

FLATARMÁL

1.TBL., 27. ÁRGANGUR 2020



MÁLGAGN FLATAR
SAMTAKA STÆRÐFRÆÐIKENNARA

Flatarmál 1. tbl., 27. árg. 2020

Málgagn Flatar, samtaka stærðfræðikennara

© 2020 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara

Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Formaður: Þórunn Jónasdóttir (Hörðuvallaskóla) thorunnjona@kopavogur.is

Gjaldkeri: Hrafnhildur Pálsdóttir (Hörðuvallaskóla) hrafnpal@kopavogur.is

Ritari: Kristín Einarsdóttir (Salaskóla) kreinars99@gmail.com

Meðstjórnandi: Edda Jónsdóttir (Árbæjarskóla) Edda.Jonsdottir@rvkskolar.is

Meðstjórnandi: Imke Schirmacher (Lágafellsskóla) imke@lagafellsskoli.is

Meðstjórnandi: Kristjana Skúladóttir (Melaskóla) Kristjana.Skuladottir@rvkskolar.is

Vefsíða

<http://www.ki.is/flotur>

Ritnefnd Flatarmála

Birna Hugrún Bjarnardóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Guðbjörg Pálsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Margrét S. Björnsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Prófarkalestur

Kristín Einarsdóttir

Birna Hugrún Bjarnardóttir

Umbrot og myndvinnsla

Jón Reyr Jóhannesson

<https://jonjohannesson.com>

Prentun

Guðjón Ó. – Vistvæna prentsmiðjan

Mynd á forsíðu

Mynd á forsíðu var unnin af Bjarka Þór Ólasyni. Hann var í 10. bekk í Grundaskóla á Akranesi vorið 2017. Eitt af lokaverkefnum hans í skólanum var að nota aðferð Eschers við þökun. Hann nýtti sér teikniaðferðina Zentangle og teiknaði inn í mynsturfletina.

Til höfundu greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda með tölvupósti til ritstjóra Flatarmála Birnu Hugrúnar á netfangið birnahugrun@gmail.com. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Ritstjórn Flatarmála tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

RITSTJÓRAPISTILL

Ágætu lesendur

Árið 2020 verður sennilega lengi í minnum haft í heimssögunni vegna Covid 19 veirunnar. Áhrif veirunnar gætir víða og er skólahald og námskeiðahald þar ekki undanskilið. Skólar hafa verið hólfaðir niður í sóttvarnarsvæði og nemendahópum haldið á sínum svæðum auk þess sem eldri nemendur hafa verið í fjarkennslu að hluta eða að öllu leyti. Til stóð að fulltrúar Flatar og Flatarmála færu til Svíþjóðar á vordögum á samstarfsfund norrænu stærðfræðifélaganna en fundinum var frestað um óákveðinn tíma. Sama má segja um námstefnu Flatar sem búíð var að undirbúa og átti að vera um miðjan mars síðastliðinn. Eitt er samt ljóst og það er að Flatarmál kemur út þrátt fyrir Covid 19.

Það kennir margra grasa í þessu blaði. Sem dæmi má nefna að grunnskólanemendur tjá sig um hæfniviðmið aðalnámskrár og framhaldsskólakennari í Danmörku segir frá áhugaverðri nálgun í stærðfræðinámi þar sem nemendur vinna yfirgripsmikil verkefni sem lýkur með skýrslugerð. Ingólfur Gíslason upplýsir okkur um stærðfræði og gagnvirka tölvugrafík. Síðan er söguhorn

Kristínar Bjarnadóttur á sínum stað og það sama má segja um fréttir af starfsemi Flatar. Áhugavert er að lesa um þrautalausnir á yngsta stigi grunnskólans og einnig er í blaðinu áhugaverð grein um umræður og opin verkefni með yngri nemendum. Sagt er frá skemmtilegri leið til að vinna með margföldun og deilingu út frá flatarmáli og hægt er að kynna sér listamanninn Escher og hvernig hann vann með stærðfræðileg viðfangsefni í list sinni. Þar að auki er sagt frá námskeiðinu Námssamfélag stærðfræðikennara undir leiðsögn stærðfræðileiðtoga sem verður í boði á næsta skólaári fyrir kennara á öllum aldursstigum grunnskólans ásamt kennurum í leikskóla og framhaldsskóla.

Munum að hlýða Víði og að við erum öll almannavarnir. Með samstilltu átaki náum við vonandi tökum á Covid 19 veirunni hér innanlands svo skólastarf komist í eðlilegt horf sem fyrst.

Með vinsemd og virðingu,
Birna Hugufrún Bjarnadóttir
ritstjóri Flatarmála

FRÉTTIR AF STARFSEMI FLATAR

Ágætu félagsmenn

Fréttapistill frá stjórn Flatar er fastur liður í blaðinu og ekki má hann vanta í þetta blað þrátt fyrir að minna hafi orðið úr starfinu á árinu 2020 en til stóð í upphafi árs.

Eftir viðburðarríkt starfsár 2019 var aðalfundur Flatar haldinn á svipuðum árstíma og venjulega, að þessu sinni 16. nóvember 2019. Eftir venjuleg aðalfundarstörf voru lagðar fram og samþykktar nokkrar breytingar á lögum félagsins. Var orðalaginu íslenskir stærðfræðikennarar breytt í stærðfræðikennarar á Íslandi (grein 3). Einnig var samþykkt að í stað þess að kjósa tvo varamenn í stjórn skal nú kosinn einn og tekin var út setningin: Enginn má gegna sama embætti í stjórn lengur en tvö kjörtímabil í senn (grein 6). Að lokum var bætt inn lið í dagskrá aðalfundar um að ákvarða skuli upphæð félagsgjalda á aðalfundi (grein 7). Að loknum venjulegum aðalfundarstörfum flutti Meyvant Þórólfsson erindi um bráðgera nemendur og síðan fóru fram pallborðsumræður. Margt áhugavert kom fram í erindi Meyvants og ekki síður

í pallborðsumræðunum þar sem sat fólk með ólíka reynslu og sýn á málefnið. Lögð var áhersla á mikilvægi þess að veita bráðgerum nemendum athygli, sinna þeim og koma til móts við þá í námi sínu.

Mennta- og menningarmálaráðuneytið skipaði í október 2019 átta manna fagråd í stærðfræði sem hugsað er sem tenging milli skólastiga. Fulltrúi Flatar í ráðinu er Imke Shirmacher. Markmið ráðsins er að gera raunhæfar tillögur til ráðherra um eflingu stærðfræðimenntunar og aukna samfellu milli leikgrunn-, framhalds- og háskólastigs. Einnig að vera Menntamálastofnun til ráðgjafar við mótun og útfærslu verkefna í stærðfræði í grunnskólum m.a. með þróun skimunarprófa í stærðfræði á grunnskólastigi, starfsþróun kennara og ráðgjöf til skóla. Fundað hefur verið í fagráðinu fimm sinnum á árinu þar sem staða stærðfræðikennslu í landinu hefur verið rædd og upplýsingum safnað varðandi stærðfræðikennslu á öllum skólastigum. Þar að auki hefur verið farið yfir ýmsar úttektir á stærðfræðikennslu í grunn- og framhaldsskólum. Á stjórnarfundum Flatar hafa þessi

málefni verið rædd, einkum þó skimunarprófin á grunnskólastiginu.

Samstarf stærðfræðikennara á Norðurlöndum hefur því miður ekki getað verið sem skyldi vegna útbreiðslu Covid 19 veirunnar. Flötur náði þó að senda fulltrúa sína í nóvember 2019 á árlega ráðstefnu í Matematikksenteret í Þrándheimi í Noregi, Novemberkonferansen. Til stóð að þrír fulltrúar okkar færu á samstarfsfund norrænu stærðfræðikennarafélaganna í mars síðastliðnum, en honum varð því miður að fresta.

Þann 26. nóvember 2019 kom út jóladagatal Flatar, annað árið í röð. Þar er að finna 24 misþungar þrautir sem aðlaga má fyrir nemendur á öllum skólastigum, svo kennarar geta valið úr verkefnum. Dagatalið var sent rafrænt á alla félagsmenn og í alla grunnskóla landsins en það er í upplausn sem hentar til prentunar á A3 örk. Dagatalið og lausnir við þrautunum má finna á heimasíðu Flatar <http://ki.is/flotur/>

Dagur stærðfræðinnar var haldinn 7. febrúar og var þemað í ár mynstur. Stærðfræðikennarar á öllum skólastigum voru hvattir til að nýta dag stærðfræðinnar til þess að huga að stærðfræðitengdum viðfangsefnum sem finna má alls staðar í kringum okkur. Til þess að auðvelda kennurum vinnuna var efni um mynstur safnað saman og sett fram á rafrænu formi á heimasíðu Flatar, fésbókarsíðunni Stærðfræðikennarinn og sent til félagsmanna. Efnið kom að mestu úr þremur áttum, úr vefverkefnabankanum *Stærðfræði er skemmtileg*, úr þemaheftinu *Mynstur* og ýmis verkefni komu frá Borghildi Jósúadóttur kennara.

Til stóð að halda námstefnu Flatar í mars á þessu ári, en því miður varð að fresta henni vegna Covid 19 veirunnar. Aðalefni námstefnunnar átti að vera um hæfniviðmiðin í stærðfræði, viðfangsefni sem byggja á þeim og hvernig námsmati skuli háttað. Aðalfyrirlesararnir, þær Elisabeth Tang og Connie Nielsen, áttu að koma frá Danmörku og ætluðu þær að

vera með fyrirlestur og vinnustofu. Einnig stóð til að vera með vinnustofur þar sem skipta átti þátttakendum í hópa eftir þeim aldurstigum sem þeir kenna. Á vinnustofunum áttu að vera innlegg frá starfandi stærðfræðikennurum í grunn- og framhaldsskólum sem ætluðu að deila með þátttakendum hugmyndum að vinnu sem byggir á hæfniviðmiðunum og námsmatinu sem þeim fylgir.

Jóhann Örn Sigurjónsson doktorsnemi í stærðfræði ætlaði síðan að vera með kynningu á doktorsverkefni sínu, en hann tekur þátt í norrænni myndbandsrannsókn á gæðum kennslu og rannsakar stærðfræðikennslu með áherslu á þann gæðaðátt sem snýr að því hvaða kröfur séu gerðar til nemenda um stærðfræðilega hugsun og umræðu.

Framundan er að gefa út nýtt jóladagatal fyrir árið 2020 og verður það sent út í lok nóvember.

Aðalfundur samtakanna var haldinn í fjarfundi í byrjun nóvember og í framhaldi af honum voru menntabúðir þar sem hægt var að velja á milli þriggja fjarmentabúða; hugsandi skólastofu, listsköpun í stærðfræðikennslu og starfsþróun-leiðtoganám.

Dagur stærðfræðinnar verður svo haldinn fyrsta föstudag í febrúar og verður það í síðasta sinn sem hann er haldinn þann dag. Ákveðið var á aðalfundi samtakanna að færa dag stærðfræðinnar og hafa hann á sama tíma og í öðrum Evrópulöndum, en það er pí-dagurinn 14. mars og verður sá dagur því nefndur dagur stærðfræðinnar á Íslandi frá árinu 2022.

Stefnt er að því að halda námstefnu um miðjan mars árið 2021 og verður fyrirkomulag hennar auglýst þegar nær dregur. Vonandi ganga þessi áform eftir, en stjórnin hefur þann fyrirvara á að huga að fjarnámstefnu bjóði aðstæður ekki upp á annað.

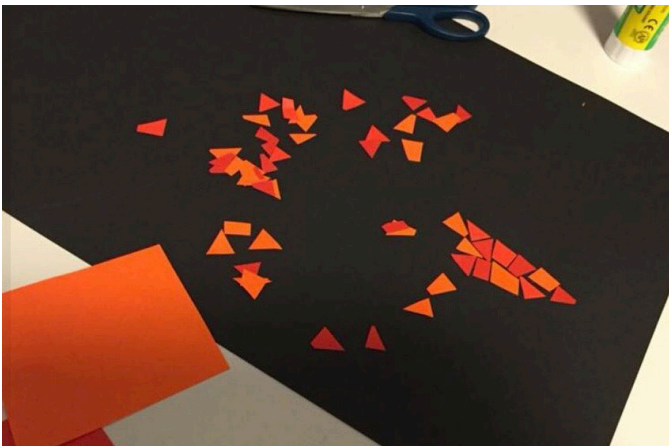
Kristín Einarsdóttir í stjórn Flatar

SÝN UNGLINGA Á HÆFNIVIÐMIÐ AÐALNÁMSKRÁR

Við erum nemendur í níunda og tíunda bekk í Hörðuvallaskóla í Kópavogi. Við, ásamt kennsluráðgjafanum, fórum yfir hæfniviðmiðin í aðalnámskránni fyrir grunnskóla, þar á meðal stærðfræðihæfniviðmiðin. Að lesa viðmiðin hefur hjálpað okkur mikið að efla skilning á námi okkar.

Til þess að uppfylla hæfniviðmiðin þurfa nemendur að sýna metnað og þrautseigju í námi. Með hæfniviðmiðum má tengja betur saman fögin og meta fleiri fög saman í verkefni. En okkur finnst líka að það ætti alltaf að meta öll verkefni sem við gerum því að við erum alltaf að vinna með okkar eigin hæfni.

Okkur finnst uppsetningin á hæfniviðmiðunum í stærðfræði svolítið flókin og því gæti verið erfitt fyrir suma að skilja þau. Þó er hægt að ná góðum skilningi á þeim ef lögð er vinna í það, eins og við gerðum. Þessa vinnu þurfa allir kennarar að fara í með nemendum til þess að þeir fái sem besta kennslu miðað við viðmiðin.



Stærðfræði er mjög mikilvæg fyrir alla og hún nýtist okkur öllum á mismunandi sviðum, sama hvað við gerum. Þess vegna þurfa allir nemendur góða stærðfræðikennslu. Það sem okkur finnst mikilvægt er að fjármálalæsi sé hluti af stærðfræðinni, að nemendur þekki meginatriði í fjármálum eins og að reikna skatta, að allir kunni að notað mælieiningar og geti breytt þeim eftir þörfum og að allir kunni á töflureikna. Þetta þurfa allir að kunna m.a. til þess að skilja launaseðla, til þess að matreiða eftir uppskriftum og til þess að vinna úr könnunum og öðrum upplýsingum.

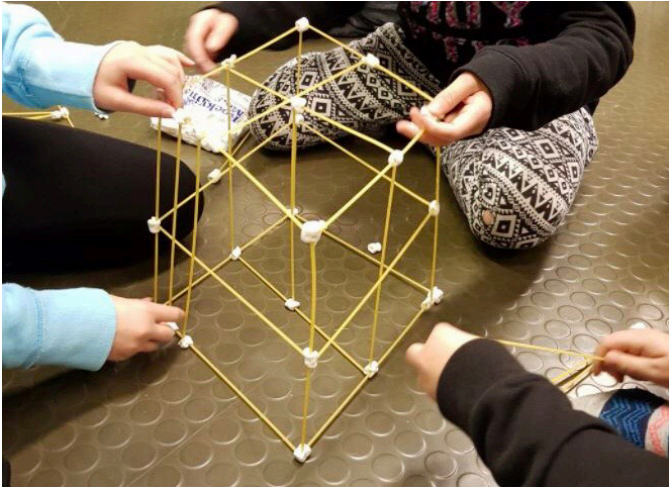
Það er mikilvægt að nota margar aðferðir við stærðfræðikennslu. Nemendur missa oft áhuga á náminu ef það er of einsleitt, þá læra nemendur minna og margir verða eftir á. Til þess að vekja áhuga nemenda á stærðfræði þá verður námið að vera fjölbreytt. Það verður að vera gott jafnvægi á milli kennslubóka og verkefnavinnu. Því allir eru góðir í einhverju en enginn er góður í öllu.



Í bækurnar vantar oft fjölbreytileika, þá eru allir að gera það sama. Við notkun bóka eru takmarkaðir möguleikar fyrir nemendur að sýna fram á framúrskarandi hæfni og fyrir nemendur sem eiga við námsörðugleika að stríða. Auðvitað geta nemendur fengið allt rétt á prófi og þannig sýnt fram meiri hæfni en einhver annar, en þá er nemandinn ekki að sýna framúrskarandi hæfni heldur bara nóg til að leysa dæmið. Þar koma verkefni sterk inn, en okkur finnst samt að verkefni geti ekki komið í staðinn fyrir bækur. Sumt verður að festast með því að endurtaka það aftur og aftur.

Það sem er frábært við verkefni er að hver og einn getur unnið eftir eigin bestu getu. Spurningarnar og svörin geta verið svo miklu fjölbreyttari í verkefnavinnu og það er auðveldara að líkja þeim við raunveruleikann, t.d. þegar nemendur fara út á vinnumarkaðinn og fá

vinnu, þá eru svörin ekki aftast í einhverri bók, heldur þarft þú að leysa þau eins og í verkefnum.



Til þess að hafa fjölbreyttar leiðir í náminu fyrir nemendur sem geta meira eða vilja frekari æfingar eru aukaverkefni þægileg fyrir bæði kennara og nemendur. Aukaverkefni geta verið allt frá nokkurum dæmum á blaði og upp í stór verkefni sem nemendur þurfa að leggja mikla vinnu í. Stór kostur við aukaverkefni er að allir nemendur geti verið að vinna með sömu áætlun en þeir sem eru sterkir í faginu geta öðlast meiri hæfni með því að gera aukaverkefni.

Sem dæmi um verkefni sem okkur fannst skemmtilegt að gera má nefna fjármálaverkefni þar sem við unnum með skatta, launaseðla og vexti. Annað verkefnið var að búa til könnun, setja fram tilgátu og vinna úr upplýsingunum. Einnig gerðum við verkefni þar sem við útskýrðum hugtök eins og mælieiningar, tvívíð og þrívíð form.

Við bjuggum til myndband sem útskýrir hvað hæfniviðmiðin og hæfnikortið er og kost þess að þekkja þau. Þar kemur fram að það er á ábyrgð nemenda að fylgjast með hæfnikortinu sínu, en einnig að nemendur geti haft áhrif á eigið nám með því að koma með tillögur að verkefnum sem uppfylla hæfniviðmið.

Hér er slóð á myndbandið: <https://www.youtube.com/watch?v=yDcuf0pESVQ&feature=youtu.be>



Við mælum með því að allir skilji hæfniviðmiðin og tilgang þeirra, með því að lesa þau vel yfir og setja þau í samhengi við námið. Það hefur hjálpað okkur mikið í eigin námi.

Unnið af nemendum í unglingsdeild Hörðuvallaskóla skólaárið 2019-2020.

Myndir í greininni eru af vinnu nemenda í Hörðuvallaskóla.



Hörðuvallaskóli

PLÁSS FYRIR STÓRAR HUGMYNDIR

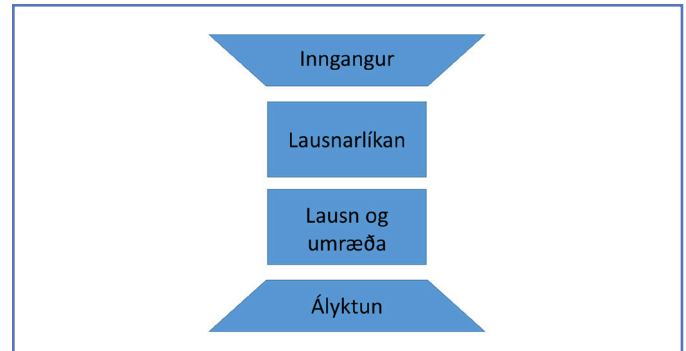
Skýrslur í framhaldsskólasterðfræði

Stærðfræðikennsla sú sem ég fékk á minni skólagöngu var borin uppi af sýnidæmum og mörgum stuttum dæmum. Slík kennsla gaf mér umtalsverða þjálfun í stærðfræðilegu handverki, en litla þjálfun í að rökstyðja hvers vegna aðferðirnar sem ég notaði virkuðu og gáfu litlar væntingar til stærðfræðiverkefna, að þau gæti ég annaðhvort leyst á nokkrum mínútum eða alls ekki. Sem menntaskólakennari í Danmörku hef ég reynt að gefa nemendum mínum tækifæri til að vinna meira á dýptina og ein af aðferðunum sem ég hef notað er að leggja fyrir stærri verkefni sem nemendur takast á við og skila stærðfræðiskýrslum um vinnu sína og niðurstöður.

Ég kynntist hugmyndinni um heildstæð stærðfræðiverkefni með lágan þröskuld og hátt til lofts í bók Jo Boaler um *Mathematical Mindsets* (2016) og fannst þetta góð áskorun fyrir mig sem kennara. Sú nálgun í kennslu að láta nemendur frekar fara mislangt með sama verkefnið í staðinn fyrir að sumir geri fleiri eða önnur verkefni hefur reynst vel. Nemendur fá að vinna á sínu stigi en hafa samt aðgang að því sem aðrir í bekknum eru að vinna með. Bæði mér og nemendum finnst jafnan nokkuð gaman af svona verkefnum, en samt er oft eins og nemendur séu ekki alveg tilbúnir að samþykkja að þetta sé alvöru stærðfræði. Svona dæmi koma ekki á skriflega prófinu og minna ekki á verkefni sem flestir nemendur þekkja úr grunnskóla, en ég hef haft góða reynslu af því að láta nemendurna vinna skýrslur upp úr svona verkefnum. Nemendur bera virðingu fyrir skýrslum og það er auðvelt að rökstyðja mikilvægi þess að geta skrifað faglegan texta.

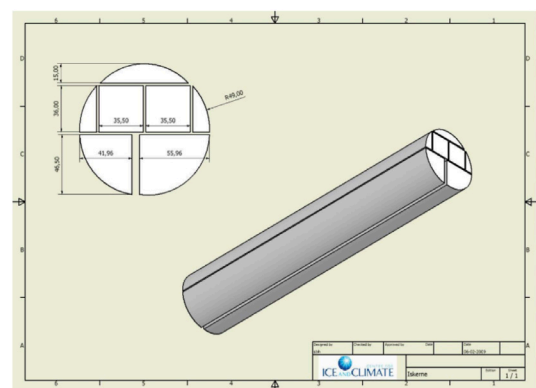
Stærðfræðiskýrslur eru innbyggður hluti af námskrá fyrir stærðfræði í danska verkmenntaskólakerfinu (HTX). Skýrslurnar eiga að spanna allt námsefnið og í munnlegu prófi til stúdentsprófs draga nemendur eina skýrslu sem þeir eiga að fjalla um. Skýrslurnar eru byggðar upp á inngangi, lausnarlíkani, lausn og umræðu og ályktun (sjá mynd 1). Í inngangi á að útskýra í stuttu máli markmið skýrslunnar og síðan

fylgir lýsing á lausnarlíkaninu, þ.e. stærðfræðilegum grundvelli verkefnisins og almennum lausnum á hluta verkefnisins. Í lausn og umræðu leysa nemendur verkefnið og ræða niðurstöðurnar. Í ályktanarkafla eru höfuðniðurstöður skýrslunnar dregnar saman.



Mynd 1: Skýrslusnið fyrir stærðfræðiskýrslur.

Dæmi um verkefni sem nemendur mínir hafa unnið í svona ferli er verkefni um ískjarnaborun á Grænlandsjökli, sem þeir unnu á vormisseri á fyrsta ári í framhaldsskóla. Verkefnið snýst um að skoða skiptingu ískjarna milli mismunandi rannsakenda. Þegar ískjarninn hefur verið boraður er hann skorinn í ólíka bita sem skipt er á milli rannsakenda (sjá mynd 2). Jafnan myndast ákveðin togstreita milli rannsakendanna um hvaða rannsóknir fá búið og hve stóran hluta hver rannsakandi fær. Í verkefninu okkar eiga nemendur að velja sér rannsókn og endurhanna skurðarplanið svo þeirra rannsókn fái stærri hluta borkjarnans.



Mynd 2: Skurðarplan fyrir borkjarna sem skiptir kjarnanum milli rannsókna.

Nemendur eiga að skrifa skýrslu sem tekst á við 4 undirverkefni sem sjá má á mynd 3. Í lausnarlíkaninu er lagt upp með að nemendur geri grein fyrir þeim eiginleikum við þríhyrninga og hringi sem þörf er á til að leiða út almenna lausn á flatarmáli á rétthyrndu útklippni úr hring út frá hliðarlengdum og geisla. Í lausn og umræðu þurfa nemendur að taka tillit til þess að það eyðist aðeins af ísnum þegar hann er skorinn og þess vegna virkar eins og skurðarplanið gangi ekki upp. Þeir þurfa einnig að lýsa hvernig þeir finna flatarmál reitanna og útskýra hönnunarforsendur sínar fyrir nýja skurðarplanið.

- Gerið grein fyrir eiginleikum þríhyrninga og hringja sem skipta máli fyrir verkefnið.
- Leiðið út jöfnu flatarmáls rétthyrnds afskurðar úr hring út frá hliðarlengdum og geisla.
- Reiknið hversu stóran hluta af ískjarnanum hver rannsókn fær og hversu stór hluti eyðist við skurð.
- Ískjarnaborinn sem er notaður á Suðurskautslandinu er með 25 mm stærra þvermál en sá sem er notaður á Grænlandi. Veljið rannsókn og hannið skurðarplan fyrir slíkan borkjarna út frá hagsmunum ykkar rannsóknar.

Mynd 3: Undirverkefni í ískjarnaverkefninu sem nemendur eiga að svara í heildstæðri skýrslu.

Í kennslustundum var unnið með rúmfræði hrings og þríhyrninga þannig að í hvert sinn sem við komumst að einhverju saman um efnið gátu nemendur tengt það við vinnuna með ískjarnaverkefnið. Auk vinnu í skólanum var gert ráð fyrir að nemendur myndu vinna 5 klukkutíma vinnu utan skólatíma. Með þessum vinnubrögðum skapast ákveðinn rammi utan um rúmfræðihlutann sem styður við að nemendur setji það sem við fjöllum um í dag í samhengi við það sem við gerðum síðast og það sem er framundan.

Einnig skapast með þessu móti tækifæri fyrir mig sem kennara til að leiðbeina nemendum í hópum. Þannig fær hver hópur tækifæri til að vinna verkefnið á sínu stigi og nemendur geta lært hverjir af öðrum við að sjá hvernig aðrir takast á við það.

Stuttu fyrir skil gerðu nemendur veggspjöld og áttu þeir að segja á 5-10 mínútum frá einhverjum hluta verkefnisins. Einn úr hverjum hópi hélt erindi á meðan hinir úr hópnum hlustuðu á upplegg frá öðrum hópum og svo var skipst á þannig að allir náðu að heyra 3 erindi og halda eitt (sjá mynd 4). Eftir skilin héldu nemendur áfram að vinna í skýrslum sínum og þar sem þeir höfðu sjálfir verið að vinna með sama verkefni þá gátu þeir nýtt sér vinnu og hugmyndir annarra í eigin vinnu. Það var því mjög gagnlegt fyrir þá að hlusta vel og spyrja og leitast við að skilja það sem hinir voru að fjalla um.



Mynd 4: Hrókasamræður um stærðfræði.

Nemendur komust mjög mislangt með verkefnið. Allir nemendur reyndust vera færir um að áætla flatarmál flatanna og finna lausn sem var aðeins betri fyrir sína rannsókn. Þeir sem komust lengst með verkefnið náðu að leiða út almenna lausn á rétthyrnda afskurðinum frá grunni, taka ansi nákvæmt tillit til skurðartapsins og finna umtalsvert betri lausn fyrir rannsókn sína. Hér er það sem greinir bestu verkefni frá þeim slakari ekki fjöldi villna eða rétttra svara og því þarf annan grundvöll til að meta hvað gerir skýrslu

góða og styðja þannig við framfarir nemenda. Við höfum í kennarahópnum valið að kynna fyrir þeim SOLO matskvarðann sem við notum í námsmati, bæði í stærðfræði sem og í náttúruvísindunum og tæknifögum. Hér er framþróun metin í getunni til að mynda tengsl (sjá mynd 5).

og ræddum leiðir til að bæta hana og komast ofar á SOLO matskvarðann. Einnig voru ræddar villur og uppsetningarvandamál sem blöstu við. Nemendur höfðu svo möguleika á að bæta skýrsluna sína og skila aftur.

Samhengislaust	Einstaka samhengi	Brotakennt samhengi	Heildstætt	Sjálfstætt
•				

Mynd 5: Solo matskvarði fer frá samhengislausum texta (1), yfir í texta með einstaka samhengi (2), þá kemur brotakenndur texti með aðskildu samhengi (3), þá heildstæður texti (4) og loks heildstæður og sjálfstæður texti.

Vinna með stærðfræðilegar skýrslur gefur færi á að vinna verkefni með lágan þröskuld og hátt til lofts og leyfir nemendum ekki að vinna bara á sínu færnisviði, heldur styður við að þeir bæti sig. Nemendur sem annars hefðu ekki skráð neitt hjá sér í vinnu við rúmfræðihlutann og sem gleyma fljótt hvernig á að leysa svona dæmi, skrifa niður helstu reiknireglur, útskýringu á hvað þær segja og hvernig má nota þær. Nemendur sem annars hefðu verið sáttir við að geta reiknað dæmi og eiga einhverjar glósur, spreyta sig á búa til almennar lausnir og nemendur sem hefði verið hægt að fá til að vinna með almennar lausnir fá að spreyta sig á að búa til samhangandi stærðfræðilegan texta sem byggir upp rökstuðning fyrir þeirri stærðfræði sem þarf að nota til að takast á við verkefnið.

Skýrslurnar urðu mislangar, en þó að jafnaði það langar að það hefði verið mikið mál að sitja og leiðrétta sérhverja villu og skila aftur blóðrauðum texta til nemenda. Í staðinn fyrir það var endurgjöf fólgin í samræðum kennara við hvern hóp. Á meðan hinir nemendurnir unnu frekar stöðluð þjálfunarverkefni með svörum, flettum við saman í gegnum skýrsluna

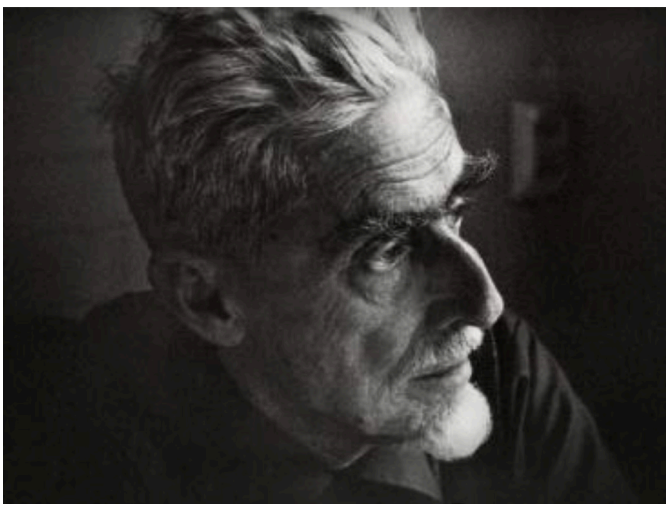
Á þeim þremur árum sem ég kenni þessum nemendum munu þeir gera um það bil 10 svona skýrslur og við munum nota um fjórðung kennslustundanna í að þjálfra þessa færni. Fyrir vikið er óhjákvæmilegt að þeir munu ekki fá sömu þjálfun í reikningshandverkinu og ég fékk þegar ég var í námi. Á móti fá þeir tækifæri til að hugsa dýpra um stærri verkefni en ég fékk að takast á við. Á þessum þremur árum verða verkefnin líka að hryggjarstykki stærðfræðiskilningsins sem við erum að byggja upp og hjálpar nemendum að sjá stærðfræði sem heildstætt hugmyndakerfi sem þeir eru að byggja upp skilning sinn á, í stað þess að upplifa stærðfræðinám sem ósamhangandi runu formúlna og reikniadgerða. Ég er þess fullviss að þetta séu hagstæð skipti.

Héðinn Björnsson
kennari í H. C. Ørsted Gymnasium
Danmörk

STÆRÐFRÆÐI OG LISTIR

Kynning á listamanninum M.C. Escher

Fyrir um tíu árum sótti ég námskeið sem bar yfirskriftina *Stærðfræði og listir*. Þar kynntist ég þökun í anda listamannsins M.C. Escher og varð gjörsamlega heilluð. Það var því óvænt ánægja þegar sonur minn fór til náms í Den Hague í Hollandi en opinbert listasafn M.C. Escher var í 20 mínútna göngufæri frá heimili hans. Ekki varð það til að draga úr áhuganum en í þessari samantekt leitast ég við að gefa nokkra lýsingu á listamanninum sem og verkum hans.



Maurits Cornelius Escher (1898-1972).

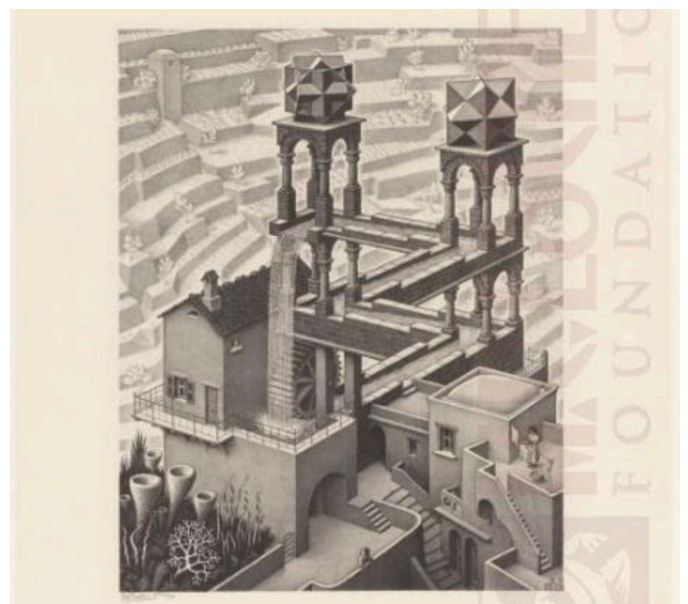
Maurits Cornelis Escher eða M.C. Escher (1898-1972) er einn af frægustu grafíklistamönnum heims. Listir hans eru dáðar af milljónum manna eins og sjá má á mörgum vefsíðum á internetinu. Eitt af því sem er heillandi við M.C. Escher er að verkin hans standa fyrir bæði stærðfræði og listir. Þetta eru tveir mismunandi heimar en í verkum hans færir hann þá saman eins og ef þeir væru einn heimur.

Escher er fæddur í Leeuwarden í Hollandi en þegar hann var fimm ára flutti fjölskyldan til Arnhem þar sem hann eyddi mestum hluta æsku sinnar. Hann hóf nám í arkitektúr við School of Architecture and Decorated Arts í Haarlem en að viku liðinni tilkynnti hann föður sínum að hann vildi hætta námi í arkitektúr og einbeita sér að námi í grafískum listum sem hann og gerði. Á þeim tíma vann hann aðallega að teikningum og dúkrustum.



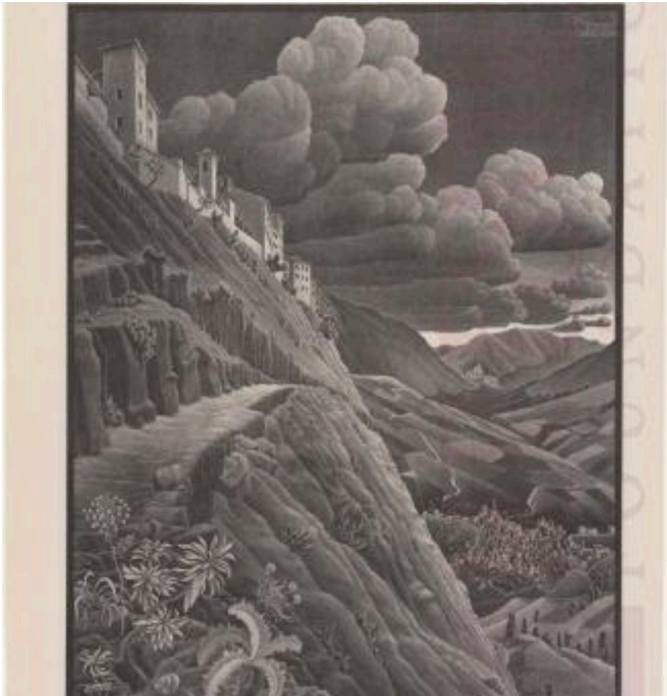
The Borger Oad, Oosterbeek, 1919, dúkrista.

Eftir námið ferðaðist hann um Ítalíu, þar sem hann hitti konu sína Jetta Umiker sem hann giftist árið 1924. Þau fóru til Rómar og bjuggu þar til 1935. Á þessum 11 árum ferðaðist M.C. Escher ár hvert um Ítalíu og vann teikningar og skissur sem hann notaði seinna í vinnustofu sinni fyrir steinprent (e. lithograph), tréskurð (e. woodcut) og tréristur (e. wood engraving). Sem dæmi má nefna að bakgrunnurinn í myndinni *Foss* (1961) kemur frá ítalska tímabilinu.



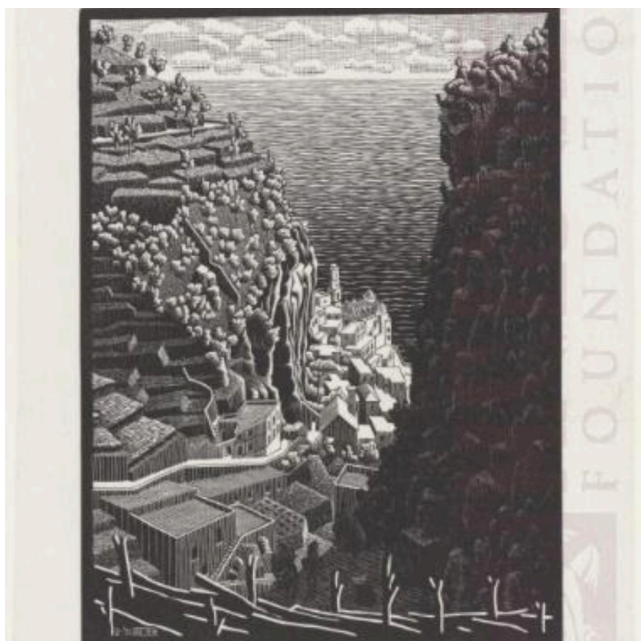
Foss, október 1961, steinprent.

Á þeim tíma sem hann bjó og starfaði á Ítalíu, gerði hann falleg og raunsæ verk eins og *Castrovalva* steinprentið þar sem þegar má sjá hrifningu hans á sjónarhorni: nálægt, langt, hátt og lágt.



Castrovalva, Abruzzi, febrúar 1930, steinprent.

Það sama má segja um steinprentið *Atrani*, sem er lítill bær við Amalfí ströndina á Ítalíu en þar bjó hann til ársins 1931.



Atrani, við strönd Amalfi, febrúar 1932, trérista.

Atrani kemur aftur fram í meistaraverkum hans sem nefnast *Myndbreyting I og II*.

Escher hafði enga formlega þjálfun í stærðfræði. Hann hóf feril sinn sem grafískur listamaður sem gerði tréskurð og steinprent. Sem ungur maður heimsótti hann Alhambra höllina á Spáni og varð heillaður af rúmfræðilegum skreytingum á mórískum flísum. Þessar skreytingar höfðu mikil áhrif á hann sem listamann og í framhaldi af því þá eyddi hann miklum hluta ævi sinnar í tilraunir með viðfangsefni stærðfræðinnar sem við nefnum þökun (e. tessellation) en hún snýst um að fylla flöt með reglulegum formum án þess að þau skarist eða skilji eftir sig göt. Orðið „tessera“ á latínu þýðir lítill teningur úr steini. Þeir voru notaðir til að búa til svokölluð „tessellata“ eða mosaíc myndir sem skreyta rómverskar byggingar. Það getur sýnst einföld hugmynd að þekja flötinn með formum en grunnurinn að því er algjörlega stærðfræðilegur og snýst um samhverfur. Það sem Escher gerði við einföld form var að bæta við þau mannlegri vídd þannig að þau minna okkur á t.d. menn, eðlur og dreka. Síðan notaði hann þessi form til að þekja með.



Án titils.

Vinnu Escher er yfirleitt skipt upp í tvö ólík tímabil. Fyrri verk hans virðast ekki hafa stærðfræðilega tengingu en eftir að hann kemst í tæri við stærðfræðinga má sjá áhrif þess á verk hans þar sem hann fer að leggja áherslu á víddir, lögun rýmis og form.

Escher var heillaður af list stærðfræðingsins Rodger Penrose sem byggði mikið á hinu ómögulega og sjónhverfingum. Má þar nefna *Ómögulega þríhyrninginn* (e. The Penrose Triangle). Escher hefur sennilega verið undir áhrifum frá list Penrose þegar hann gerir myndina *Maður með ferhyrning*.

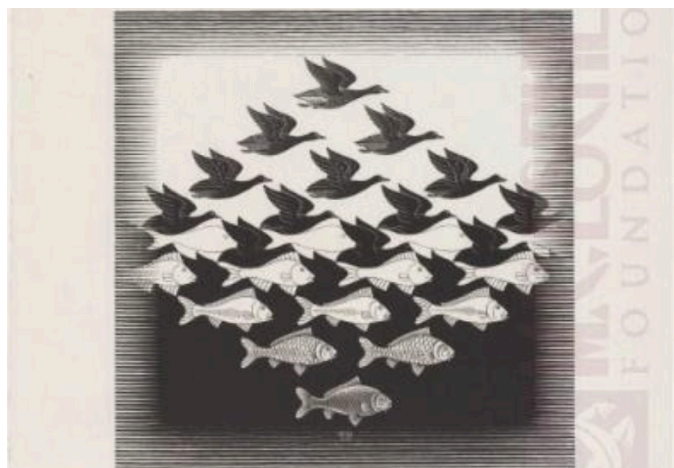


Maður með ferhyrning, 1958, trérista.

Það sem er heillandi við sjónhverfingar er að þær sýna okkur ekki bara heiminn eins og hann er, heldur er það heilinn sem túlkar í raun hvað við skynjum og skapar eitthvað úr því. Þannig myndir gefa heilanum okkar verðug verkefni til að vinna úr. Hvað erum við raunverulega að horfa á? Hvað er það sem við sjáum? Innblásinn af þessum þælingum gerði Escher nokkur af sínum frægustu verkum sem líta út fyrir að vera raunveruleg en standast ekki raunveruleikann. Má þar nefna *Skriðdýr* og *Himinn og vatn I* en sú mynd er notuð í lógó á opinberri vefsíðu safnsins í Den Hague.

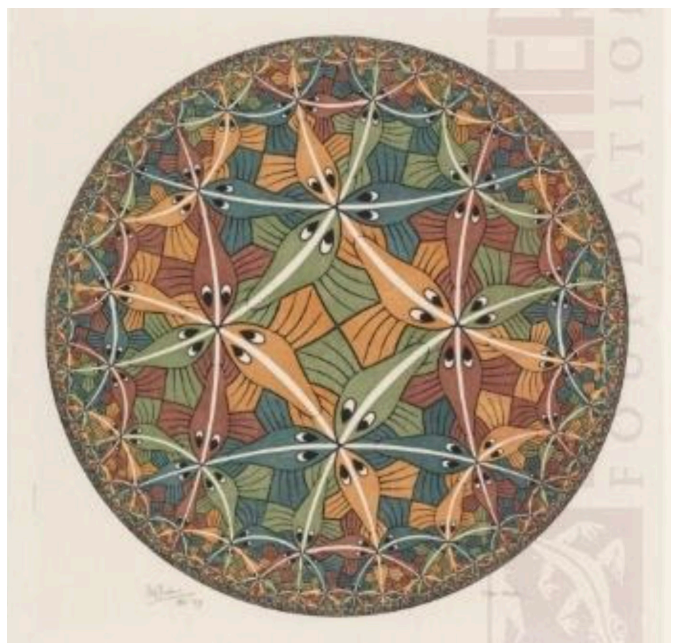


Skriðdýr, mars 1943, steinprent.



Himinn og vatn I, júní 1938, tréskurður.

Escher fær mikinn áhuga á óendanleikanum sem kemur fram í verkum eins og *Takmörk hringsins III* en seinna meir staðfestu stærðfræðingar að hlutföllin til kantanna væru algjörlega rétt.

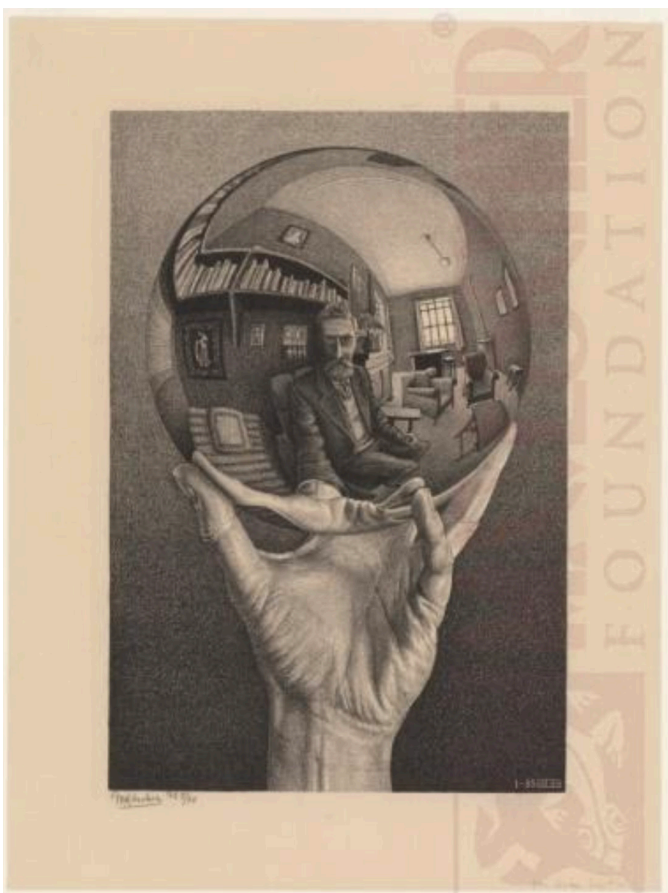


Takmörk hringsins III, desember 1959, tréskurður, unninn í fimm lögum.

Ef þú gengur um stærðfræðideildir háskóla munt þú að öllum líkindum rekast á verk eftir Escher og þau finnast einnig í kennslubókum. Oft á tíðum finnst stærðfræðingum þeir skilja vel hvað Escher var að gera og þær stærðfræðilegu hugmyndir sem lágu að baki. Margir stærðfræðingar telja að Escher hafi tekist að sýna okkur að stærðfræðin getur verið falleg. Viðfangsefni eins og óendanleikinn, speglun

og eðli sjónskynjunar voru honum hugleikin allt fram í andlátíð.

Í verkum Eschers sjáum við frábæra athugun hans á heiminum í kringum okkur og tjáningu hans eigin ímyndunarafls. M.C. Escher sýnir okkur að raunveruleikinn er dásamlegur, skiljanlegur og heillandi sem endurspeglast í sjálfsmynd hans þar sem hann teiknar spegilmynd sína sem speglun af kúlu.



Hönd með kúlu sem endurspeglar (Sjálfsmynd í kúlulaga spegli), janúar 1935, steinprent.

Safnið í Den Hauge

Gestum safnsins í Den Hague býðst að gera slíkt hið sama, nema í dag getum við nýtt okkur ljósmyndun með snjalltækum en heimsókn í listasafnið býður almennt upp á ýmsa möguleika. Þar má skoða hinn mikla fjölda verka og horfa á fræðslumyndband, upplifa sjónhverfingar í anda listamannsins og versla í gallerii sem býður upp á mikið úrval fallegra og fróðlegra muna. Einnig er hægt að versla á netinu.

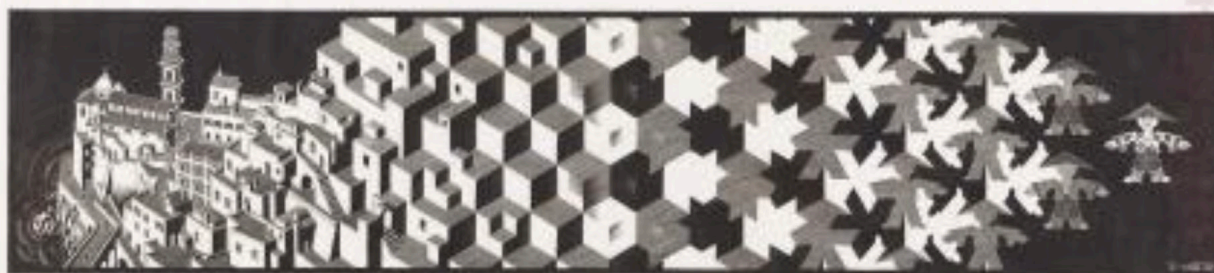
Það er ekki nauðsynlegt að fara á staðinn til að njóta þess sem safnið býður uppá. Á heimasíðu þess er að finna stórt safn verka Escher flokkuð eftir tímabilum o.fl. og eru allar myndirnar í greininni fengnar af henni. Þar er hægt að fræðast, versla og jafnvel skapa eigin myndbreytingu í þar til gerðu forriti. Sjón er sögu ríkari. <https://mcescher.com/>

Verkefni

Á Stærðfræðitorginu, Starfssamfélagi stærðfræðikennara, (<http://staetorg.menntamidja.is>) er að finna fyrirlestur eftir höfund greinarinnar, um þökun í anda Escher. Þar eru einnig verkefnablöð sem hægt er að prenta út og vinna með. Sjá nánar á <http://staetorg.menntamidja.is/2014/10/22/rumfraedi-og-listir/>.

Margt af því sem Escher gerði í höndunum er í dag hægt að gera í forritum á netinu. Í því sambandi langar mig að benda á eina heimasíðu sem gæti komið á óvart en hana er að finna á slóðinni <https://mcescher.com/> og hvet ég ykkur til að prófa.

*Margrét Sigríður Björnsdóttir
aðjúnkt á Menntavísindasviði HÍ*



Myndbreyting I, maí 1944, tréskurður.

STÆRÐFRÆÐIRÁÐSTEFNA Í NOREGI

Novemberkonferansen 2019

Stærðfræðisetur NTNU í Brándheimi hélt sína árlegu ráðstefnu fyrir stærðfræðikennara dagana 26.-27. nóvember 2019. Heiti ráðstefnunnar var *Undirbúningur fyrir grunnþættina* (n. Kickstart på kjerneelementene) og var markmiðið að hvetja norska kennara til að vera vel undirbúnir og fullir af eldmóði og áhuga þegar þeir byrjuðu að vinna eftir nýrri aðalnámskrá skólaárið 2020.

Í skólabyrjun árið 2020 tók ný námskrá í stærðfræði gildi í Noregi. Kynning á henni hófst tveimur árum fyrir gildistöku og er það umhugsunarvert að stærðfræðikennarar voru því búnir að hafa tvö ár til að kynna sér efni hennar og undirbúa sig fyrir breyttar áherslur.

Ráðstefnan er ætluð stærðfræðikennurum í Noregi. Fullbókað var á ráðstefnuna og komust færri að en vildu. Stærðfræðikennarafélögin á Norðurlöndum eiga í samstarfi og var hverju félagi boðið að senda fimm fulltrúa sína á ráðstefnuna og var þess vænst að hvert land væri líka með innlegg á ráðstefnunni. Ingólfur Gíslason var með vinnustofu fyrir Íslands hönd.



Eftirtaldir fimm kennarar frá Íslandi fóru á ráðstefnuna; Ingólfur Gíslason, Birna Hugrún Bjarnardóttir, Þórunn Jónasdóttir, Kristín Einarsdóttir og Margrét Ásgeirsdóttir.

Dagskrá ráðstefnunnar var fjölbreytt og samanstóð af fyrirlestrum og vinnustofum. Við kennarar frá Íslandi sóttum ýmsa fyrirlestra og vinnustofur og fór það eftir áhugasviði okkar og eftir því hvaða aldursstigi við vorum að kenna. Af nógu var að taka. Til dæmis var Peter Liljedahl á ráðstefnunni og var hann bæði með fyrirlestur og vinnustofu um *hugsandi skólastofu*. Það voru um 200 manns á vinnustofunni og var Peter með aðstoðarfólk með sér. Peter er góður fyrirlesari og vinnustofan var mjög skemmtileg og lærdómsrík. Lesa má nánar um Peter Liljedahl í Flatarmál 1. tbl. 2018. Einnig kom Peter til Íslands í júní 2018 og stóð fyrir hugsandi vinnustofu í tvo daga. Lesa má nánar um þá vinnustofu í Flatarmál 1. tbl. 2019.



Áhugasamir kennarar á hugsandi skólastofu í Brándheimi.

Margrét Ásgeirsdóttir skrifar grein hér í blaðið um verkstæði sem hún fór á um þrautalausnir fyrir yngri nemendur og eins og áður segir var Ingólfur Gíslason með vinnustofu á ráðstefnunni og lesa má grein eftir hann í blaðinu um þá vinnustofu.

Birna Hugrún Bjarnardóttir

HVAÐ MERKIR MARGFÖLDUN MEÐ (-1) OG TIL HVERS ER HÚN?

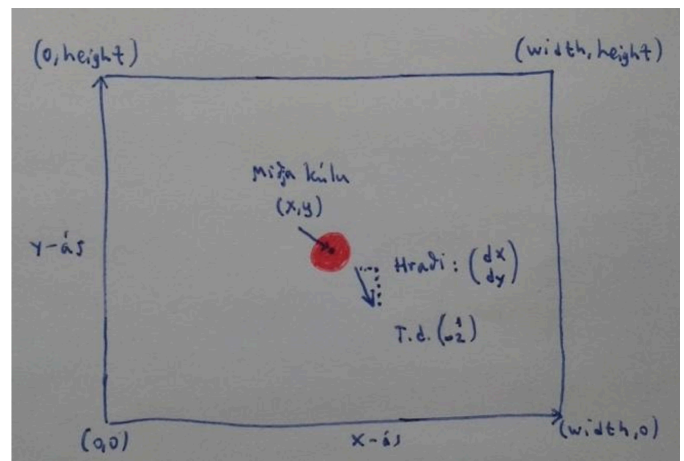
Stærðfræði og gagnvirk tölvugrafík

Markmið stærðfræðináms eru að auka við mátt okkar til merkingar og athafna. Með öðrum orðum lærum við stærðfræði til þess að geta *tjáð*, *hugsað* og *gert* meira. Því miður er þetta ekki upplifun allra nemenda. Þeir kynnast stærðfræðinni sem sundurleitu safni af forskriftum að því hvernig þeir eiga að reikna tilteknar gerðir af æfingadæmum. Ein leið til þess að gefa stærðfræði merkingu og tilgang er að forrita tölvugrafík. Stærðfræði er nauðsynleg til þess að skipuleggja kvika og gagnvirkar myndir á tölvuskjá. Til þess eru notuð stærðfræðileg hugtök eins og til dæmis breytistærðir, hnit, vigra, föll og rökskilyrði. Forritun (og þar með stærðfræði) getur þannig verið miðill til skapandi tjáningar. Í stað þess að nemendur læri um stærðfræðihugtök án þess að gera svo neitt sérstakt með þau, annað en að reikna æfingadæmi, fá þau tilgang og merkingu ef þau nýtast til að búa til tölvuforrit.

Í þessari grein segi ég frá inntaki vinnustofu sem ég hélt á ráðstefnu norskra stærðfræðikennara í Þrándheimi haustið 2019. Í Noregi er verið að innleiða nýja námskrá í framhaldsskólum og í henni eru fyrirmæli um að forritun fái rými í stærðfræðinámi. Norðmenn eru þar með að taka *reiknihugsun* (e. computational thinking) inn í námskrá en það hugtak hefur einnig nýlega verið fellt inn í skilgreiningu Pisa á stærðfræðilæsi. Reiknihugsun felur í sér að geta greint mynstur, hannað og notað óhlutbundin hugtök, brotið verkefni niður í minni verkefni og búið til *reiknirit* (algóritma) til að leysa verkefni. Í minni vinnustofu kynnti ég möguleika forritunar á gagnvirkri tölvugrafík í þessu samhengi. Hér verður reynt að útskýra með einu litlu dæmi hvernig stærðfræðileg hugtök og aðgerðir nýtast við gerð kvikrar tölvugrafíkur og hvernig stærðfræðilega hugtakið fær þannig aukna merkingu.

Hvað merkir margföldun með (-1) og til hvers er hún?

Þegar nemendur forrita tölvuleik eða hreyfimyndir þá eru þeir að búa til hluti sem hafa persónulega merkingu og gildi fyrir sig. Raunveruleg þörf skapast fyrir stærðfræði til þess að þeir geti náð markmiðum sínum. Ég tek eitt mjög einfalt dæmi til að útskýra þetta. Hugsum okkur kúlu sem hreyfist svipað og biljarökúla (sjá mynd 1), eftir beinni línu og endurkastast af veggjum.



Mynd 1: Hönnunarskissa

Forritari þarf að huga að staðsetningu kúlunnar með *hnitum* sem taka stöðugum breytingum. Hann nýtir til þess *breytistærðir*. Einnig þarf að halda utan um það í hvaða átt og hve hratt kúlan hreyfist. Við getum gert það með *vigri* sem segir um hve mörg skref kúlan á að hreyfast í hvert skipti á milli þess sem myndin á skjánum er teiknuð. Hraðavigurinn gæti til dæmis verið þannig að x-hnit kúlunnar eykst um 1 og y-hnitið minnkar um 2 í hvert skipti sem skjárinn er endurteiknaður (eða öllu heldur endurreiknaður!). Við getum orðað þetta þannig að x-þáttur hraðans sé 1 og y-þáttur hraðans sé -2. Forritið virkar þannig að það teiknar kúluna, uppfærir svo hnit hennar út frá hraðavigrinum og teiknar svo aftur kúluna, uppfærir svo hnitin og svo framvegis aftur og aftur.

En hvernig á svo að fá kúluna til þess að snúa við þegar hún rekst á jaðar skjásins (vegg)? Lausnin er að margfalda með (-1) . Ef kúlan er komin út á hliðarjaðar (hægra eða vinstra megin) margföldum við x -þátt hraðans með (-1) og ef kúlan er komin að jaðri uppi eða niðri margföldum við y -þátt hraðans með (-1) . Í þessum viðsnúningi raungerist margföldun með neikvæðri tölu og neikvæðar tölur fá þannig aukna merkingu og gildi. Í framhaldinu verður svo skoðað hvernig forrit getur kannað hvort kúlan sé komin út að jaðri og þá hvaða jaðri, en það er gert með því að athuga hvert hnit kúlunnar er og bera saman við hnit jaðrana.

Kóði og reiknirit

Forritunarkóði er framsetning á reikniriti (algóritma) sem er nákvæmlega skilgreind röð af aðgerðum sem framleiða tiltekna niðurstöðu úr frá gefnum upplýsingum. Í því sem lýst var hér að ofan er niðurstaðan litaðir punktar á tölvuskjá. Útlínun reikniritsins væri hægt að lýsa með eftirfarandi skrefum:

1. Ákveðum breytuheiti: x og y tákna x -hnit og y -hnit kúlunnar, dx táknar x -þátt hraðans, dy táknar y -þátt hraðans. Byrjunargildi eru ákveðin fyrir staðsetningu kúlunnar, hraðavigurinn og hvar jaðrarnir eru.
2. Hreinsum skjáinn.
3. Teiknum jaðrana (rétthyrningur sem er jafn stór og glugginn á skjánum leyfir) og kúluna.
4. Athugum hvort kúlan er komin að jaðri: Ef x hnit kúlunnar er stærra en x -hnit jaðarsins hægra megin, margfaldast dx með (-1) . Samsvarandi athuganir og aðgerðir eru gerðar fyrir hinar þrjár hliðarnar.
5. Uppfærum hnit kúlunnar, x verður að $x + dx$, y verður að $y + dy$.
6. Förum aftur í skref 2.

Til þess að teljast fullgilt reiknirit þyrfti að skrá nánar hvernig hvert skref er framkvæmt. Ef við skoðum nánar fimmta skrefið og brjótum það niður í smærri skref, gætum við lýst því svona:

- Ef x er meira en breidd gluggans eða x er minna en 0 þá margfalda dx með (-1) .
- Ef y er meira en hæð gluggans eða y er minna en 0 þá margfalda dy með (-1) .

Reiknirit þarf alltaf að útfæra í einhverju tilteknu forritunarmáli og ég hef nýtt mér forritunarmálið *Processing* til kennslu, þar sem það er sérstaklega hannað til þess að vera auðvelt að læra og nota til að skapa tölvugrafík. Nýjasta útgáfa þess, sem hentar til að fella forrit inn í vefsíður heitir *p5.js*. Til fróðleiks fylgir raunverulegur bútur úr slíku forriti þar sem athugað er hvort x og y hnitin séu innan veggjanna. Þar sem þvermál kúlunnar er 20 punktar er athugað hvort að x -hnit miðjunnar sé nokkuð meira en eða jafnt x -hniti jaðarsins að frádregnum 10 punktum, og svo framvegis) og ef svo er ekki er viðeigandi þáttur hraðans margfaldaður með (-1) .

```
if (x >= (width-10) || x <= 10)
  {dx = dx*(-1);}

if (y >= (height-10) || y <= 10)
  {dy = dy*(-1);}
```

Skoða má forritið í heild sinni á slóðinni <https://editor.p5js.org/rafauga/full/LNma61q-W>.

Endurlit og horfur

Innblásturinn að þeirri nálgun sem hér er lýst er ekki síst að finna í skrifum Seymour Papert, til dæmis í bók hans *Mindstorms* (1980). Hann taldi að fólk lærði best

þegar það er að búa eitthvað til sem hefur persónulega merkingu og gildi fyrir það og hann hafði óbilandi trú á þeim boðskap að forritun væri öflugasti miðillinn til þess að þróa stærðfræðilega hugsun í og skapa með. Hann lagði áherslu á að í stað þess að tölvan „forritaði“ börnin (eins og með forritum sem eiga að æfa þau í reikningi eða kennslumyndböndum sem mata þau á upplýsingum) ættu börnin að forrita tölvurnar, nota þær til þess að skapa skemmtilega hluti.

Vinnustofan sem ég hélt í Noregi byggir á eldri vinnu og hugmyndum sem ég hef gert tilraunir með í um

það bil áratug. Ég hef kennt áfanga sem byggja á þessum hugmyndum, einu sinni í Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ, ásamt Valgarði Má Jakobssyni og einu sinni í Kvennaskólanum í Reykjavík, þar sem Ársæll Músson kenndi einnig með mér. Síðustu tvo vetur hef ég svo kennt um efnið innan námskeiðsins *Rými til sköpunar og samþættingar í skólastarfi: Stærðfræði, náttúrugreinar og upplýsingatækni* við Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Ingólfur Gíslason

PRAUTALAUSNIR Á YNGSTA STIGI GRUNNSKÓLANS

Í nóvember 2019 bauðst mér að sitja ráðstefnu Matematikksenteret í Þrándheimi um stærðfræðikennslu í anda hæfniviðmiða nýrrar námskrár í Noregi. Þar sem þrautalausnir eru mitt áhugasvið í kennslu á yngsta stigi valdi ég að segja hér frá fyrirlestri Tone Scori sem á margt sameiginlegt með mér. Við erum báðar með langan starfsferil sem kennarar ungra barna og ástríða okkar er kennsla í þrautalausnum og verðugum viðfangsefnum sem vekja áhuga barna á stærðfræði.



Hér kynnir Tone þrautina: Trésmiður var að smíða stóla með 3 fótum og borð með 4 fótum. Dag einn hafði smiðurinn notað 33 fætur. Hvað getur hann hafa smíðað marga stóla og mörg borð?

Tone Scori er kennari á yngsta stigi í Billingstad skole í Noregi. Hún flutti áhugaverðan fyrirlestur um þrautalausnir í kennslu yngri barna með yfirskriftinni „Problemlösning, det er bare noe vi må fikse“. Hún sýndi fram á mikilvægi þess að börn fái tækifæri til að hugsa sjálfstætt og vinna með öðrum að lausnum verkefna þar sem eru margar lausnarleiðir og jafnvel getur niðurstaðan verið mismunandi. Börnin þurfa að ræða og rökstyðja lausnir sínar fyrir félögum og sannfæra þá um að þeirra lausn og niðurstaða sé rétt. Samræðan um hvað er dýr og hvað er ekki dýr, ef dæmið fjallar um hversu margir fætur voru á dýrunum í örkinni hans Nóa, getur leitt til ólíkra niðurstaðna. Rökfærslan getur ráðið úrslitum um hvaða svar er rétt að mati hópsins. Getur verið að fleiri lausnir séu réttar? Er endilega eitt rétt svar? Ef við teljum að stærðfræðikennsla eigi að efla rökhæfni barna þurfa þau að fá viðfangsefni sem hafa mismunandi lausnir og lausnarleiðir svo þau fái að þjálfa hæfni sína í rökstuðningi.

Tone lagði fyrir okkur nokkrar þrautir. Viðfangsefni þeirrar fyrstu er „leynitalan mín“:

- Talan er 6 tölustafir.
- Tölustafirirnir í einingasætinu og tugasætinu eru tvær lægstu oddatölurnar. Hinar tölurnar eru sléttar og engin eins.
- Tölustafurinn í hundraðasætinu er summa talnanna í einingar- og tugasæti.
- Tölustafurinn í þúsundasætinu er tvisvar sinnum tölustafurinn í tugasætinu.
- Tölustafurinn í hundraðþúsundasætinu er tvöfaldur tölustafurinn í hundraðasætinu.
- Í þessari þraut eru tvær lausnir.

Rannsókn barnanna við þrautalausnina fær þau til að finna mynstur og samhengi innan þrautarinnar. Þau þurfa að finna lausnarleiðir í þraut sem þau hafa ekki leyst áður. Ef þau leysa endurtekin dæmi þar sem þau þekkja launarleiðina reynir lítið á hugsun þeirra.

Tone skilgreinir átta atriði sem kennarinn verður að skoða í kennslunni.

1. Hver talar mest í samræðum hópsins?
2. Hvers konar spurningar nota ég?
3. Hvaða börn svara spurningum mínum?
4. Hversu vel hlusta ég á svör barnanna og reyni að skilja hvað þau eru að segja?
5. Hvernig vinn ég úr svörum barnanna?
6. Hvernig umorða ég svör barnanna?
7. Hversu örugg eru börnin – þora þau að tjá hugmyndir sínar og gera mistök?
8. Hvernig eru samskiptin?

Hlutverk barnanna er að útskýra hugsun sína, tjá skoðanir, spyrja út í hugmyndir annarra og ræða nýjar hugmyndir, rökstyðja og útskýra lausnarleiðir sínar við stærðfræðileg viðfangsefni.

Hvað einkennir þrautir og verðug viðfangsefni?

- Upphafið þarf að vera á því stigi að öll börnin geti tekið þátt.
- Börnin þurfa að upplifa áskorun og fá nægan tíma til úrlausnar.
- Verkefnin er hægt að leysa á mismunandi hátt, nota má mismunandi aðferðir og framsetningu.
- Stærðfræðilegar umræður út frá lausnarleiðum barnanna. Í umræðum þarf að leggja áherslu á ólíkar lausnarleiðir og stærðfræðilegar hugmyndir þeirra.
- Verkefnin byggja brýr milli stærðfræðilegra viðfangsefna.
- Verkefnin geta leitt til þess að börnin komi fram með nýjar áhugaverðar þrautir.
- Kynna mikilvægar hugmyndir og stærðfræðiaðferðir.

Undanfarna tvo áratugi hef ég samið og lagt þrautir fyrir börn á yngsta stigi, hlustað á þau útskýra hugsun sína og leitt umræður um mismunandi lausnarleiðir. Á fyrirlestri Tone Scori opnuðust nýjar víddir fyrir mér og ég sannfærðist um að í íslenskum skólum þarf að leggja enn meiri áherslu á stærðfræðileg viðfangsefni sem opna fyrir stærðfræðilegan þankagang. Ég óttast að kennarar leggi of mikla áherslu á að komast yfir námsefnið svo hægt sé að leggja fyrir námsmat úr því. Við þurfum að velja úr námsefninu og leggja áherslu á verðug viðfangsefni þar sem börn fá tækifæri til að rökstyðja lausnarleiðir sínar í samræðum við jafnaldra. Þau eiga að fá kennslu sem leiðir til aukins sjálfstæðis og eflir áræðni og þor til að glíma við áskoranir. Börn þurfa að finna tilgang með stærðfræðináminu og tengja það við raunverulegar aðstæður sem þau þekkja.

Margrét Ásgeirsdóttir kennari í Melaskóla

GLÍMAN VIÐ MARGFÖLDUNARTÖFLUNA

Þegar kennarar koma saman og ræða um stærðfræðikennslu ber umræður oft að sama brunni. Nemendur, foreldrar, næsta skólastig eða jafnvel samfélagið sjálft virðist vilja að nemendur kunni tiltekna hluti eins og margföldunartöfluna reiprennandi utanbókar, jafnvel án umhugsunar, en kennarar vilji sjálfir kenna til skilnings. Sumir telja jafnvel að skilningskraftan sé ný, hið hefðbundna sé utanaðbókarlærdómurinn.

Þessi sígildu viðfangsefni stærðfræðikennara hafa lengi verið þeim hugleikin. Guðmundur Arnlaugsson, sem var dádur og fjölmenntaður stærðfræðikennari í Menntaskólanum í Reykjavík og síðar rektor Menntaskólans við Hamrahlíð, var helsti forvígismaður þess að innleiða hina umtöluðu nýju stærðfræði á sjöunda áratug tuttugustu aldar. Hann sagði, þegar hann var að tala fyrir breytingunum á stærðfræðikennslu, árið 1967:

... mönnum hefur að mjög verulegu leyti sést yfir innra gildi stærðfræðinnar. Tækifæri til að kynna börnum og unglingum þá fegurð sem býr í stærðfræðilegri hugsun, jafnvel þegar hún fjallar um einföldustu frumatriði, hafa verið vanrækt. Börnin hafa stundum verið þreytt á síendurteknum fangbrögðum af sama tagi við lífvana tölur í stað þess að eignast nýja og góða kunningja í lifandi tölum, kynnast sérkennum einstakra talna, sjá hvað liggur að baki þeim reikningsaðferðum, er þeir læra... Áhersla á leikni og vélrænum vinnubrögðum hefur þokað fyrir kröfum um aukinn skilning. Þessi þróun hefur ýtt nokkrum grundvallarhugtökum úr rökfræði, mengjafræði og algebru niður á barnaskólastig.

Athyglisverð er setningin um að börnin glími í sífellu við lífvana tölur í stað þess að eignast nýja og góða kunningja í lifandi tölum, og kynnast sérkennum einstakra talna.

Að eignast kunningja í lifandi tölum

Sjaldfundnir eru páfagaukar sem þylja margföldunartöfluna. Orðtakið „að læra eins og páfagaukur“ ber því að skilja í yfirfærðri merkingu. Átt er við að hugsunin sé annars staðar, að hún beinist ekki að kjarna verksins. Alkunna er að erfitt er að stjórna hugsunum fólks, fá það til að einbeita sér að því sem ætlast er til. Þar kemur kunnátta og tækni kennarans til sögunnar.

Tölurnar, jafnvel margföldunartaflan, geta lifnað við þegar þær eru teknar til umræðu. Þær búa margar yfir forvitnilegum eiginleikum og ólíkum. Sem dæmi má nefna hve tölurnar 23 og 24 eru ólíkar, fjöldi talna gengur upp í 24 en engin nema einn og talan sjálf upp í 23. Sama má segja um talnaröðina 59, 60 og 61. Alls konar spurningar vakna þegar tölur koma til umræðu, spurningar sem gætu orðið til að stofna til góðra kynna við tölurnar. Hér eru nokkrar:

Af hverju skyldu allar tölurnar í fimm sinnum töflunni enda á 0 eða 5?

Vissir þú að þversumma talnanna í níu sinnum töflunni er alltaf 9? Hvers vegna er það?

Hvers vegna gengur 6 aldrei upp í oddatölu?

Getur þá 3 gengið upp í slétta tölu?

Hvers vegna skyldi talan 60 gegna svo stóru hlutverki í klukkunni?

Hvað er merkilegt við töluna 1729?

Frumþættir talna eru einskonar byggingarkubbar talnanna. Marga ánægjustund má skapa út frá föndri með þessar byggingareiningar, stórar tölur, litlar tölur, sléttar tölur, oddatölur, ...

Þeir sem kunna margföldunartöfluna kannast við þetta:

$$4 \cdot 4 = 16 \quad 3 \cdot 5 = 15 \text{ (en 4 er meðaltalið af 3 og 5)}$$

$$5 \cdot 5 = 25 \quad 4 \cdot 6 = 24 \text{ (en 5 er meðaltalið af 4 og 6)}$$

$$6 \cdot 6 = 36 \quad 5 \cdot 7 = 35 \text{ (en 6 er meðaltalið af 5 og 7)}$$

Spurningin er af hverju munar alltaf einum á margfeldunum x^2 og $(x - 1)(x + 1)$? Það fer auðvitað eftir kunnáttu og þroska nemendanna hve formlega spurningin er sett fram, rædd og henni svarað. Þótt formlega framsetningin með breytistærðum biði síns tíma má leika með kubba og prófa að breyta $3 \cdot 5$ í $4 \cdot 4$, $4 \cdot 6$ í $5 \cdot 5$ o. s. frv.

Talan 1729 er nefnd *leigubílstalan* meðal stærðfræðinga. Indverski stærðfræðingurinn Srinivasa Ramanujan var sagður hafa átt vin í sérhverri heilli tölu. Hann spurði breska stærðfræðinginn Hardy eitt sinn um númerið á leigubílnum sem Hardy hafði komið með í heimsókn til Ramanjuans á sjúkrahús. Hardy sagði að númerið væri fremur ómerkilegt, 1729. Ramanjuan sagði svo alls ekki vera, 1729 væri fyrsta talan sem væri hægt að rita á tvo vegu sem summu tveggja þrívelda af jákvæðum heiltölum, x og y , þannig að $x^3 + y^3 = 1729$. Ekki er rétt að skemma gátuna með því að birta lausnina. Hún er ekki torfundin þegar þess er gætt að 123 er hæsta þríveldið lægra en 1729. Þessi saga kemur fram í kvikmyndinni *The Man Who Knew Infinity* sem gerð er eftir samnefndri bók eftir Robert Kanigel.

Væntingar um skilning í stærðfræði

Íslenska sögnin að *skilja* hefur tengst stærðfræðinámi að minnsta kosti frá 13. öld. Hana er að finna í flestum íslenskum kennslubókum í reikningi frá fyrri öldum ásamt bróður hennar, nafnorðinu *skilningur*. Nefna má nokkra víðlesna og góða fulltrúa stærðfræðimenntunar á Íslandi á sinni tíð:

- *Algorismus*. Ritgerð um hinar sjö greinar reikningslistarinnar, talin upphaflega rituð

á 13. öld. Elsta handrit hennar er varðveitt í handritasafninu *Hauksbók*, þeim hluta sem skráður var 1306–1308.

- Tvær fyrstu heildstæðu prentuðu reikningsbækurnar á íslensku: frá átjándu öld: *Greinileg vegleiðsla* eftir Ólaf Olavíus (1780), og *Stutt undirvísun* eftir Ólaf Stefánsson (1785).
- *Reikningsbók* eftir Eirík Briem (1869, 1880), útbreiddasta kennslubókin í reikningi fyrir unglinga um 1880 þegar fyrsta löggjöfin var sett um uppfræðslu í skrift og reikningi, fram yfir 1911.
- *Reikningsbók* eftir Ólaf Daníelsson (1906). Þriðja útgáfa hennar frá 1920 varð áhrifamesta kennslubókin í reikningi fyrir unglinga á Íslandi á fyrri hluta tuttugustu aldar.



- *Tölur og mengi* eftir Guðmund Arnlaugsson (1966). Bókin er inngangur að hinni svonefndu „nýju stærðfræði“ sem breiddist út um heiminn á sjöunda áratug tuttugustu aldar. Bókin var kennd nemendum sem stefndu á framhaldsskóla 1966–1976.

Í *Algorismus* er því lýst með orðum að margfalda megi tölu þannig að margfalda hana fyrst með tíu og draga hana svo frá jafnoft og munar á henni og tíu. Í íslensku þýðingunni stendur til skýringar, lauslega túlkað: Svo að þú *skiljir* þetta skaltu margfalda sjö með níu, það eru $10 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 63$.

Í *Greinilegri vegleiðslu* (1780) segir til dæmis í formála:

Sumir *skilja* fljótar en sumir, en því mega þeir eigi, sem skjótnæmir eru eða vissu áður, kalla það óþarfa mælgí, er ég segi greiniliga frá því sem þeim virðist auðvelt. Hinum er hún til nota er lítið skynja. Né heldur mega þeir, sem veikari *skilning* hafa, láta sér þegar í augu vaxa það sem þeir eigi fá numið af bráðgirni sinni, en leitist heldur við sigrast á slíku með iðulegum lestri og athygli.

Höfundarnir brýna einbeitni og þolinmæði fyrir lesandanum, en allar bækurnar nema *Tölur og mengi* voru samdar með sjálfsnám í huga, skólar voru fáir.

Kenningar um skilning

Fræðimenn hafa sett fram kenningar um eðli skilnings. Þeirra á meðal eru Richard Skemp (1978) og Anna Sierpínska.

Richard Skemp (1978) greindi á milli *vélræns skilnings* (e. *instrumental understanding*) og *tengslaskilnings* (e. *relational understanding*). *Vélrænn skilningur* væri bundinn við að þekkja einstök atriði án þess að tengja við annað eða fyrra numið efni, eða það sem oft er nefnt utanaðbókarlærdómur. Um sé að ræða *tengslaskilning* í námi þegar ný hugtök tengist inn í net hugmynda og áður aflaðrar þekkingar.

Anna Sierpínska (1994) greindi á milli *skilningsgerninga* (e. *acts of understanding*) og *skilningsferla* (e. *processes of understanding*). *Skilningsgerningur* sé að tengja í hugarum viðfang sem á að skilja (e. *object of understanding*) við annað viðfang. *Skilningsferli* mætti líta á sem net skilningsgerninga sem tengdir

eru með röksemdafærslu. Skilningsgerningar og röksemdafærsla í einu *skilningsferli* myndi saman þétt net.

Kennsla til skilnings kallar á hið vandasama verk að örva og rækta skilning með þéttu neti tenginga samkvæmt kenningum þeirra Önnu Sierpínsku og Richards Skemps.

Framundan

Það getur villt fyrir að vélrænn skilningur getur þróast við vélræna þjálfun margra verkefna af sama tagi í hljóðlátu og friðsamlegu andrúmslofti þar sem agi virðist vera í besta lagi. Eitt hið brýnasta sem kennaranemar þurfa að læra og þjálfá með sér er að stýra umræðum með hnitmiðuðum hætti þar sem athygli nemenda er beint að kjarna viðfangsefnanna og tengingu þeirra við fyrra nám, svo að nemendum verði tamt að færa rök fyrir því sem þeir gera og að þeir líti á það sem órjúfanlegan þátt stærðfræðináms.

Kennurum er því falið hið vandasama hlutverk að örva nemendur til umræðu og hjálpa þeim að tengja fróðleiksmolana saman í þéttrið net. Ungir nemendur, til dæmis á miðstigi, eru fróðleiksfúsir og hafa gaman af að uppgötva sjálfir mynstrin í tölunum. Takmarkið er auðvitað leikni í talnameðferð, að nemendum detti til dæmis strax í hug $3 \cdot 7$ þegar þeir sjá 21, að akurinn verði orðinn plægður þegar algebran tekur við og finna þarf sameiginlega þætti í liðastærðum. Umfram allt þurfa nemendur að finna til gleði við að kynnast tölunum, að glíman við tölurnar veiti tilfinningu fyrir uppgötvun.

Kristín Bjarnadóttir
Prófessor emerita

Heimildir

Guðmundur Arnlaugsson. (1967). Ný viðhorf í reikningskennslu. *Menntamál*, 40 (1), 40–51.

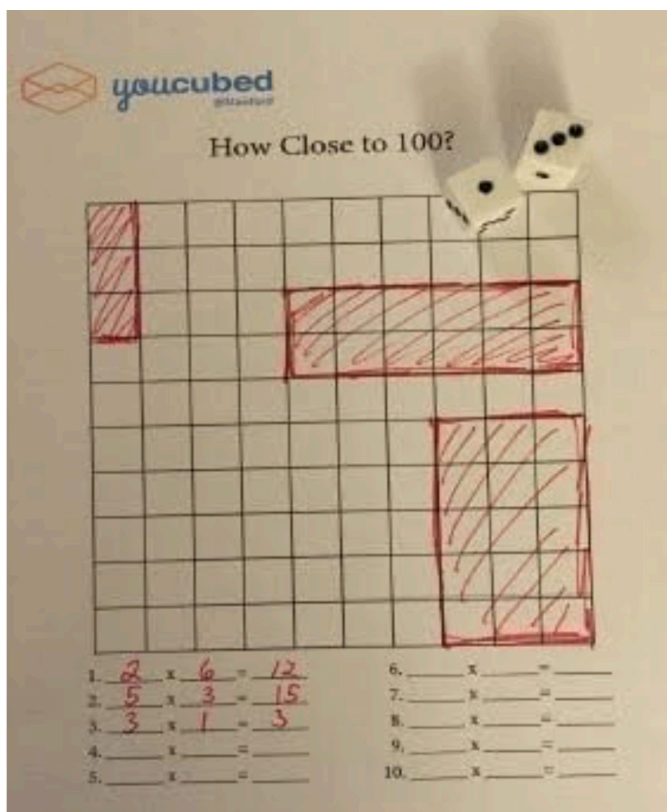
Sierpínska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. R. (1978). *Relational and instrumental understanding*, *Arithmetic Teacher*, 26, 3, 37–50.

REIKNIADGERÐIRNAR MARGFÖLDUN OG DEILING TENGÐAR FLATARMÁLI

Jo Boaler hefur gefið út nokkrar bækur með verkefnum fyrir nemendur ásamt því að birta verkefni á vefsíðunni youcubed.org. Bækurnar eru skipulega uppsettar með fjölbreyttum verkefnum sem tengjast þeim viðfangsefnum sem hún telur að skipti máli í stærðfræðikennslu.

Í margföldun hefur Boaler lagt áherslu á að tengja saman margföldun og flatarmál. Sem dæmi má nefna verkefnið *Hversu nálægt 100?* (e. How close to 100?) þar sem nemendur helga sér svæði með því að kasta tveimur teningum, margfalda saman tölurnar sem upp koma og lita jafnstórt rétthyrnt svæði á rúðustrikað blað með 100 rúðum ($10 \cdot 10$).



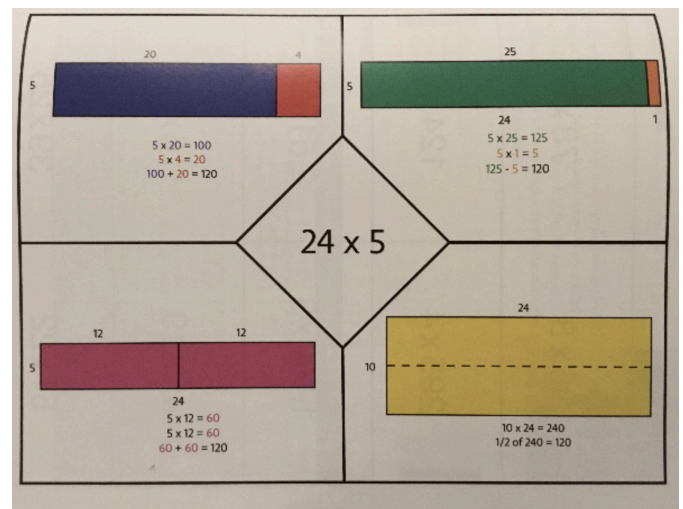
Í bókinni *Mindset Mathematics, Grade 4* eru áhugaverð verkefni þar sem annars vegar er unnið með margföldun og hins vegar með deilingu. Í inngangi að þeim kafla segir frá tveimur rannsakendum í Englandi sem rannsökuðu hvaða leiðir nemendur (7-13 ára) völdu þegar þeir unnu með tölur. Í ljós koma að það sem greindi á milli nemenda sem stóðu sig vel í

stærðfræði og þeirra sem stóðu sig verr, var ekki að fyrrgreindi hópurinn hefði meiri þekkingu heldur höfðu þeir lært að nýta sér samsetningu talna þegar þeir unnu með þær. Þegar þeir sáu reikningsdæmi þá tóku þeir tölurnar í sundur til að gera þær „vinalagra“ eins og til dæmis að nýta margfeldi af 10.

Það skiptir miklu máli að geta unnið með samsetningu talna þegar unnið er með reikniadgerðirnar margföldun og deilingu. Jo Boaler telur að sú aðferð sem lögð er áhersla á í kaflanum hjálpi nemendum að auka talnaskilning sinn og færni í að brjóta upp tölur auk þess sem þeir átta sig betur á tengslum margföldunar og deilingar.

Margföldun

Á myndinni hér fyrir neðan eru sýndar fjórar leiðir til að margfalda saman tölurnar 24 og 5.



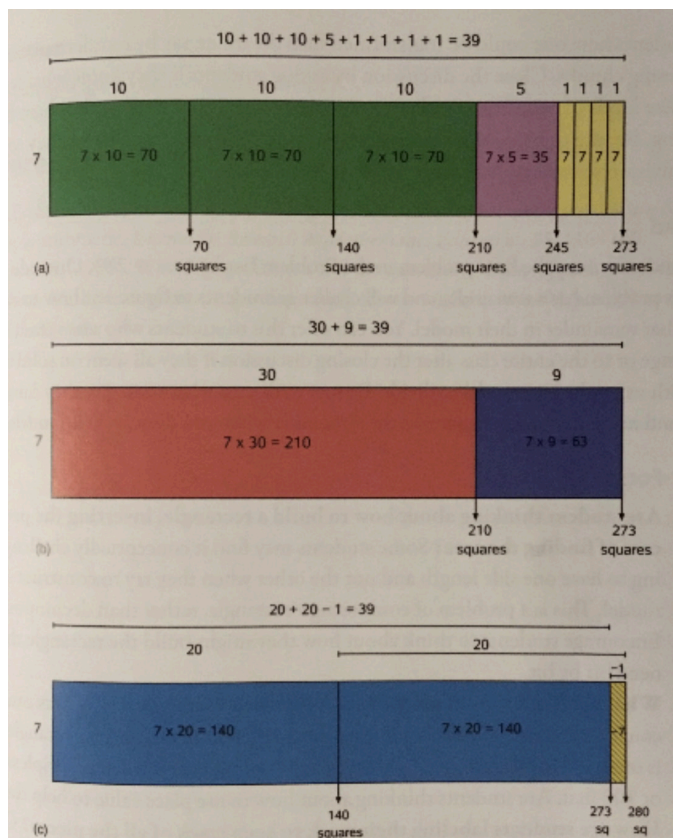
Önnur hlið rétthyrningsins er 24 og hin er 5. Hvert er flatarmálið?

Allar lausnaleyðirnar eru hugsaðar út frá fletinum $24 \cdot 5$. Ein leiðin er hugsuð út frá því að finna margfeldi tveggja „vinalagra“ talna og leggja niðurstöðurnar saman. Önnur leiðin er hugsuð út frá margfeldi tveggja „vinalagra“ talna og síðan er önnur dregin frá hinni. Þriðja leiðin er að helminga aðra töluna og leggja síðan margfeldi þeirra saman og síðasta leiðin er að tvöfalda aðra töluna og helminga síðan útkomuna.

Mikilvægt er að átta sig á að það eru til ótal margar aðrar leiðir og fer það eftir hverjum nemanda hvaða leið hann velur.

Deiling

Á myndinni hér fyrir neðan má sjá þrjár mismunandi leiðir til að vinna með deilingardæmið $273 : 7$.



Hér er flatarmál myndarinnar 273 og styttri hliðar rétthyrningsins er 7. Hver er lengdin á langhliðunum?

Eins og sjá má á myndinni er neðri langhliðin á rétthyrningunum notuð sem talnalína. Efsta myndin sýnir að margfeldið af 10 er notað, síðan margfeldið af 5 og svo margfeldið af 1 þar til búið er að „klára“ töluna 273 upp til agna. Síðan eru tölurnar á efri langhliðinni lagðar saman og útkoman er 39 sem er þá lengd langhliðarinnar. Næsta mynd sýnir að strax er ákveðið að setja 30 upp á langhliðina og þá er búið að nota 210 af flatarmálinu. Eftir eru 63 og þá hentar vel að vita að $7 \cdot 9 = 63$. Þar sem $30 + 9 = 39$ er það lengd langhliðarinnar. Neðsta myndin er hugsuð út frá 280 því það er „vinalægri“ tala en 273. Einnig er vitað að

7 gengur upp í 28. Flöturinn er stækkaður aðeins og síðan helmingaður því vitað er að $7 \cdot 20 = 140$ og $2 \cdot 140 = 280$. Þá er eftir að minnka flötinn um sjö af því $280 - 273 = 7$ og þar sem $7 \cdot 1 = 7$ þá þarf að draga 1 frá efri langhliðinni og 7 frá flatarmálinu. Þá fæst að lengd efri langhliðar er $40 - 1 = 39$.

Þær þrjár leiðir sem hér eru sýndar eru aðeins hluti af þeim ótal leiðum sem hægt er að fara við að finna lausn á þessu dæmi.

Birna Hugrún Bjarnardóttir

Heimildir:

Verkefni tekið af vefsíðunni <https://www.youcubed.org/tasks/how-close-to-100> 14. nóvember 2019.

Boaler, Jo, Munson, Jen og Williams, Cathy. 2017. *Mindset Mathematics, Grade 4*. San Francisco; Jossey Bass.

Eldfjallið

Viðfangsefni:

Margföldun/deiling, sléttar tölur og oddatölur.

Gögn:

Hundraðtalnatafla, spilastokkur (ás-tíu) og litir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Markmiðið er að mynda samfellda slóð niður töfluna áður en eldfjallið gýs. Þátttakendur skiptast á að draga spil og lita reit.

Spilareglur:

1. Ef dreginn er ás má lita hvaða oddatölu sem er.
2. Ef dreginn er tvístur má lita hvaða slétta tölu sem er.
3. Ef dregin eru önnur spil verður tala að vera þáttur í tölu sem lituð er.

Góðar spurningar:

Af hverju valdir þú þessa tölur til að lita? Hvernig veistu að þessi tala gengur upp í 75? Hvaða tölur ertu að skoða? Hvað myndir þú gera næst?

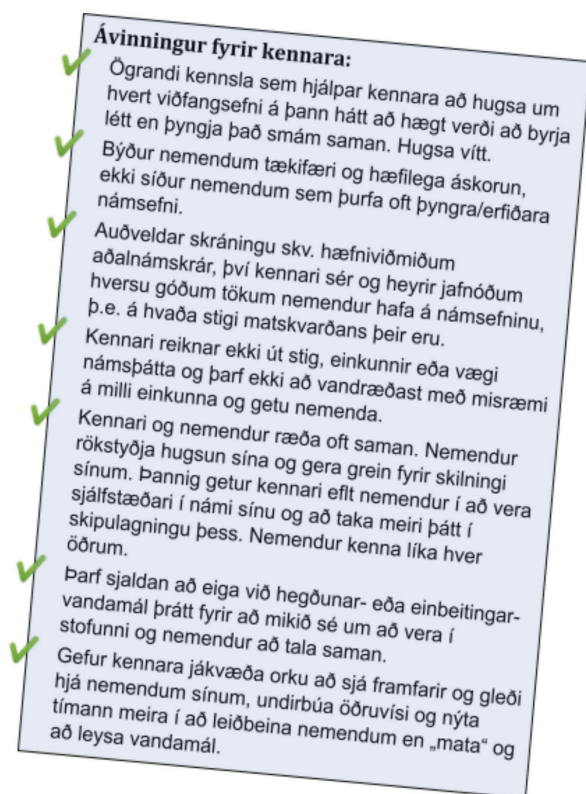
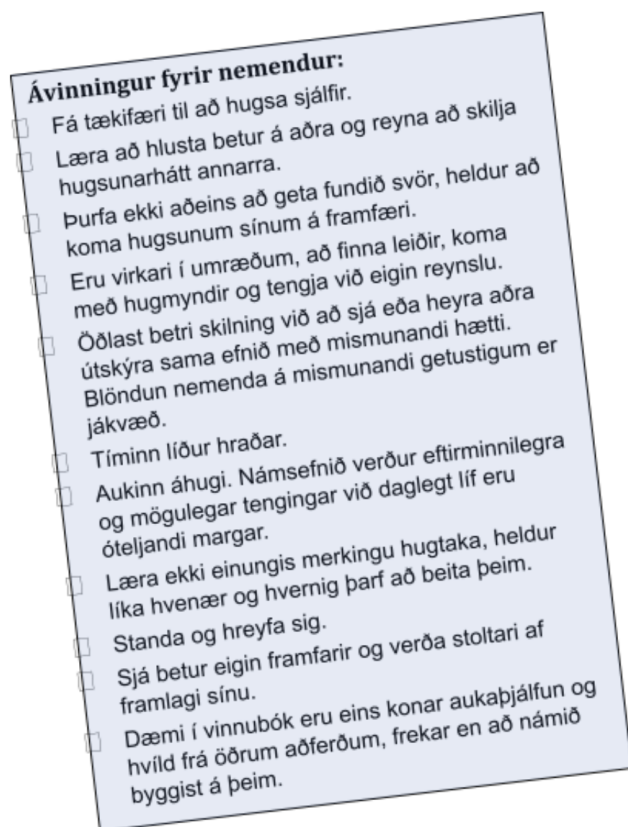
Heimild: <https://www.lovemaths.me/games>

HUGSANDI OG SJÁLFSTÆÐIR NEMENDUR

„Búinn?!? Er kominn hádegismatur strax????
Tíminn getur ekki verið búinn! Oooo, við
vorum einmitt að verða tilbúin í næstu
áskorun.“

Þetta heyrir í lok kennslustunda þar sem hvorki kennarinn né nemendur hafa stoppað í a.m.k. klukkustund. Það er farið að rjúka svo mikið úr heilum nemenda að við grinumst með að það þurfi að reykræsta stofuna og allir eru orðnir MJÖG svangir. Svona kennslustundir þurfa að enda á umræðum um hvers vegna heilinn þarf mikla orku og muna að hafa hressingu á undan svona stífri hugsun. Kennarinn er líka þreyttur en fullur af jákvæðri orku, því hann tók eftir alls kyns framförum þegar kviknaði á ýmsum perum hjá nemendum og gleðinni sem það vakti hjá þeim að finna nýjar leiðir, skilja betur og geta talað saman.

Svona enda langflestar kennslustundir þegar unnið er með *umræður* og *opin viðfangsefni*, óháð því hvort viðfangsefnið tengist tungumálum, stærðfræði, verk- og listgreinum, náttúrufræðigreinum, sögu eða hverju sem er. Nemendur eru virkari og einbeita sér betur þrátt fyrir að ekki sé allt kyrrt og hljótt í stofunni. Kennarinn leiðbeinir og hvetur í stað þess að „leggja inn“. Hann spyr leiðandi spurninga eða spurninga sem koma af stað umræðum eða vangaveltum sem þarf að finna rökstuðning fyrir eða gegn í stað þess að svara sjálfur mismörgum tengdum og ótengdum spurningum þar til nemendur segjast verið „búinir“. Innlögn nýrrar þekkingar eða beiting nýrrar færni fer fram á annan og fjölbreyttari hátt.



Ég hef alla tíð teygst mig aðeins út fyrir hefðbundinn ramma í kennslu. Ég vil að nemendur mínir geti hugsað sjálfir, velt fyrir sér, rætt og rökstutt, frekar en að „vera búinir“ með verkefni eða fá 10 á prófi.

Ég hef líka leitað leiða sem hæfa betur „stigvaxandi matskvarða“ hæfniviðmiða eins og aðalnámskrá gerir ráð fyrir í staðinn fyrir einkunnir.

Þó að einstaklingar læri með mismunandi hætti finn ég alltaf hve sterka þörf nemendur mínir, sama á hvaða aldri, hafa fyrir því að læra með því að ræða saman og prófa sjálfir, gera mistök, læra af reynslunni og tengja námið við daglegt líf til að sjá tilgang. Þeir vilja vita hvað þeir fá sjálfir út úr þessu námi. Námi sem byggist ekki á einkunnagjöf heldur á að byggja upp færni með því að taka eitt skref í einu og læra að takast á við lífið.

Í vetur er ég umsjónarkennari nemenda í 2. og 4. bekk, sem eru 14 nemendur samtals. Stundum er öllum nemendum yngsta stigs blandað saman með mismunandi hætti eftir viðfangsefnum og stundum velja þeir sjálfir hvar og hvernig þeir vinna. Eins og í öllum nemendahópum er mikil breidd hvað varðar getu, áhuga, einbeitingu og aðrar þarfir. Ég er einnig í leiðtoganámi í stærðfræði í fjarnámi frá HÍ til að opna kennslu mína enn frekar, hvetja aðra kennara til þess líka og leiðbeina þeim í að stíga skrefin. Í skólanum okkar vinna kennarar oft saman á ýmsan hátt og við höfum prófað opin viðfangsefni á mörgum sviðum til viðbótar við stærðfræðina. Meðal annars höfum við unnið verkefni um bílaeign og ökunám.

Ég nýti mér umræður og opin viðfangsefni með hverri vinnulotu, að meðaltali einu sinni til þrisvar í viku, auk þess að hvetja nemendur ALLTAF til að velta fyrir sér, ræða saman og rökstyðja svör sín. Ég reyni að svara ekki spurningum sem nemendur gætu lært eitthvað af að finna sjálfir svör við. Ég hef fundið greinilega hvernig undirbúningur og álag í kennslunni hefur breyst á gefandi hátt fyrir mig sem kennara og fyrir nemendur. Ég er sáttari við kennsluna, næ betri tökum á símati og sé hvernig nemendur taka sífellt meiri þátt í að setja sér og stefna að markmiðum í námi sínu. Dæmi um aðferðir sem hafa skilað ánægju, virkni og talsverðum námslegum framförum ekki síst í stærðfræði eru *hugsandi skólastofa* (e. Building a Thinking Classroom) samkvæmt aðferðum sem

Peter Liljedahl kennir, en við höfum ýmist kallað *stærðfræðiáskoranir* eða *töflustærðfræði* (<http://www.peterliljedahl.com/teachers>) og *talning í kór* (e. Choral Counting), nánari útskýringar má sjá á myndbandinu <https://tedd.org/choral-counting/>

Það sem hjálpaði til við að víkka nám nemenda enn frekar og gera þá áhugasamari, virkari og sjálfstæðari:

Vinnulota í klukkustund eða lengur. Allir hópar á yngsta stigi eru í umsjónarstofum sínum á sama tíma nokkrum sinnum í viku.

Takmarkaður borðafjöldi í stofunni, þó að fjöldi stóla miðist viðnemendafjölda. Nýtum líka hillu á hlið, gólfíð, ganginn, gluggasýllu og fleira sem vinnurými. Getum staðið, setið, legið og svo framvegis. Unnið í hópum, einstaklingslega og í pörum. Oft er verið að færa borð og stóla til eftir því sem hentar. Skólinn á húsgögnin, ekki nemendur. Töskur eru geymdar í hillukössum á hjólum sem nemendur smíðuðu fyrir stofuna og við notum þá líka sem vinnuborð og setubekki.

Plastdúkur var klipptur niður og hengdur upp þannig að á veggnum eru 2 töflur til viðbótar við stóru hvítu töfluna sem nemendur nota mun meira en kennarinn! Einnig er glerrúða við dyrnar nýtt og nokkrar litlar töflur ásamt fullt af endurfyllanlegum töflutússpennum og litlum tuskum til að þurrka af.

Unnið er með viðfangsefni, ekki námsgreinar. Hver og einn vinnur á sínum forsendum út frá eigin getu. Nemendur komast mislangt, en færa sig upp hæfniviðmiðastigann út frá sama grunni tengdum t.d. sögu, sönglagi ljóði, teiknimynd, frétt eða aðstæðum nemenda.

Markmið fyrir hvert viðfangsefni eru skýr, farið er yfir þau með nemendum og þau send foreldrum. Markmiðin eru tekin úr aðalnámskrá en ekki kennd eftir efni í námsbók. Nemendur taka líka þátt í því að setja markmið og þeir meta alltaf sjálfir hve vel þeim hefur tekist að ná markmiðum í lok hverrar lotu.

Námsbækur, annars konar bækur og tölvur eru nýttar með öðru. Ekki er sérstakur tölvutími og bækur eru ekki nýttar frá blaðsíðu til blaðsíðu heldur eftir viðfangsefnum sem unnið er með.

Í stuttu máli gengur *hugsandi skólastofa* út á það að kennari segi nemendum stutta sögu um einhvers konar mál eða framkvæmd eða hann útskýrir ákveðnar aðstæður. Síðan leysa nemendur málið 2-3 saman standandi við töflur. Þeir draga sig í hópa handahófskennt með spilum. Kennari leiðbeinir og spyr spurninga, hvetur nemendur til að ræða saman og skoða hjá öðrum og lætur þá oft útskýra hvernig þeir hugsa hlutina. Hann fylgist með og þyngir áskorunina jafnt og þétt miðað við stöðu nemenda hverju sinni. Þeir ræða saman og skrifa, skrá eða teikna allar hugsanir á töfluna svo að aðrir sjái hvernig þeir nálguðust viðfangsefnið. Í lokin eru mismunandi leiðir skoðaðar og ræddar lítillga.

Með aðferðinni *talning í kór* ákveður kennari hvaða hugtök eða færni á að æfa. Hann skrifar á töflu meðan nemendur þylja upp saman í kór hvað kemur næst.

Stuttar pásur eru teknar þar sem 2-3 ræða saman þegar óvissa eða mismunandi svör heyrast. Kennari gefur ekki upp „rétt eða röng“ svör, heldur eru tillögur nemenda rökstuddar þar til niðurstaða fæst og haldið svo áfram. Síðan ræða nemendur saman og finna mynstur og reglur. Þeir velta fyrir sér tengslum talnanna, finna hvað gæti komið næst og hvort eitthvað kæmi einhvern tíma ef við héldum áfram. Svo halda þeir áfram með talninguna sjálfir í reikningsbók eða nýta sömu hugsun og gera sína eigin talningu frá annarri tölu.

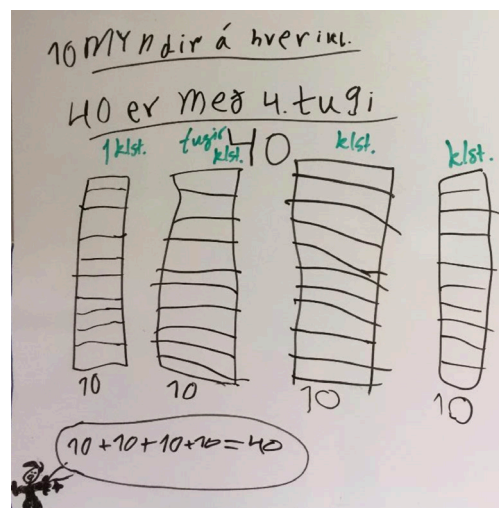
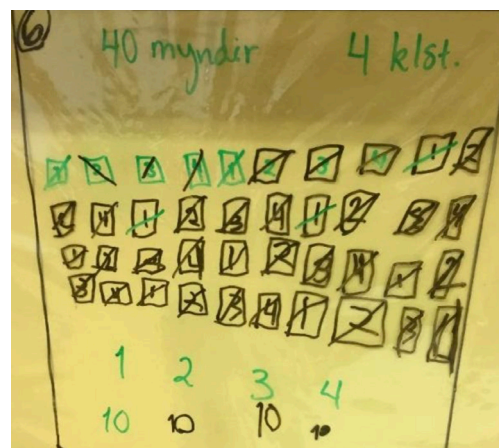
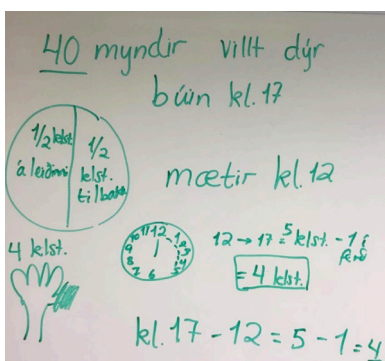
Passa þarf vel upp á að nemendur séu ekki svangir fyrir svona frjóa hugsunarstund – án gríns - og þeir höfðu sjálfir orð á því!

Það getur verið áskorun að finna leið til að kynna vinnu nemenda fyrir foreldrum þar sem kennari hefur yfirleitt ekki tíma til að taka myndir á meðan unnið er og sumt er bara gert á töflu og þurrkað út.

Hér koma nokkur dæmi um slík verkefni og vinnubrögð. Myndirnar og orð nemenda sýna vel árangur kennslu með opnum verkefnum. Ég er ekki í vafa um að þetta sé komið til að vera í kennslu hjá mér. Ég vil halda áfram að ná aukinni færni í breyttu kennarahlutverki og hvet fleiri kennara til að láta vaða og gefa þessu tækifæri.

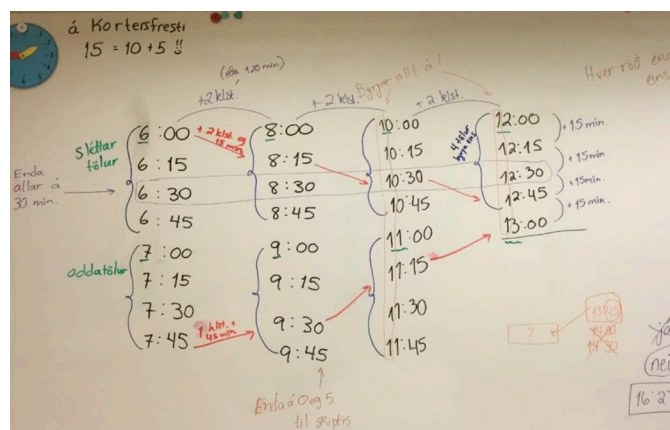
Nemendur lærðu að skrifa/teikna hugsanir sínar á töflu

Verkefnið tengdist sögu þar sem vinkona Finnboga og Felix fóru í Amazon skóginn til að taka myndir af 40 villtum dýrum fyrir kl. 17.



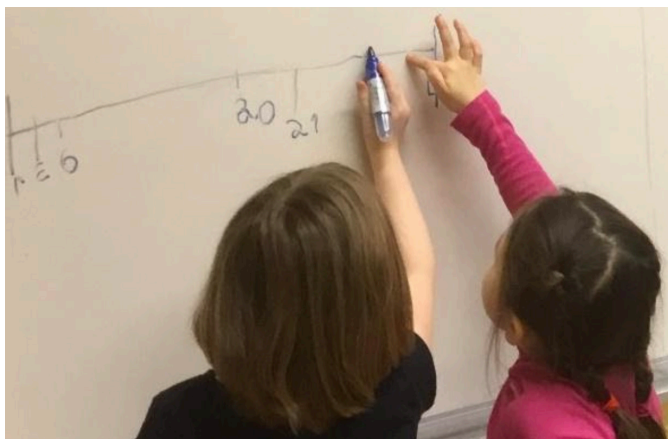
Talning í kór

Verkefni um að gera eitthvað á kortersfresti. Verkefnið var líka unnið á ensku og þá var am og pm bætt við.



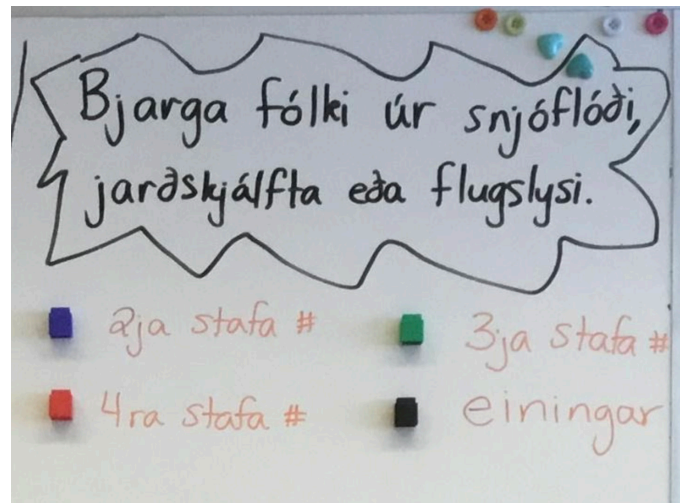
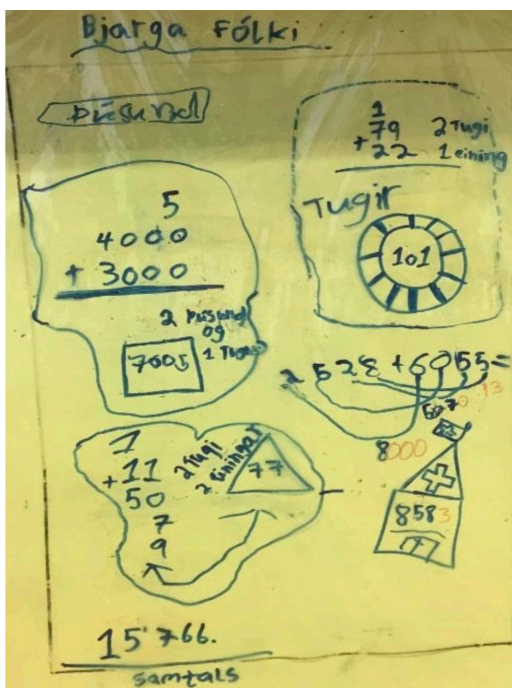
Talnalínur

Unnið með talnalínur í tengslum við verkefni um tímalínur og sveitabæi áður fyrr. Nemendur ákváðu hvernig talnalínan ætti að vera og hvar ákveðnar tölur yrðu staðsettar. Svo þyngdum við verkefnið meira með hærri tölum og síðan með því að talnalínan var ekki lengur bein lína, heldur girðing sem bóndi var að reisa til að girða í kringum óreglulega kringlóttu tjörn, ferhyrnt tún og þríhyrningslaga beitarland.



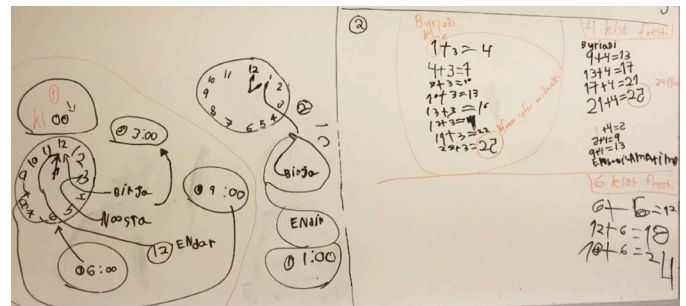
Unnið með sætisgildi

Nemendur drógu kubba og bjuggu til sínar eigin tölur til að finna fjölda fólks sem þurfti að bjarga. Síðan lögðu þeir tölurnar saman.



Verkefni í tengslum við fréttir um hesta í óveðrinu í vetur

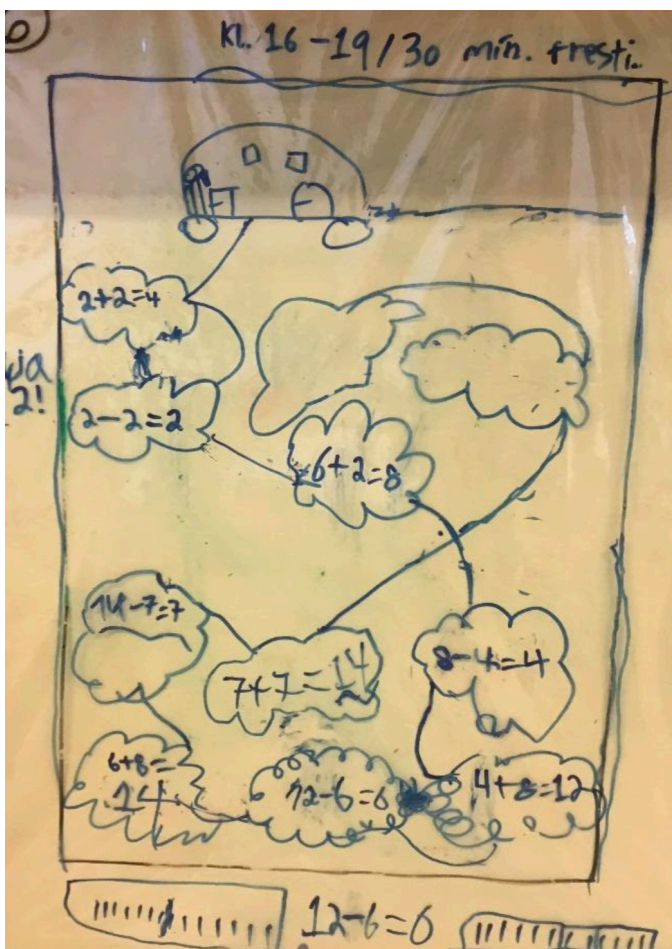
Bóndi þarf að athuga dýrin sín á ? klukkutíma fresti vegna óveðurs. Sumir nemendur uppgötvaðu tengsl við margföldun/deilingu eftir því hvort tíminn gekk upp á einum sólarhring eða breyttist á næsta sólarhring.



Fjöldi farþega í strætó

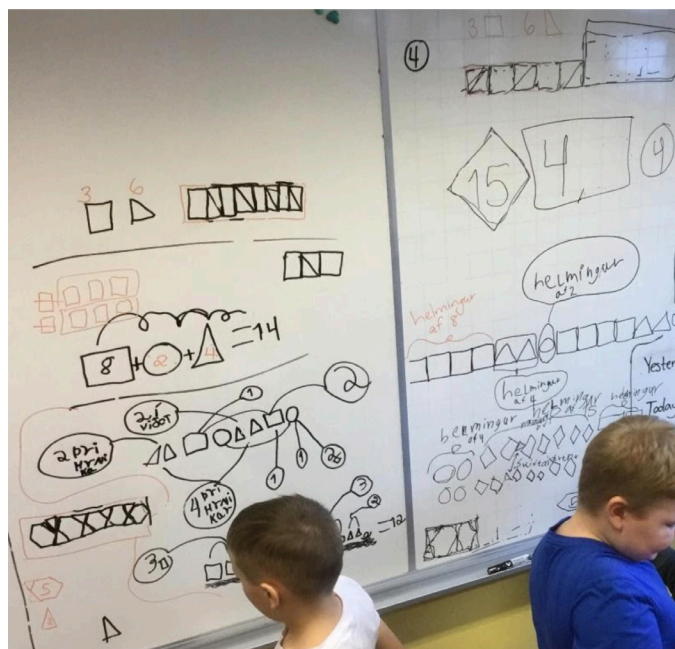
Strætó tekur upp einhvern fjölda farþega, en á endastöð fer alltaf helmingur þeirra úr vagninum. Í tengslum við þetta verkefni urðu umræður um fjölda í strætó og vandræði sem sumir hafa lent í erlendis þegar strætó kemur á endastöð.





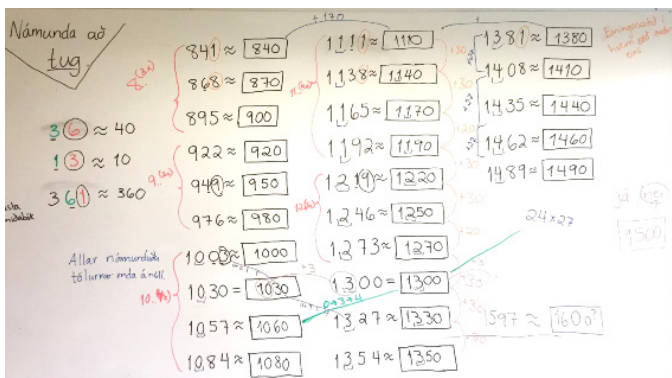
Hellulögn

Nemendur eiga að helluleggja stétt eða búa til mynstur í stétt með ákveðnum fjölda forma.

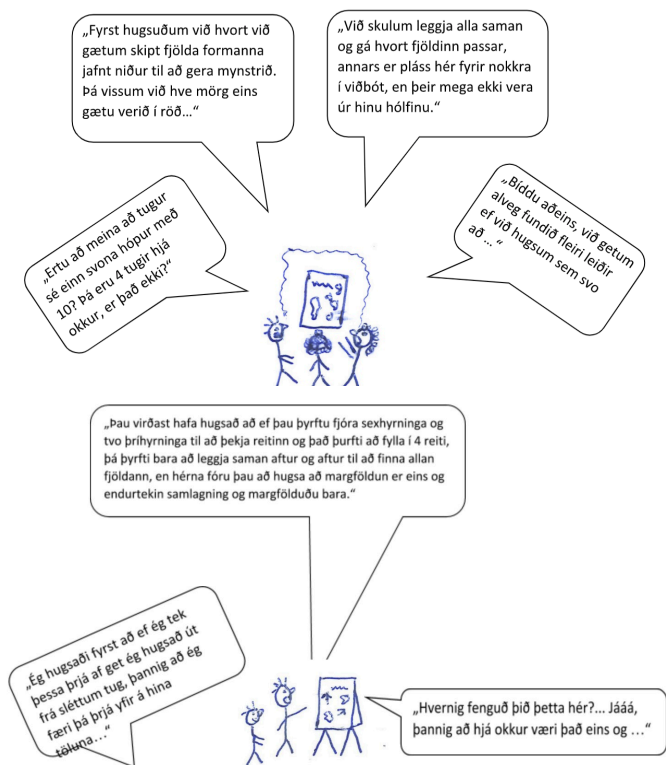


Nákvæmar tölur og námundað að tug

Talning í kór. Mikil hugsun og alls konar pælingar í gangi! Verkefni unnið í tengslum við sögu þar sem mörg hugtök sem benda til námundunar koma fram, til dæmis rétt hjá, rúmlega, tæplega, næstum því, nærri því, sirka og fleiri.



Dæmi um samtöl nemenda úr mismunandi kennslustundum:



Michelle Mielnik
umsjónarkennari í Fellaskóla á Fljótshéraði

NÁMSSAMFÉLAG STÆRÐFRÆÐIKENNARA UNDIR LEIÐSÖGN STÆRÐFRÆÐILEIÐTOGA

Mikilvægt er að stærðfræðikennarar hafi aðgang að fjölbreyttum tækifærum til starfsþróunar. Síðastliðin þrjú ár hafa háskólakennarar við Miðstöð skólaþróunar Háskólans á Akureyri og Menntavísindasvið Háskóla Íslands verið að þróa námskeið fyrir stærðfræðileiðtoga. Markmiðið er að efla námssamfélag stærðfræðikennara í hverjum skóla. Leiðtogarnir fá á námskeiðinu umfjöllun um efni sem tengist stærðfræðikennslu, stærðfræðinámi og leiðtogahæfni og gögn til að vinna með samkennum sínum.

Upphaf verkefnis

Upphaf þessa verkefnis má rekja til þess að háskólakennarar höfðu kynnst *Matematiklyftet* í Svíþjóð í norrænu samstarfi um stærðfræðimenntun. Hluti af *Matematiklyftet* hafði þá verið nýttur í grunnskólakennaranámi HÍ frá árinu 2014 bæði fyrir kennaranema og á námskeiðum fyrir starfandi kennara.

Aðdragandi að formlegu samstarfi háskólanna var heimsókn Þóru Rósu Geirsdóttur og Sólveigar Zophoníasdóttur (HA) haustið 2016 til sænska stærðfræðisetursins í Gautaborg (NCM) sem er samstarfsaðili Skolverket um *Matematiklyftet*. Í framhaldi af því höfðu þær samband við Guðbjörgu Pálsdóttur, Guðnýju Helgu Gunnarsdóttur og Jónínu Völu Kristinsdóttur (HÍ) um að bjóða upp á námskeið fyrir leiðtoga hér á landi.

Vorið 2017 hittu Jónína Vala, Guðný og Guðbjörg kennara við Stokkhólmsháskóla sem haldið hafa námskeið byggð á *Matematiklyftet*. Jónína tók þátt í námskeiðum fyrir leiðtoga við Stokkhólmsháskóla, haustið 2017 og stofnaði til tengsla við Skolverket. Í framhaldi af því fékkst leyfi til að þýða efni sem aðgengilegt er á vefnum *Matematiklyftet*.

Matematiklyftet

Matematiklyftet er þróað á grundvelli hugmynda og rannsókna um hvað einkenni góð starfsþróunarverkefni. Við greiningu á námskeiðunum má sjá að unnið er með þætti eins og: áherslu á nám nemenda, greiningu og skoðun á inntaki náms, námskeiðin ná yfir langan samfelldan tíma, styrkingu á hæfni kennara og þróun námssamfélaga í hverjum skóla. Þetta eru allt hugmyndir sem háskólarnir hafa verið að leita leiða til að vinna að út frá í starfsþróunarlíkönnum og því var kjörið að prófa að byggja námskeið á hugmyndum og efni frá *Matematiklyftet*.

Þó nokkur reynsla hefur skapast í Svíþjóð af þessum námskeiðum og mörg námskeið hafa verið þróuð sem eru aðgengileg öllum á vefsíðu Skolverket (<https://larportalen.skolverket.se/#/moduler/1-matematik/alla/alla>).

Lagt af stað

Veturinn 2017-2018 tóku átta skólar þátt í þróunarstarfi með Háskóla Íslands og Miðstöð skólaþróunar Háskólans á Akureyri. Verkefnið var styrkt af Endurmenntunarsjóði grunnskóla og Akureyrarbæ. Um var að ræða fjóra skóla á Akureyri, tvo í Reykjavík og tvo á Snæfellsnesi. Markmiðið var að prófa starfsþróunarlíkanið og meta hvernig lesefni og gögn námskeiðanna hentuðu íslenskum grunnskólum. Reynslan var góð og því ákveðið að halda áfram og bjóða námskeiðið öllum skólum landsins. Sendur var kynningarbæklingur í alla grunnskóla vorið 2018.

Námskeiðið *Umræður og opin verkefni*

Meginviðfangsefni eru:

- Opin verkefni
- Að búa til opin verkefni
- Samskipti nemenda í hópverkefnum
- Bekkjarumræður

Leiðtoganámskeið fyrir kennara

Fyrsta árið var námskeiðið *Tengsl og breytingar* fyrir miðstig unnið með tilraunaskólunum. Næsta ár var öllum skólum á landinu boðið að taka þátt í því og sóttu kennarar úr rúmlega 20 skólum námskeiðið. Kennt var bæði á Akureyri og í Reykjavík og nokkrir skólar tóku þátt í gegnum samskiptaforrit. Auk þess var unnið með námskeiðið *Stærðfræði og upplýsingatækni* með sex af tilraunaskólunum. Þriðja árið voru námskeiðin *Stærðfræði og upplýsingatækni* fyrir miðstig og *Opin verkefni og umræður* fyrir yngsta stig haldin og gátu allir skólar sótt um.



NÁMSSAMFÉLAG STÆRÐFRÆÐIKENNARA UNDIR LEIÐSÖGN STÆRÐFRÆÐILEIÐTOGA SKÓLAÁRIÐ 2020–2021

Leiðtoganám—staðnám eða fjarnám fyrir stærðfræðikennara á yngsta og miðstigi grunnskóla.

Viðfangsefni vetrarins verður:

Hugtakaskilningur

LEIÐTOGANÁMIÐ

Starfsþróun stærðfræðileiðtoga með leiðsögn kennara frá Menntavísindasviði Háskóla Íslands.

Stærðfræðileiðtögin leiðir hóp kennara á yngsta eða miðstigi í sínum skóla og leggur grunninn að faglegu námssamfélagi með samræðum um stærðfræðináms- og -kennslu. Hópurinn kynnr sér afmarkaða þætti stærðfræðinnar og vinnur saman að gerð kennsluáætla. Að kennslu lokinni eru kennsluáætlanir og kennsla tekin til ígrundunar og umræðu.

Kennarar Menntavísindasviðs veita leiðtoganum stuðning á vettvangi sé þess óskað.

HVERJIR GETA TEKID ÞÁTT Í LEIÐTOGANÁMINU?

Kennari sem starfar á yngsta eða miðstigi grunnskóla og hefur kennt stærðfræði í grunnskóla í 2 ár eða lengur.

MARKMIÐ

Að stuðla að aukinni hæfni og árangri nemenda í stærðfræði með því að

- skapa faglegt námssamfélag
- styrkja fagvitund stærðfræðileiðtoga og kennara

PRÓUNARVERKEFNI

Leiðtoganámið er í boði sem tveggja ára þróunarverkefni

NÁMSSAMFÉLAG

Stærðfræðileiðtögin leiðir starfsþróun stærðfræðikennara á yngsta eða miðstigi í sínum skóla

STARFSÞRÓUN

Verkefnið er styrkt af Endurmenntunarsjóði grunnskóla og þróunar- og nýsköpunarsjóði skóla- og fristundaráðs Reykjavíkur.

FYRIRMYNDIN

Matematiklyftet verkefnið í Svíþjóð <https://fartportalen.skolverket.se/#/>



HÁSKÓLI ÍSLANDS
MENNTAVÍSINDASVIÐ



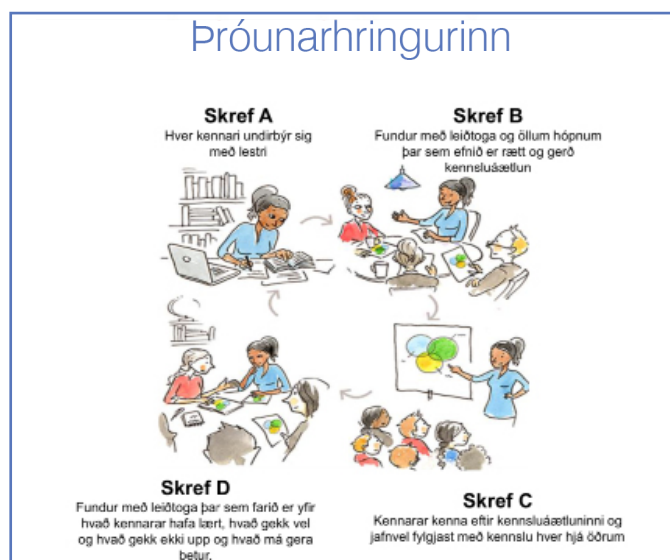
MIÐSTÖÐ
SKÓLAPRÓUNAR



Háskólinn
á Akureyri

Á þessu skólaári eru í gangi námskeið fyrir kennara á miðstigi og yngsta stigi. Á þessum námskeiðum er lögð áhersla á *hugtakaskilning í stærðfræði*. Hundrað þátttakendur úr 50 skólum af öllu landinu taka þátt og skiptast þeir nokkuð jafnt á milli aldurstiga. Leiðtogarnir vinna saman í fimm hópum, einum er kennt frá Akureyri en hinum fjórum frá Reykjavík. Vegna Covid-19 hafa þátttakendur verið á fjarfundum.

Á leiðtoganámskeiðunum eru leiðtogarnir undirbúnir fyrir að stjórna umræðum um stærðfræðináms og -kennslu og til að leiða þróunarstarf í eigin skóla. Námskeiðin eru byggð upp í kringum fjóra þróunarhringi.



Lærdómur dreginn af reynslunni

Reynslan af þessum námskeiðum hefur kennt okkur að starfsþróunarlíkanið hentar vel í íslenskum grunnskólum. Skólasamfélög hafa verið jákvæð fyrir þátttöku þó oft hafi reynt erfitt að skapa rými og tíma fyrir verkefnið. Greinar og myndbönd höfðu til íslenskra kennara en miklu skiptir að hafa efni á íslensku. Fyrir námskeiðin hefur lesefni verið þýtt en myndbönd verið á sænsku. Huga þarf að framsetningu efnis og að myndbönd séu líka á íslensku eða með íslenskum texta.

Samhliða þróun námskeiðanna hefur verið safnað gögnum um hvaða áhrif leiðtogarnir telja að þátttaka í námskeiði hafi haft. Þeir eru sammála um að umræða um stærðfræðináms og -kennslu hafi aukist sem og miðlun verkefna og reynslu milli kennara. Þá ályktun má draga út frá því að námssamfélög stærðfræðikennara hafi styrkst við þátttöku í verkefninu.

Áfram skal haldið

Sótt hefur verið um styrki og vorið 2020 fékkst styrkur úr *Þróunarsjóði námsgagna* til að vinna að þýðingum og vefsíðugerð. Frá *Reykjavíkurborg* fengu fjórir skólar styrk til að efla námssamfélag sitt með þátttöku í verkefninu og til að þýða efni fyrir námskeiðin.

Sérstakur stuðningur við fjóra skóla

Styrkur frá Reykjavíkurborg fékkst til að móta námskeið og styðja við fjóra skóla í Reykjavík. Það eru Fossvogsskóli, Borgarskóli, Dalskóli og Vesturbæjarskóli. Stærðfræðileiðtogar þessara skóla taka þátt í námskeiðinu. Þar að auki koma kennarar námskeiðsins á samstarfsfundi í þessum skólum og styðja leiðtogana við að kynna verkefnið fyrir samkennum og fylgjast með undirbúningi kennara fyrir kennslustundir og úrvinnslu þeirra eftir kennslu.

Í vor gerðu Mennta- og menningarmálaráðuneytið og Menntavísindasvið HÍ með sér samning um að Menntavísindasvið tæki að sér að sjá um starfsþróun kennara á sviði stærðfræðimenntunar, læsi, náttúrufræði og þverfaglegum viðfangsefnum með svipuðu sniði og *Matematiklyftet*. Stefnt er að því að efni allra námskeiða verði aðgengilegt á heimasíðu fyrir alla kennara.

Verkefnið verður viðameira

Þegar ljóst var að Mennta- og menningarmálaráðuneytið ætlaði að veita umtalsverðum fjármunum í verkefnið var ráðinn verkefnisstjóri yfir stærðfræðinámskeiðunum því það er í mörg horn að líta þegar svona stórt verkefni er í burðarliðnum. Undanfarin ár hafa námskeið eingöngu verið haldin fyrir stærðfræðileiðtoga í grunnskólum en nú er undirbúningur fyrir námskeið fyrir stærðfræðileiðtoga í leikskólum og framhaldsskólum einnig hafinn og er stefnt á að forprófa þau á vorönn. Skipulag

og efni allra námskeiðanna byggja að miklu leyti á efni frá *Matematiklyftet*.

Þessa dagana er verið að velja hvaða námskeið eiga að vera aðgengileg íslenskum kennum. Til að byrja með verða valin að minnsta kosti þrjú námskeið fyrir hvert aldurstig leik-, grunn- og framhaldsskóla eða alls 15 námskeið. Þegar er hafin vinna við nokkur námskeiðanna og eins og fram hefur komið hafa nokkur verið kennd áður. Með auknu fjármagni hafa skapast möguleikar á að vinna efni þeirra betur og byggja upp og móta ný námskeið. Stefnt er að því að útbúa heimasíðu fyrir verkefnið þar sem öll námskeiðin verði aðgengileg fyrir kennara.

Skoða þarf hvernig best hentar fyrir leiðtoga og kennara úr leik- og framhaldsskólum að taka þátt. Í grunnskólanum hefur verið unnið út frá áætlun heils skólaárs en skoða þarf hvort betur hentar að vinna út frá misserum eða vetrarmánuðum með öðrum skólastigum.

Nú þegar koma margir kennarar af öllum skólastigum að verkefninu bæði við að vinna efni fyrir námskeiðin og móta kennslu þeirra. Mikill áhugi er á að fá myndbönd úr íslenskum skólum og vinna þannig út frá íslenskum veruleika.

Meginmarkmiðið er þó alltaf að efla námssamfélög kennara sem beina sjónum að því að lesa um og ræða hugmyndir um stærðfræðináms- og -kennslu, prófa nýjar hugmyndir í kennslu og greina reynsluna og draga af henni lærdóm í samræðum við samstarfsfólk.

Skráning á námskeið

Næsta haust verða haldin námskeið fyrir stærðfræðileiðtoga í leikskólum, framhaldsskólum og á þremur aldurstigum grunnskóla. Auglýsingar verða sendar í skólana í vor. Hægt er að senda fyrirspurnir á netfangið birnahb@hi.is ef þið hafið einhverjar spurningar varðandi námskeiðin.

Guðbjörg Pálsdóttir og Birna Hugrún Bjarnardóttir

Ritstjórapistill <i>Birna Hugrún Bjarnardóttir</i>	3
Fréttir af starfsemi Flatar <i>Kristín Einarsdóttir</i>	3
Sýn unglunga á hæfnisviðmið aðalnámskrár <i>Nemendur í unglingadeild Hörðuvallarskóla</i>	5
Pláss fyrir stórar hugmyndir <i>Héðinn Björnsson</i>	7
Stærðfræði og listir <i>Margrét S. Björnsdóttir</i>	10
Stærðfræðiráðstefna í Noregi <i>Birna Hugrún Bjarnardóttir</i>	14
Hvað merkir margföldun með (-1) og til hvers er hún? <i>Ingólfur Gíslason</i>	15
Þrautalausnir á yngsta stigi grunnskólans <i>Margrét Ásgeirsdóttir</i>	17
Söguhornið - Glímt við margföldunartöfluna <i>Kristín Bjarnadóttir</i>	19
Reikniaðgerðirnar margföldun og deiling tengdar flatarmáli <i>Birna Hugrún Bjarnardóttir</i>	22
Hugsandi og sjálfstæðir nemendur <i>Michelle Mielnik</i>	24
Námssamfélag stærðfræðikennara undir leiðsögn stærðfræðileiðtoga <i>Guðbjörg Pálsdóttir og Birna Hugrún Bjarnardóttir</i>	29