrirbæri séu líkleg eða ólíkleg og að setja fram og túlka margvísleg gögn. Og svo mætti lengi telja. Stærðfræðinámið snýst því nú orðið um visst læsi, læsi á þessi fyrirbæri og að kenna nemendum að taka eftir hlutverki stærðfræðinnar og hvar og hvernig við færum okkur hana í nyt.

(Anna Kristjánsdóttir, 2002)

Ef ekki verður hægt að vinna markvissar með tengsl stærðfræði við daglegt líf í grunnskólunum er erfitt að færa rök fyrir þeim tíma sem stærðfræðináms tekur þar og afleiðingar eru að nemendur velja sig frá stærðfræði í framhaldsskóla ef þeir hafa ekki grunn til að byggja á. Þessu verður að breyta og hér er reifuð ein hugmynd að skólanámskrá þar sem leitast er við að koma til móts við þessar hugmyndir.

ÁGÚST BENEDIKTSSON, GRUNNSKÓLAKENNARI OG MEISTARANEMI Í STÆRÐFRÆÐIMENNTUN VIÐ HÍ, SEGIR FRÁ VERKEFNI SEM UNNIÐ VAR Í MÁLSTOFU Á SVIÐI STÆRÐFRÆÐIMENNTUNAR Á MENNTAVÍSINDASVIÐI HÍ

Atli Harðarson skrifar um stærðfræðináms:

Sú stærðfræði sem þorri fólks þarf að nota í daglegu lífi er ósköp lítil. Menn þurfa að kunna reikningsaðgerðirnar fjórar, ráða við hlutfalla- og prósentureikning og hafa einhverja nasasjón af lýsandi tölfræði. Allur þorri fólks þarf á þessari stærðfræði að halda en kemst ágætlega af án þess að kunna neitt meira (Atli Harðarson, 1994).

Til að breyta þessari skoðun á mikilvægi stærðfræðinnar er fyrsta skrefið að breyta námskrá og leggja þar meiri áherslu

Hugmynd að námskrá

Markmiðin í skólanámskránni sem hér eru sett fram eru fyrst og fremst hæfnimarkmið þó einnig verði fjallað um þekkingarmarkmið og þá vegna tengingar við aðalnámskrá. Reynt er að koma með útskýringar á hverjum þætti og oft með dæmum úr daglegu lífi í formi verkefna. Ástæðan fyrir því að reyna að breyta um takt í markmiðsetningu er sú að ef þekkingarmarkmið eru höfð of nákvæm er hætta á að þau stýri yfirferð námsefnis (kennslunni). KOM skýrslan byggir á hæfnimarkmiðum og verða hæfnimarkmið hennar notuð sem fyrirmynd að þessari námskrá (Niss, 2002). Þetta gefur kennurum frelsi til að velja um fleiri en eina ákveðna

kennslubók. Slíkt frelsi gerir um leið meiri kröfur til faglegrar þekkingar kennarans sem þarf þá að velja og byggja um kennsluferli og því þarf jafnframt að verða sú breyting hjá yfirvöldum að sérmenntaðir kennarar sjái um stærðfræðikennslu í skólum.

Í þessari námskrá er gerð tilraun til að tengja verkefni sem mest daglegu lífi nemandans, sérstaklega dagblöðum, sjónvarpi, auglýsingum og hverju öðru sem gæti rekið á fjörurnar. Tilgangurinn er að reyna að hjálpa nemendum að nýta sér þá kunnáttu og færni sem þeir vissulega hafa til einkað sér. Því verður nemandinn að vera með í ráðum þegar verkefni eru valin svo að þau verði sem mest á hans áhuga-sviði og hann sjái tilgang með þeim.

Ekki má þó gleyma því að tvenns konar tilgangur er með kennslunni. Í fyrsta lagi að undirbúa nemandann undir líf og starf í nútímaþjóðfélagi og hins vegar að undirbúa hann undir áframhaldandi nám í námsgreininni. Hér verður farin sú leið að gera námsefnið þannig úr garði að nemandanum finnist það skipta einhverju máli fyrir hann svo sem verkefni tengd daglegu lífi. Markmiðið er að hver og einn fái sem fjölbreytilegust verkefni sem reyni á hæfileika hans og þrói með honum áhuga á stærðfræði. Því er farin sú leið að skipta náminu í tvo hluta, kjarnaefni og ítarefni. Í þessu fellst að ekki verða allir nemendur jafn vel búnir undir frekara nám strax að loknum grunnskóla, sumir geta kannski ekki gengið beint inn í viðkomandi áfanga í framhaldsskóla, en hafa samt fengið þann skilning á stærðfræði að með auknum þroska og áhuga gætu þeir sem best nýtt námið sem undirbúning síðar á lífsleiðinni. Áherslan verður þannig frekar á að kynna námsefnið þannig að þeir fái skilning á viðfangsefninu frekar en beina prófanlega þekkingu. Með þessu móti er minni hætta á að nemendur gefist upp, því efnið er meira tengt þeim sjálfum og þeirra reynslu.

Ef kjarnaefnið er minnkað til muna þá gefur það nemendum meira val um eigin námsframvindu og hjálpar þeim að læra að bera sjálfir ábyrgð á náminu. Nemendur læra að ekki er einhver ein leið rétt en allir stefni að sama marki þó að ekki komi allir á sama tíma í mark. Þeir læra að ekki sé nóg að kunna aðferðir heldur er aðalatriðið að vita hvenær hægt er

að nýta þær á sem flestum sviðum. Við getum í forni námskrár gefið nemandanum trú á eigin verðleika og getu til að taka tillit til þarfa og skoðana annarra.

Kennsluáferðir

Hópvinna og samvinnunám er oft heppileg nálgun í kennslu til að kalla fram áhuga nemenda og gefa þeim tækifæri til að ná eignarhaldi á eigin námi og viðfangsefnum. Í aðalnámskrá er hvatt til hópvinnu og hún gefur kennurum tækifæri til að ræða við nemendur í návígi og styðja þá í að vinna áfram með eigin hugmyndir. Þannig er nemendum gefinn kostur á að vinna í samræmi við getu og áhuga sem er eitt af aðalmarkmiðum aðalnámskrár.

Hópvinna hentar sérstaklega vel til vinnu í tölfræði og líkindafræði því þá gefst nemendum tækifæri til að ræða saman um leiðir og þeir æfast í að taka tillit til og hlusta á skoðanir annarra. Hlutverk kennara breytist því námið fer fram í gegnum athuganir og umræður um stærðfræðilegar hugmyndir og meginhlutverk kennarans verður þá að hlusta, spyrja spurninga og styðja nemendur í að útfæra vinnu sína. Nemendur koma með tillögur, rannsaka þær og færa rök fyrir þeim. Þeir vinna einnig einstaklingslega eða í hópum við að leysa þrautir eða verkefni. Gott er ef kennari hefur tilbúinn verkefnabanka sem nemendur geta gengið í og að honum sé raðað að einhverju leyti þannig að verkefni verði stigvaxandi svo að nemandi geti byggt á fyrri reynslu. Alltaf er hætta á því að verkefni fyrir getuminni nemendur verði of einföld og reyni lítið

á þá en með samvinnunámi og hópvinnu þurfa þeir að taka þátt í vinnu á verkefnum sem reyna á. Með tjáskiptum og að kennari virki alla nemendur í kynningum er komið til móts við þetta. Auðvitað verður stundum að láta nemendur vinna einstaklingslega og ekki síður þá getumeiri sem eru að undirbúa sig fyrir frekara nám því reiknað er með að þeir komist lengra í verkefnavinnunni. Einnig gætu þeir getumeiri unnið sjálfstætt í kennslubók, bæði heima og í skóla þegar tími vinnst til. Verkefni eins og hér eru gefin dæmi um eiga að sýna fram á nauðsyn fjölbreyttra aðferða við að kynna hugtök og vinnu með stærðfræðiefni. Tekið er dæmi af tölfræði og líkindafræði.

Verkefni 1

Nemendur virkjaðir í hugtakavinnu.

Miðgildi:

Láttu nemendur raða sér upp í röð eftir hæð. Ef fjöldinn er oddatala þá er miðgildið hæð þess sem er í miðjunni. Síðan ætti kennarinn að bæta sér inn í röðina og þá verður miðgildið meðaltalið af hæð þeirra tveggja sem eru í miðjunni. Hópurinn ræðir síðan um miðgildi og finnur skilgreiningu fyrir miðgildi.

Tíðasta gildi:

Láttu nemendur raða sér upp í röð eftir hæð. Ef einhverjir tveir eða fleiri eru jafnháir þá standa þeir hver fyrir aftan annan. Þá er hæð þeirra sem flestir eru saman tíðasta gildið. Athuga þarf að fleiri en eitt tíðasta gildi geta komið upp. Hópurinn ræðir síðan um tíðasta gildi og finnur skilgreiningu fyrir tíðasta gildi.

Meðaltal:

Láttu nemendur leggja saman hæð allra og deila með fjöldanum. Hópurinn ræðir síðan um meðaltal og finnur skilgreiningu fyrir meðaltal.

Skipting í kjarnaefni og ítarefni

Kjarnaefni

- **Undirbúningur undir að nýta sér stærðfræði í daglegu lífi:** *Verkefnið eiga að vera þannig að tenging við daglegt líf sé augljós og sýnd með dæmum. Tilgangurinn er að nemendur fái aukinn áhuga á stærðfræði og finni þörf fyrir hana.*

- **Undirbúningur undir frekara nám í stærðfræði:** *Aðeins eru tekin fyrir fá atriði þannig að nemandi þarf að bæta við eða byrja á upprifjun í framhaldsskóla en hefur samt fengið grunnskilning og færni til að byggja á. Þetta er hugsað fyrir þá sem ætla að taka fáar einingar í stærðfræði í framhaldsskóla.*

Ítarefni

- **Undirbúningur undir að nýta sér stærðfræði í daglegu lífi:** *Verkefnið eiga að vera þannig að nemandur finna sjálfir og rökstyðja tengingu við daglegt líf.*

- **Undirbúningur undir frekara nám í stærðfræði:** *Hér eru gefnir upp námsþættir sem undirbúa nemendur beint fyrir frekara nám í stærðfræði. Svipað og gert er í þrepamarkmiðum aðalnámskrár í dag ásamt því að benda á kafla í kennslubókum sem æskilegir eru til að undirbúa nemendur.*

Tölfræði og líkindafræði

Lokamarkmið í tölfræði er að nemandi þekki algengar aðferðir til að setja fram töluleg gögn og kunni skil á líkinda-hugtakinu (*Aðalnámskrá grunnskóla-stærðfræði, 2007:13*). Þetta er mjög almennt orðað og miðað við áfangamarkmið gætu nemendur sem best verið búnir að ná lokamarkmiðunum í lok 7. bekkjar. En í þrepamarkmiðum í námskránni er svo sannarlega gert mikið úr þessum flokki og er það vel gert. Gallinn er hins vegar sá að hvergi er minnst á hvernig á að halda áfram ef nemandi hefur ekki náð þeim markmiðum sem honum eru ætluð á hverjum tíma. Því verður að setja námsefnið þannig fram að það henti nemendum með ólíka getu, leikni og kunnáttu þ.e. mismunandi hæfni.

Kjarnaefni

Nemandi hafi hæfni til ...

... að spyrja stærðfræðilegra spurninga og svara þeim stærðfræðilega.

- Hæfni til stærðfræðilegrar hugsunar
að þekkja og kunna að fara með og afmarka stærðfræðileg hugtök eins og meðaltal, tíðasta gildi, miðgildi, tíðni-töflur, tíðni, hlutfallsleg tíðni, líkur og tilraun.
Verkefni eru í sama anda og verkefni 1 ásamt léttum æfingum um hvert efnisatriði.

- Hæfni til lausnaleitar
Að geta safnað gögnum og dregið ályktanir af þeim.

Verkefni 2

Hér eru þrjú dæmi (A, B, C) um sama grunnverkefni sem stigþyngist eftir því hvaða kunnáttu nemendur búa yfir. Hægt er að byrja á verkefni A og taka hin síðar á námstímanum svo nemandur geti tengt verkefnið við fyrra nám. Einnig er hægt að nýta þau fyrir mismunandi hópa í þeim tilgangi að auka við þekkingu.

A Nemendum er skipt í 2-3 manna hópa sem eiga að gera skoðanakönnun á sjónvarpsáhorfi á einstaka þætti. Hér verða þeir að ákveða hvaða hóp þeir ætla að spyrja og hvernig á að setja fram upplýsingar (myndrit). Síðan eiga nemendur að kynna verkefnið fyrir samnemendum. Í þessu verkefni eru ekki ákveðnar forkröfur, en í gegnum verkefnið er ætlunin að kenna nemendum að búa til tíðnitöflur og súlurit í töflureikni.

Markmið:

- Að nemandur læri að safna tölfræðilegum upplýsingum.
- Að nemandur þjálfist í að setja fram upplýsingar á myndrænu formi.
- Að nemandur sjái tengsl stærðfræði við daglegt líf.
- Að nemandur kynni niðurstöður fyrir öðrum.
- Að nemandur verði hæfir í að lesa myndrænar niðurstöður.

B Nemendum er skipt í 2-4 manna hópa sem eiga að gera skoðanakönnun á sjónvarpsáhorfi á einstaka sjónvarpsþætti hjá tveimur ólíkum hópum. Hér verða þeir að ákveða hvaða hópa þeir ætla að spyrja og hvernig á að setja fram upplýsingar (myndrit). Síðan eiga nemendur að kynna verkefnið fyrir samnemendum. Í þessu verkefni eru forkröfur. Ætlast er til að nemandur kunni að nota excel til að sýna myndræna framsetningu á tölulegum upplýsingum. Nemendur læra að bera saman upplýsingar sem settar eru fram í myndritum. Einnig á að kynna fyrir þeim hugtökin úrtak og þýði.

Markmið:

- Að nemandur æfist í að safna tölfræðilegum upplýsingum.
- Að nemandur þjálfist í að setja fram upplýsingar á myndrænu formi.
- Að nemandur sjái tengsl stærðfræði við daglegt líf.
- Að nemandur kynni niðurstöður fyrir öðrum.
- Að nemandur verði hæfir í að lesa myndrænar niðurstöður.
- Að nemandur geri sér grein fyrir að vilji lítils hóps endurspegli ekki endilega vilja allra.

C Nemendum er skipt í 2-4 manna hópa sem eiga að gera skoðanakönnun á sjónvarpsáhorfi á einstaka sjónvarpsþætti hjá tveimur ólíkum hópum og bera saman við sjónvarpsáhorfsmælingar. Hér verða þeir að ákveða hvaða hópa þeir ætla að spyrja og hvernig á að setja fram upplýsingar (myndrit). Einnig eiga þeir að segja til um í tengslum við hvaða þátt heppilegast væri að auglýsa nýja vörutegund og hvers vegna. Að lokum eiga nemendur að kynna verkefnið fyrir samnemendum og skila skýrslu um vinnuna. Í þessu verkefni eru forkröfur. Ætlast er til að nemendur kunni að nota töflureikni til að sýna myndræna framsetningu á tölulegum upplýsingum og þeir eiga að hafa þekkingu á hugtökunum úrtak og þýði.

Markmið:

- Að nemendur þjálfist að setja fram upplýsingar á myndrænu formi.
- Að nemendur læri að rökstyðja mál sitt með hjálp stærðfræðinnar.
- Að nemendur noti stærðfræði fyrir utan skólann og sjái tengsl við daglegt líf.
- Að nemendur kynni niðurstöður fyrir öðrum.
- Að nemendur hafi fengið hæfni í að lesa myndrænar niðurstöður.
- Að nemendur geri sér grein fyrir að lítill hópur endurspeglar ekki endilega alla.
- Að nemendur geri sér grein fyrir tilgangi skoðanakönnanna með dæmi um markaðsetningu vöru í huga.

(Byggt á verkefni frá Indiana háskóla, James, 1995)

Einnig eru verkefni í sama anda á:

<http://www.score.k12.co.us/lessons>



Að geta giskað á niðurstöður og prófa þær síðan með tilraun.

Að setja fram spurningar um tiltekið málefni og setja niðurstöður fram.

... að hafa hugtök og tákni stærðfræðinnar á valdi sínu og geta fært sér í nyt hjálpartæki.

- Hæfni í meðferð tákna og geta meðhöndlað formlega framsetningu stærðfræðinnar.

Að flokka og lesa gögn.

Að geta „þýtt“ formlega framsetningu yfir á daglegt mál og öfugt.

Að geta búið til einföld myndrit, súlurit, línurit, skífurit.

Að geta lesið úr einföldum myndritum úr fjölmiðlum.

Að ná í upplýsingar úr ýmsum gagnagrunnum á netinu, s.s frá Hagstofnunni.

Verkefni eru í sama anda og verkefni 2.

- Hæfni til að nota stærðfræði til að tjá sig um stærðfræði.

Að geta tjáð sig munnlega og skriflega um og með stærðfræði.

Að geta nýtt sér tölfræði til að rökstyðja mál sitt.

Verkefni eru í sama anda og verkefni 2.

- Hæfni til notkunar hjálpartækja

Að geta búið til einföld myndrit í excel.

Verkefni eru í sama anda og verkefni 2.

Ítarefni

Nemandi hafi hæfni til ...

... að spyrja stærðfræðilegra spurninga og svara þeim stærðfræðilega.

- Hæfni til stærðfræðilegrar hugsunar

Að þekkja og kunna að fara með og afmarka þau stærðfræðilegu hugtök tölfræðinnar sem eru í kjarna auk hugtakanna; miðsækni, tíðnidreifingu, vegið meðaltal, dreifing, fylgni, úrtak, fræðilegar líkur, huglæggar líkur.

Að skoða gögn úr fjölmiðlum, happdrættum og að útskýra þau fyrir öðrum.

- Hæfni til lausnaleitar

Að geta sett fram og leyst stærðfræðiþrautir, bæði hagnýtar og í hreinni stærðfræði. Hafa verður í huga að hugtakið þraut er afstætt – það sem er einum þraut er öðrum rúttina.

Nemandi á að leysa þrautir um málefni liðandi stundar og nýta til þess ýmis gagnasöfn.

- Hæfni til líkanagerðar

Að geta smíðað líkan um málefni liðandi stundar sem eru

nemanda / hópnum hugleikin og sett niðurstöður fram með t.d. myndritum.

- Hæfni til rökfærslu

Að geta fylgt röksemdafærslu og metið hana.

Að geta nýtt sér tölfræði og líkindareikning til að spá fyrir um framhald með hjálp myndrita. Ákveða réttláta skiptingu og gott val byggt á líkum.

Að geta sagt fyrir um réttmæti framsetningar.

Að geta greint og hagnýtt upplýsingar á sviði stærðfræði sem birtast m.a. í fjölmiðlum, hvort sem þær eru settar fram myndrænt eða í töflum.

... að hafa hugtök og tákn stærðfræðinnar á valdi sínu og geta fært sér í nyt hjálpartæki.

- Framsetningarhæfni

Að skilja og nýta sér mismunandi framsetningar á stærðfræðilegum fyrirbærum.

Að geta valið á milli framsetninga eftir því hvað hentar viðfanginu.

Að geta náð í upplýsingar úr ýmsum gagnagrunnum á netinu, s.s frá Hagstofunni og sett þær fram í ólíkum myndritum.

- Hæfni í meðferð táknaðs og geta meðhöndlað formlega framsetningu stærðfræðinnar

Að geta „þýtt“ formlega framsetningu yfir á daglegt mál og öfugt.

- Hæfni til að nota stærðfræði til að tjá sig um stærðfræði
Að geta túlkað munnlegar og skriflegar túlkanir annarra á stærðfræði.

Að nýta sér tölfræði til að rökstyðja mál sitt um valið efni.

- Hæfni til notkunar hjálpartækja

Að geta og kunna að nýta sér hin ýmsu hjálpartæki s.s. reiknivél og ýmis hjálparforrit.

Ekki er sett ákveðin röð á þessi markmið og þau ekki heldur aldurstengd því að þessi vinna getur verið unnin á hvaða aldurstigi sem er og tekur þannig tillit til þess að nemendur vinni þessi verkefni eftir getu og þroskastigi.

Verkefni eru bæði einstaklings- og hópverkefni og þau eru valin úr kennslubókum og fjölmiðlum. Nemandi hefur mikið val um efni og vinnutíðni sem er þáttur í að ýta undir sjálfstæð vinnubrögð og ábyrgð á námi sínu. Hér er einnig gert ráð fyrir tengingu þessarar vinnu við aðrar námsgreinar. Að lokum hefur nemandi möguleika á að kynna sér námsefni framhaldsskólans, jafnvel farið í fjarnám og tekið próf til að flýta fyrir námi sínu. Ekki er miðað við neina eina bók en gengið er út frá að nemendur sem ætla sér að undirbúa sig

fyrir frekara nám taki efni úr átta til tíu bókunum og er hluti af því tiltekinn hér.

Námsefni í tölfræði og líkindum

Átta til tíu 1 bls. 34 – 45 og 93 – 104.

Átta til tíu 2 bls. 17 – 29 og 96 – 109.

Átta til tíu 4 bls. 4 – 20 og 34 – 49.

Átta til tíu 5 bls. 39 – 50.

Átta til tíu 6 bls. 4 – 18.

Það að skipta stærðfræðináminu í skólanámsskránni í tvo hluta gefur nemendum sem stefna ekki á langskólanám möguleika á að verða hæfari í notkun stærðfræði hins daglega lífs. Hér er gerð sú tilraun að minnka til muna kröfur í kjarna því margir nemendur hafa hreinlega gefist upp á námi vegna þess að þeir ráða ekki við kröfurnar í stærðfræðináminu. En grunnskólinn getur aðeins breytt kröfum í stærðfræðikennslu ef framhaldsskólinn er tilbúinn að taka við nemendum með ólíkan grunn. Framhaldsskólarnir þyrftu þá að breyta áherslu sinni á t.d. abstrakt algebrunámi sem hafa verið þeir áfangar sem allir hafa orðið að taka og leggi meiri áherslu á tölfræði og annað sem nýtist öllum nemendum. Vonandi verður breyting á, í þeirri námskrárvinnu sem fer nú fram í framhaldsskólunum.

Miðað er við að nám samkvæmt þessari námskrá fari sem mest fram sem hópvinna og samvinnunám en auðvitað ekki eingöngu. Því er farin sú leið að benda á efni í kennslubókum sem æskilegt væri að taka því að metnaður á ekki að hverfa og áfram á að undirbúa þá nemendur sem vilja undir frekara nám í stærðfræði þó að kjarnaefnið breytist og miðist meira við daglegt líf.

Heimildir:

Aðalnámskrá grunnskóla - stærðfræði (2007). Sótt 10.

desember 2009 af http://bella.mrn.stjr.is/utgafur/adalnamskra_grsk_staerdfrædi.pdf

Anna Kristjánsdóttir. (2002). *Stærðfræðinám á 21.*

öldinni. Sótt 14. desember 2009 af http://mennta.hi.is/vefir/staerdfrædin_hrifur/

Atli Harðarson. (1994). *Stærðfræði og almenn*

menntun. Sótt 14. desember 2009 af <http://www.snerpa.is/net/atli/staerd.htm>

James, Jay og Shannon, Ray . Sótt 14. desember 2009 af <http://www.indiana.edu/~hmathmod/html/telerat4/telerat4.html>

Niss, Mogens. (2002). *Kompetencer og matematiklæring* (KOM-projectet), Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark: Pixi utgave.

Sigurjón Mýrdal. (2009). Fyrirlestur í HÍ föstudaginn 27. nóvember 2009. Einnig sótt 15. desember 2009 af <http://www.nymenntastefna.is/spurt-og-svarad/nr/6#NAMSKRAR>



Sem dæmi um verkefni í nemendabók ratleiksins má nefna *Fibonacci rununa*. Nemendur byrja á því að finna furuköngul og þá þurfa þeir að gaumgæfa trén í kring um sig og bera kennsl á furu. Að því búnu eiga nemendur svo að telja fjölda spírala í könglinum, annars vegar þá sem snúast rétt-sælis og hins vegar þá sem snúast rangsælis. Fjöldi spíralanna sem nemendur finna með þessu móti eru tvær tölur sem standa hlið við hlið í Fibonacci rununni, yfirleitt eru það 5 og 8 en einnig 8 og 13. Síðar í ratleiknum nota nemendur svo þessar tölur, ásamt öðrum, til að nálgast ϕ .

Í öðrum verkefnum í nemendabókinni reynir til dæmis á þekkingu nemenda á flatarmáli, þvermáli hrings og reglu Pýþagórasar (einnig er hægt að leysa það verkefni með mælingum eingöngu).

Stærðfræðiratleikur í Elliðaárdal

**HELENA
ÓLADÓTTIR,
VERKEFNISSTJÓRI
NÁTTÚRUSKÓLA
REYKJAVÍKUR,
SEGIR FRÁ
STÆRÐFRÆÐI-
RATLEIK FYRIR
UNGLINGASTIG
Í ELLIÐAÁRDAL**

Í nokkur ár hefur Náttúruskóli Reykjavíkur haldið úti stærðfræðiratleik í Elliðaárdal. Ratleikurinn samanstendur af sex nemendaverkefnum sem leyst eru á ákveðinni leið um Elliðaárdalinn. Verkefnin er að finna í nemendabók í bakpoka sem hægt er að fá lánaðan hjá Náttúruskóla Reykjavíkur.

Ratleikurinn styður vel við nám nemenda á unglíngastigi auk þess sem hann er skemmtileg tilbreyting frá hefðbundnu bóknámi. Ákjósanlegast er að nemendur séu vel undirbúnir áður en farið er í ratleikinn og að þeir hafi unnið með þær reglur sem notaðar eru í nemendabók. Ekki er síður mikilvægt að fylgja verkefnum ratleiksins eftir þegar heim er komið til að dýpka reynslu nemenda og styðja við nám þeirra. Allir útreikningar fylgja nemendum heim í skólan og sjálfsagt er fyrir kennara að nýta ratleikinn sem efni við í kennslustund, heimadæmi, skýrslur eða önnur skilaverkefni nemenda.

Náttúruskólinn lánar skólum bakpoka endurgjaldslaust. Hver bakpoki inniheldur nemendabók með verkefnunum, öll gögn sem þarf til að leysa verkefnin, kort af leiðinni sem ratleikurinn liggur um, skrifffæri og stílabók. Ratleikurinn tekur um klukkustund en gott er að áætla rúman tíma til að leysa hann. Það á sérstaklega við ef hópar nemenda eru margir og nauðsynlegt reynist að senda þá af stað með nokkurra mínútna millibili svo örtröð myndist ekki á einhverri stöðinni. Einnig kemur fyrir að nemendur rati ekki rétta leið í fyrstu atrennu. Í allri útikennslu er gott að hafa sveigjanleika hvað varðar tímasetningar.

➔ Ratleikinn má panta hjá verkefnisstjóra Náttúruskóla Reykjavíkur: natturuskoli@reykjavik.is

Vefur Náttúruskólans: natturuskoli.is

Til þess að geta leyst verkefnin þurfa nemendur að vera á ákveðnum stöðum í dalnum. Þannig er hvert verkefni staðsett við tiltekna trjátegund, s.s. furu, ösp, reyni og lerki, en misjafnt er hvort tegundin tengist því verkefni sem fengist er við á hverjum stað fyrir sig.

Verkefnin miðast við getu nemenda í 8.-10. bekk og reyna á útsjónarsemi þeirra við að nýta sér stærðfræðikunnáttu sína á raunverulegum viðfangsefnum. Flest þeirra ættu þó að vera auðleysanleg í hópi þar sem nemendur fá stuðning hver af öðrum. Í nemendabók eru skýrar leiðbeiningar og gefnar upp allar jöfnur sem nemendur gætu talið nauðsynlegar við að leysa verkefnin.

- Mynstur – stærðfræði og listir** 3
Laufey Einarsdóttir og Hildur Kristjánsdóttir
- Úlfur, lamb og heypokinn** 6
Kristín Bjarnadóttir
- Fagmenntun og viðhorf stærðfræðikennara á Akureyri til stærðfræði og stærðfræðikennslu** 8
Anna Bergrós Arnarsdóttir
- Spjallað við höfund GeoGebru** 12
Ingólfur Gíslason
- Bókarkynning: *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*** 14
Guóbjörg Pálsdóttir
- Teiknum, reiknum og rímum** 16
Ingólfur Gíslason
- Notkun Geogebra við kennslu** 18
Þorsteinn Kristján Jóhannsson
- Stærðfræði og leiðarbækur** 23
Linda Heiðarsdóttir
- Hugmynd að skólanámskrá** 26
Ágúst Benediktsson
- Stærðfræðiratleikur í Elliðaárdal** 31
Helena Óladóttir