



FLATAR mál

1. tbl. 14. árg. 2007

**Málgagn Flatar
samtaka stærðfræðikennara**

Ágætu lesendur.

Ritnefnd Flatarmála barst mikill liðauki á síðasta ári. Þrír nýir nefndarmenn bættust í hópinn, þau Þórunn Bergþóra Jónsdóttir, Anton Már Gylfason og Hafdís Guðjónsdóttir. Því sitja nú í ritnefndinni tveir grunnskólakennarar, tveir framhaldsskólakennara og einn háskólakennari. Hins vegar hvarf Kristín Kristinsdóttir úr ritnefnd og þökkum við henni kærlega vel unnin störf í þágu blaðsins.

Flatarmál lítur nú dagsins ljós fjórtánda árið í röð. Kennarar af öllum skólastigum hafa skrifað í blaðið hingað til og einnig hafa greinar eftir nemendur verið birtar. Á þessum fjórtán árum hafa mörg blöð komið út og efnistöð hafa verið fjölbreytt. Þetta blað er engin undantekning. Ef til vill má segja að þema blaðsins sé útbreiðsla stærðfræðinnar því eins og glöggir lesendur sjá bera tvær greinar titilinn „Stærðfræði fyrir alla“. Ritnefnd velti því fyrir sér hvort ástæða væri til að breyta annarri fyrirsögninni en eftir dálitla umhugsun varð niðurstaðan sú að titillinn væri lýsandi fyrir þær áherslur og umræður sem mest áberandi eru meðal stærðfræðikennara.

Ritnefnd Flatarmála

Til höfunda greina í Flatarmálum

Síðustu skil á greinum fyrir næsta blað er 15. október 2007.

Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá.

Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum.

Ljósmyndir, teikningar og línurit skulu helst ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð í sér skrá. Í texta komi fram númer eða nafn teikningar.

Ritnefnd tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina.

Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar.

Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

© 2007 Flatarmál

Útgefandi: Flötur, samtök stærðfræðikennara, Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Ritnefnd: Anton Már Gylfason kennari við Borgarholtsskóla, Hafdís Guðjónsdóttir lektor við KHÍ, Helen Símonardóttir kennari í Laugarnesskóla, Jónína Marteinsdóttir kennari í Engidalsskóla og Þórunn Bergþóra Jónsdóttir kennari í Fjölbrautaskóla Garðabæjar.

Stjórn Flatar: Þóra Þórðardóttir formaður, Jóhanna Eggertsdóttir gjaldkeri, Ágúst Ásgeirsson ritari og meðstjórnendurnir Freyja Hreinsdóttir, Hafdís Guðjónsdóttir, Nanna María Elfarsdóttir og Ólafur Fannar Vigfússon

Prófarkalestur: Meðlimir ritnefndar.

Umbrot: Helen Símonardóttir.

Kápa: Guðrún S. Guðmundsdóttir kennari við Lækjaskóla

Prentun: Prentsmiðjan Oddi hf.

<http://flotur.ismennt.is>
flatarmal@ismennt.is

Námstefna Flatar 26. – 27. október 2007

Kennarar munið eftir Námstefnunni í haust, takið frá föstudaginn 26. og laugardaginn 27. október.

Að þessu sinni stefnum við á Suðurlandið og verðum á Hótel Selfossi. Aðalfyrirlesari verður prófessor Jo Boaler.

Dr Jo Boaler er prófessor við Sussex háskólann í Englandi og fyrrum prófessor við Stanford háskólann í Kaliforníu. Jo hefur beint sjónum að stærðfræðinámi og stærðfræðiáhuga ungmenna í rannsóknum sínum, bæði á Bretlandi og í Bandaríkjunum. Meðal annars hefur hún rannsakað áhrif mismunandi kennsluhátta á námsárangur og námsáhuga nemenda í stærðfræði. Þá hefur hún einnig greint hvað veldur því að sumir nemendur velja stærðfræði meðan aðrir nemendur velja sig frá stærðfræði. Núverandi rannsóknarverkefni hennar snýr að því hvernig nemendur mynda hugtakatengsl í stærðfræði og náttúruvísindum.

Jo hefur skrifað nokkrar bækur, sú fyrsta „*Experiencing School Mathematics*“ var gefin út bæði á Bretlandi og í Bandaríkjunum. Þá hefur hún skrifað nokkrar

bækur ætlaðar mismunandi hópum innan stærðfræðimenntunarsamfélagsins. „*Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*“ er ætluð fræðimönnum og „*Connecting Mathematical Ideas*“, sem hún skrifaði ásamt Cathy Humphreys er ætluð kennurum og þeim sem sinna kennaramenntun. Þá er væntanleg bókin „*Lost in Math Land*“ sem er ætluð foreldrum og öðrum leikmönnum.

Það er mikill fengur að fá þennan framúrskarandi fræðimann á námsstefnu Flatar í haust. Á heimasíðu háskólans í Sussex má finna nánari upplýsingar um Jo ásamt því að nálgast greinar eftir hana. Slóðin er <http://www.sussex.ac.uk/education/profile205572.html>

Margrét Vala Gylfadóttir kennari við Lindaskóla í Kópavogi, tók saman.

.....

Frá stjórn Flatar

Nú þegar Flötur hefur slitið barnsskónum ákvað stjórnin að endurnýja merki félagsins.

Um hönnun merkisins sá Kristveig Halldórsdóttir myndlistarmaður.

Kristveig lærði textílmýndlist, tók masterspróf í Noregi og hefur unnið sem sýningarstjóri á nokkrum sýningum og tekið þátt í fjölda samsýninga á Íslandi, Norðurlöndunum, Evrópu og Ameríku. Einnig hefur hún kennt myndlist, grafíska hönnun og margmiðlun á listnámsbrautum Iðnskólans í Hafnarfirði og nú í Borgarholtsskóla. Heimasíða Kristveigar er www.internet.is/kristveigh





Raddir þátttakenda

Námstefna Flatar haustið 2006

Námstefna Flatar samtaka stærðfræðikennara var haldin í Borganesi dagana 29. og 30. september síðastliðinn. Ráðstefnan var vel sótt, en megináhersla var á menntun stærðfræðikennara og voru fyrirlestrar og pallborðsumræður í samræmi við það. Einar Steingrímsson, prófessor í stærðfræði við Háskólann í Reykjavík flutti erindi um utanbókarnám eða uppgötvanir í stærðfræðinámi, Lasse Savola lektor við State University í New York fjallaði um stærðfærði og listir og Paivi Portaankorva-Koivisto lektor í stærðfræði við Tampere University fjallaði um fyrirbærafræði í stærðfræðikennslu. Hafþór Guðjónsson dósent við Kennaraháskóla Íslands og Ingólfur Gíslason stærðfræðikennari við Verslunarskóla Íslands skoðuðu stærðfræðikennslu í ljósi nýrra viðhorfa til náms. Jón Þorvarðarson stærðfræðikennari við Fjölbrautarskólann í Breiðholti kynnti bók sína um sögu stærðfræðinnar og Kristín Halla Jónsdóttir dósent við Kennaraháskóla Íslands fjallaði um Simon Singh en hún hefur nýlega þýtt bók hans. Boðið var upp á vinnustofur og kynningar á námsefni og náms- og kennslugögnum. Námstefnan endaði með því að fulltrúar þeirra háskóla sem sinna menntun stærðfræðikennara og fulltrúi frá menntamálaráðuneytinu ræddu í pallborði um menntun stærðfræðikennara.

Seinni dag námstefnunnar tók undirrituð nokkra ráðstefnugesti tali. Fyrstar urðu á vegi mínum þær Karólína sem kemur frá Akureyri og kennir við Lundaskóla og Aðalheiður og Guðlaug úr Reykjavík en þær kenna við Langholtsskóla. Ég bað þær um að segja mér frá því hvers vegna þær komu á ráðstefnuna og hvað hefði helst haft áhrif á þær af því sem í boði hefur verið.

Karólína sagðist hafa komið til að sjá möguleikana í framhaldsnámi í stærðfræði. Hún vildi gjarnan efla sig í starfi og vonaðist til að fá námsleyfi næsta vetur. Ég fékk svör við því í gær og er ánægð með það. Ég er ánægð með fyrirlesturinn hjá Paivi, finnsku konunni. Í raun var gærdagurinn mjög ánægjulegur, skemmtilegri en ég átti von á. Ég fékk upplýsingar um framhaldsnám, vinnustofan var ánægjuleg og mér fannst þetta allt mjög gott. Er ekki viss um hvað stendur upp úr, en dæmin frá Paivi eru skemmtileg og ég kem örugglega með að nota þau með börnunum.

Ég er sammála um að þetta er skemmtilegra en ég átti von á sagði Aðalheiður. Mér hefur ekki leiðst á einum einasta fyrirlestri en það sem ég mun nota beint er það sem við lærðum hjá Lasse, ég ætla að kynna mér þetta forrit betur og kenna nemendum að nota það. Á námsgagnakynningunni sáum við ýmislegt sem við viljum gjarnan fá að kaupa og nota í kennslu.

Guðlaug tók undir með þeim og sagði: *Ég mun taka þau verkefni sem við höfum fengið að kynna og nota þau í kennslu, mér finnst alltaf svo gott að fara heim af námskeiðum þar sem kynnt er eitthvað sem hægt er að nýta sér í skólastofunni. Það var mjög gagnlegt að hlusta á umræðurnar hjá reynsluboltunum, ég er að kenna þetta námsefni núna og það er svo gott að hitta fólk sem hefur reynslu og fá að ræða um hana við það. Ég er mjög ánægð.*

Þær stöllur bentu á að tölvuaðstaðan hefði mátt vera betri og þannig að þátttakendur gætu breitt betur úr sér og fengið lengri tíma að til að prófa sig áfram. Þær hefðu einnig viljað fá fleiri kynningar á forritum. *Við vitum oft ekkert um að þessi forrit eru til. Það mættu alveg vera vinnustofur í fjóra til fimm tíma annan daginn þar sem allir eru að læra á hin ýmsu forrit sem hægt er að nota í kennslu. Forritin þurfa*



Alltaf gaman að koma á námstefnu Flatar.

ekkert endilega að vera kennsluforrit t.d. væri gott að fá kennslu á exel.

Ég man ekki eftir því að hafa áður fengið kennslufræðilega umfjöllun og síðan tækifæri til að prófa mig áfram. Við viljum alltaf hafa allt svo hagnýtt en það er gott að fá örliðla kennslufræði líka. Vera með blöndu eins og hér var.

Þegar ég spurði Sigríði hvort hún saknaði einhvers þá sagðist hún alveg hafa skoðun á því. Ég vil fá fleiri verkstæði, fá hugmyndir sem ég get notað og fá að prófa mig aðeins áfram. Mér finnst líka gott að fá kynningu á fræðilega þættinum. Svo væri líka gott að fá verkstæði sem hægt er að skreppa á í hléum eða að sett væri upp svæðavinna. Það var gagnlegt að fá kynningu á kennslubókum. Ég er sem sagt ánægð.



Hér sést Lasse Savola vera að ræða við tvo þátttakendur myndsturgerð.

Næst ræddi ég við Sigríði Maríu Magnúsdóttur kennara við Lundaskóla á Akureyri en hún kennir og hefur umsjón með stærðfræði. Hún sagðist einnig kenna svölítið í náttúrufræði. Sigríður sagðist oft hafa velt því fyrir sér að fara á námstefnu Flatar en loksins drifið sig og vera ánægð með það. *Ég sé hlutina frá öðru sjónarhorni en ég hefséð þá áður.* Sigríði fannst merkileg umfjöllun Einars um kennslufræði stærðfræðinnar, einnig hafði hún gaman af því að hlusta á Lasse og ætlar að reyna að yfirfæra hugmyndir hans í eigin kennslu. *Ég ætla að reyna að prófa mig áfram sjálf, jafnvel þó ég noti ekki forritið, heldur eitthvað sambærilegt. Mér fannst Paivi tala um marga áhugaverða þætti. Svo tengist þetta framhaldsnámi mínu, ég sé marga þætti speglast í því, t.d. hvernig maður lítur á nemandann. Á maður að hella í hann þekkingu eða byggir hann upp sína eigin þekkingu bygg-ða á reynslu sinni. Ég var í Boston í vor og þar var svo margt „hands on“ efni og hún (Paivi) var að tala um að við uppgötvum hluti með að gera og nota skynsemina. Ég ætla að fara heim að hugsa, lesa og yfirfæra, vera svölítið dugleg að yfirfæra og þó mér takist ekki í fyrsta skipti verður maður að vera duglegur að þora.*

Næstur varð á vegi mínum Axel Björnsson prófessor við kennaradeild Háskólans á Akureyri. Axel kennir aðallega eðlisfræði, tölfræði, stærðfræði og jarðvísindi, en hann hefur einnig kennt við auðlindadeildina.

Ég kom á ráðstefnuna vegna þess að ráðstefnuhaldara báðu kennaradeildina um að senda hingað fulltrúa og kynna það sem við erum að gera í kennaradeildinni og fjalla um kennaramenntun. Og við skulum segja að mér hafi verið falið að gera þetta af deildarforseta sem þurfti að þrýsta á mig því staðan fyrir norðan er ekki mjög skemmtileg. Hins vegar hef ég haft gaman af að vera hér, ég hef aldrei verið á þessari ráðstefnu áður og það hefur verið gaman að kynna viðhorfum fólksins hér. Þetta er breiður hópur og greinilega meiri hlutinn í þetta skipti framhaldsskólakennarar. Ég hef nú meiri áhuga á grunnskólamenntuninni vegna þess að ég er að kenna grunnskólakennurum og tel að þetta sé eitt mikilvægasta starf þjóðarinnar vegna þess að ábyrgðin er svo mikil. Grunnskólakennarar eru með börnin í höndunum í tíu ár, þetta er lengsta og merkilegasta skólastigið og undirbúningur undir allt sem kemur þar á eftir.

Axel telur að það sé venja hjá eðlisfræðingum að skipta sér af kennslu og bendir á að í gamla daga skrifuðu menn kennslubækur og að í eitt sinn hafi eðlisfræðingur verið rektor KHÍ. Hann sagðist hafa haft ánægju af ráðstefnunni og að kynna þvi hvað aðrir eru að hugsa og gera.

Maður tekur eftir því að það er ekki fullkomin sátt um innihald kennaranámsins. Hvað á kennarinn að kunna, hvað eigum við að kenna kennaranum? Og þessi ágreiningur er tiltölulega djúpstæður. Á áherslan að vera á fög eða á uppeldis- og kennslufræði? Axel telur sig hafa mjög ákveðnar skoðanir á þessum málum sem eru í andstöðu við þær skoðanir sem eru ríkjandi í dag. Það er ekki nema þriðjungur af kennaranáminu sem fer í að kenna kennaranemanum eitthvað í fögunum sem hann á að kenna í grunnskólanum hinn tíminn 60% til 70% fer í æfingakennslu, en þó meira eða minna í stöðadgerðir. Mér finnst áherslurnar vitlausar, en þessi ágreiningur er greinilega ekki bara djúpstæður fyrir norðan hann er líka djúpstæður í stéttinni. Það má gera greinarmun á kennslufræði og sálfræði en ef farið er yfir námskrána og öll námskeið í sálfræði, félagsfræði og grunnskólafræðum talin saman þá er það



Spurt og spjallað undir liðnum „Reynsluboltar“.



Mynsturgerð á verkstæðinu hjá Lasse Savola.

gífurlega mikið. Svo er þetta nám ekkert í tengslum við grunnskólann því hann er lagskiptur og grunnþekking bekkjarkennarans á fögunum endist kannski uppá miðstigi. Það þarf fleiri fagkennara á miðstigið en nú er. Ég er að vonast til að sameiningin fyrir sunnan nái að breyta þessu eitthvað. Námið er náttúrulega alltof stutt miðað við þá ábyrgð sem starfinu fylgir, sagði Axel að lokum.

Að lokum ræddi ég við Sigríði Hlíðar sem hefur kennt stærðfræði við Menntaskólann í Reykjavík frá árinu 1973. Ásamt því að vera fagstjóri kennir hún aðallega þremur elstu árgöngunum í náttúrfræðideildinni. Sigríður sagðist hafa komið á ráðstefnuna vegna umræðunnar um stærðfræðimenntun. Hún sagði að undir vor bærust upplýsingar frá háskólunum m.a. um nám í stærðfræði. Mikil markaðssetning væri í gangi og nemendur spyrja og biðja um ráð því þeim þykir erfitt að velja og taka ákvarðanir um framhaldsnám.

Þegar maður er búin að kenna árum saman í sama umhverfinu er maður kannski búin að tapa einhverri yfirsýn og þarf því að reyna að opna gluggana svona af og til, líta út og sjá hvað hefur breyst. Meðal annars hefur kennsluskrá Háskóla Íslands breyst. Áherslunar hafa breyst síðan ég var í skólanum. Og ég var dálítið forvitin að heyra í Einari m.a. vegna þess að hann augýsir sitt nám þannig að hann gerir ekki ráð fyrir að nemendur hafi í veginesti annað en viljann til að læra stærðfræði og þá veltir maður því fyrir sér hvenær lýkur BS prófinu. Er það eftir þrjú ár? Eða?

Sigríði var tíðrætt um umræðunnar sem hefur verið á ráðstefnunni og áhrif hennar á hana.

Ég velti því fyrir mér hvort ég sé of föst í efnisþáttunum. Mér finnst vera svolítill uppstilling hér og ég finn fyrir

því að mismunandi nálgun í kennslu er sett fram sem andstæður, eða þessi framsetning virkar þannig á mig og ég lendi í togstreytu þegar ég hlusta. Eins og t.d. á Hafþór sem mér finnst mjög gaman að hlusta á þá lendi ég í togstreytu þegar ég skoða mína kennslu. Ég er búin að fara í gegnum ferlið við að skoða kennsluna mína og reka mig á að stofurnar í MR eru of litlar til að gera sumt af því sem mig langar til að gera. Mér finnst ég lenda í togstreytu því þessu er stillt þannig upp. Einar stillir þessu þannig upp að það geti verið skemmandi að hafa eitthvað fyrir nemendum, en Rögnvaldur er ábyggilega með þá aðferð í stórum dráttum. Mér finnst þetta segja mér að þessi tveir menn læra á ólíkan hátt. Mér finnst að þeir sem segja að miðlunin hafi ekkert að segja, að fordæmið hafi ekkert að segja, hafi verið þannig nemendur að þeir hafi ekki viljað taka námsefnið þannig inn. Á meðan sitja aðrir og eiga mjög auðvelt með að nýta sér kennsluna, líta ekki á hana sem endapunkturinn heldur að þeir eigi að fara heim og vinna úr henni. Það gerist ekkert nema unnið sé úr efninu.

Mér finnst ég, sem er að kenna í hefðbundnum skóla á hefðbundinn hátt, eiga í togstreytu. Þetta eru kröfur um náms- og kennslustíl ekki bara vera verkefnaskil frá nemendum heldur að ég skili ekki einhverjum pakka til þeirra þannig að þeir kunni þetta og kunni hitt en vanti heildarmyndina eða nægan skilning.

Til að nota það sem ég er að kenna verður að vera ákveðin færni hjá nemendum og til að auka skilninginn þarf ég að láta þá nota þá tækni sem ég hef verið að kenna. Ég veit þó aldrei alveg hvort þeir hafi náð henni, ekki einu sinni þó ég leggi mig alla fram. Mér finnst umræðan vera svolítið öfgakennt og það er erfitt fyrir kennara úr hefðbundnum skóla að taka þátt í henni.

En mér finnst fróðlegt að hlusta á umræðuna á ráðstefnunni og hvernig þeir sem hér töluðu hugsa stærðfræðikennslu, að heyra hvað er í býgerð og forvitnilegt að vita hvernig þessu vindur fram. Og eins finnst mér spennandi að fylgjast með því hvernig námið vex hjá Einari til dæmis hvort þeim fjölgar sem vilja kenna stærðfræði.

Að lokum spurði ég Sigríði hvort hún væri með hugmyndir fyrir ráðstefnuhaldara. Hún taldi að þetta væri búíð að vera fróðlegt og að hún ætlaði að fylgjast með þeirri þróun sem nú væri að hefjast en einnig vildi hún gjarnan fá fleiri sumarnámskeið til að halda sér við.

Viðtölin tók Dr. Hafdís Guðjónsdóttir
lektor við KHÍ

Skiptir einhverju máli hvað nemendum finnst?

Ingólfur Gíslason

Hvaða stærðfræðikennari kannast ekki við að hafa hugsað um það hvað starf hans væri skemmtilegra og meira gefandi ef nemendur væru áhugasamari? Eða betur undirbúnir eða hreinlega ekki svona vitlausir. Hugsanir sem þessar eru auðvitað ekki gagnlegar, en erfitt að komast algerlega hjá þeim, svona stundum. Vænlegra viðhorf gætum við sett fram sem eftirfarandi boðorð:

Ég geri hvað ég get til að hjálpa nemendum að læra, eins vel og ég get og miða við það hvar þeir eru staddir.

En til þess að geta miðað við hvar nemendur eru staddir, verð ég að vita eitthvað um það. Og þá skiptir máli að nálgast hugmyndir þeirra og viðhorf, og til þess þarf að spyrja. Ég er hér ekki að ræða um að fá úr því skorið hvort nemandi kann ekki að diffra, heldur væru spurningarnar meira í ætt við hvað merkir diffrun í þínum huga?

Í okkar skólakerfi er allt of lítið lagt upp úr því að ræða við nemendur, að þeir hafi sjálfir eitthvað að segja um sitt eigið nám. Og nánast aldrei er rætt um tilfinningar eða viðhorf. Gætu agavandamál að stórum hluta verið sprottin af þessari vanrækslu?

Ég hef gert tilraunir til að láta nemendur tjá sig um sína reynslu af stærðfræðinámi, og það hefur alltaf gefið góða raun, að minnsta kosti segjast nemendur vera ánægðir og leggja sig fram. Þeir draga yfirleitt ekkert undan og segjast flestir hafa haft gaman af reikningi þar til í síðustu bekkjum grunnskóla eða jafnvel þar til komið var í framhaldsskóla. Ástæðurnar eru í raun og veru frekar óljósar en tengjast í hugum nemenda oft því að námsefnið fer að virka á þá sem „tilgangslaust“. Þar erum við reyndar komin að djúpri spurningu um nytsemi, en það er ekki að ástæðulausu sem nemendur (sem og margir aðrir) tengja tilgang og nytsemi tileinkunar á námsefni eingöngu við peninga. Hvernig notar maður þetta út í búð? er algeng spurning í stærðfræðitímum. Svo lengi sem öll opinber rök fyrir menntun snúast um peninga er svo sem ekki við öðru að búast en að menn spyrji spurninga á borð við þessa.

Eitt verkefni sem ég hef sett fyrir lítur svona út:

Skrifaðu stærðfræðisögu þína. Stærðfræðisaga þín verður að vera að minnsta kosti ein síða í Word (tvöfalt línubil, 12 pt. letur) en ekki fleiri en tvær. Skrifa skal eðlilegar setningar og halda þræði. Stærðfræðisaga þín hjálpar mér að kynna þér og viðhorfum þínum til stærðfræði. Verið frumleg og heiðarleg - það hefur engin áhrif á einkunn hvort þér líkar vel eða illa við stærðfræði. Ritgerðin ætti að innihalda eftirfarandi atriði, en þau mega vera fleiri - eða hugsanlega önnur, ef um verulega áhugavert efni er að ræða:

Styrkleikar þínir og veikleikar.

Vonir og væntingar um árangur á þessu ári.

Markmið á þessu ári.

Hvað hjálpar þér mest við að læra (stærðfræði)?

Hvað angrar/truflar þig mest í kennslustofunni?

Eitthvað úr fyrri reynslu af stærðfræði (jákvæð eða neikvæð).

Framtíðaráform (almennt).

Eitthvað annað sem þér finnst viðeigandi.

Gefið verður fyrir samkvæmt meðfylgjandi töflu:

Auk þess fá allir eitt stig fyrir að skila inn blaði með nafninu sínu.

	Stigafjöldi		
	3	1,5	0
Atriði			
Fjöldi síðna	1 - 2	0,5 - 1	0 - 0,5
Frágangur	stafsetning og málfar gott, framsetning skýr og skiljanleg	smávægilegar/fáar villur	fleiri villur, framsetning óskýr
Atriði sem gerð er grein fyrir	öll 7 atriðin	4 - 6 atriði	0 - 3 atriði

Eins og ljóst má vera er tilgangur þessa verkefnis að fá nemendur til þess að hugsa um sitt eigið nám, út frá sínum eigin forsendum og reynslu, og tjá tilfinningar sínar og viðhorf. Einkunnagjöf er síðan eftir ákveðinni töflu. Markmiðið með þeirri töflu er eingöngu að fá nemendur til þess að vinna verkefnið. Það er allt í lagi þótt allir fái 10. Helst ættu allir að fá 10. Ég tek fram að mér finnst leiðinlegt að þurfa að gefa einkunnir, bæði hér sem annars staðar. En slíkt mat er því miður svo samgróið skólakerfinu að erfitt er að standa algerlega utan þess.

Nemendur eru yfirleitt ánægðir með að fá að tjá sig um eitthvað sem skiptir þá sjálfa máli. Þeir vilja að kennarar hlusti á þá og kynnist viðhorfum þeirra. Ritgerðirnar sem fást með þessu verkefni eru ótrúlega heiðarlegar, nemendur hika almennt ekki við að lýsa neikvæðri reynslu og tilfinningum gagnvart greininni, sem virðast frekar algengar. Það kemur sjálfsagt fáum á óvart. Lýsandi dæmi gætu verið eftirfarandi:

Mér fannst skemmtilegra í stærðfræði í grunnskóla. Þá gat maður bara reiknað og reiknað og þurfti ekki að hugsa svona mikið rugl.

Mér finnst alltof mikil stærðfræði í framhaldsskólum, ég á aldrei eftir að nota þetta.

Mér finnst best að læra þannig að reikna og reikna mörg dæmi. Og hlusta á tónlist.

Meginstefin sem koma fram í hugsun nemenda um stærðfræði eru gamalkunn og afleiðingin er viðhorf sem mætti orða svo:

Stærðfræðileg hugsun felst í því að geta lært, munað og notað staðreyndir, reglur, formúlur og reikniaðferðir.

Þetta er auðvitað þvert á hugmyndir góðra stærðfræðikennara þar sem eitt af meginmarkmiðum stærðfræðikennslu er að nemendur skilji hvað þeir eru að gera. Það er tilraunarinnar virði að fá viðhorf nemenda upp á yfirborðið og ræða við þá. Meðvitund um þær ólíku hugmyndir sem kennarar og nemendur hafa um námið hlýtur að vera gagnleg.

*Höfundur er kennari við
Verslunarskóla Íslands*

Stærðfræði fyrir alla

Viðtal við Einar Steingrímsson prófessor við HR

Anton Már Gylfason

Við samruna Háskólans í Reykjavík og Tækniháskóla Íslands árið 2005 var komið á fót kennslufræði- og lýðheilsudeild við hinn sameinaða skóla. Eitt af hlutverkum hennar er að sinna menntun stærðfræðikennara. Fljótlega var Einar Steingrímsson ráðinn til þess að byggja upp stærðfræðinámið. Einar er doktor í stærðfræði frá Massachusetts Institute of Technology (MIT) og hafði áður lokið BA og MA gráðum í greininni frá University of Pennsylvania.



Ég hitti Einar að máli góðviðrisdag í febrúar í húsakynnum Háskólans í Reykjavík við Ofanleiti. Frjálst og persónuleg framkoma Einars vakti athygli mína en það átti eftir að koma á daginn að skoðanir hans á stærðfræði og kennslu hennar rímuðu ágætlega við fyrstu kynni mín af honum.

Ég byrjaði á að biðja Einar um að lýsa sinni sýn á stærðfræðikennslu í örfáum orðum.

„Ja, það er stórt spurt en við skulum reyna að sjá til þess að það verði ekki allt of lítið um svör. Ef ég reyni að segja þetta með einhverjum einföldum hætti þá held ég að það sé allt of algengt að stærðfræðikennarar kenni eins og þeim var kennt en ekki eins og þeir hafa lært stærðfræðina sjálfir. Þetta segi ég ekki síst um kollega mína sem eru að kenna í háskólum. Við vitum alveg hvernig menn læra stærðfræði; maður lærir ekki stærðfræði af því að horfa á einhvern halda fyrirlestur né af því að leysa einhver stöðluð dæmi. Ef maður ætlar að læra stærðfræði vel þá gerist það með því að vera að fást við verkefni, þ.e. stór verkefni en ekki lítil dæmi sem ætlast er til að leyst séu með þekktum aðferðum. Til þess að ná tökum á sjálfri stærðfræðinni þurfa nemendur að vera að fást við stærri verkefni sem þeir leysa svoltið á eigin spýtur. Það eru mjög fáir, kannski einn af hverjum hundrað þúsund eða jafnvel einn af milljón, sem geta gert þetta algjörlega hjálparlaust – það er fólk sem við köllum „séní“. Ég held því fram að flestir aðrir stærðfræðingar hafi lært stærðfræðina þannig að þeir hafi endalaust sjálfir verið að berjast við erfið verkefni og svo hafi þeir fengið aðstoð kennara þegar þeir komust ekki lengra.

Þetta er hins vegar ekki eins og stærðfræðin er kennd. Ég vil að við kennum stærðfræðina með þeim hætti sem flestir læra hana þ.e.a.s. með því að láta nemendur takast á við verkefni sem eru erfið, ekki stöðluð verkefni, ekki 20 verkefni af sömu gerð sem eru leyst með sömu aðferð, heldur verkefni sem reyna á hugmyndaflug, úthald, þrautseigju og allt þetta. Til þess að það gangi þurfum við að hjálpa nemendum stöðugt meðan þeir eru að vinna að verkefnunum.

Því hef ég kennt mest alla mína kennslu svona síðastliðin 10 ár. Þó þetta sé ekki einhver ein aðferð, hvað þá aðferð sem búið er að meitla í stein, er þetta sú aðferð sem við notum að mestu hér í HR. Við erum með mis mikið af fyrirlesturum og fer það eftir því hversu langt nemendur eru komnir í náminu. Það er frekar lítið af fyrirlesturum til að byrja með en svo eru þeir meiri þegar lengra er komið. En svo fellst öll vinna nemendanna í því að leysa verkefni þannig að allt sem nemendurnir eiga að læra og ná tökum á er í verkefnum sem þeir eiga að leysa. Nemendum er frjálst að leysa verkefnin í samvinnu sín á milli í litlum hópum og fá mikla aðstoð kennaranna við þá vinnu – þó ekki þannig að við leysum verkefnin fyrir þau eða segjum þeim hvernig þau eigi að gera heldur hjálpum við þeim eitt skref í einu. E.t.v. má kalla þetta „læringsmódel“ en grunnurinn er stöðug samræða nemandans og kennarans þar sem nemendurnir fá aðstoðina þegar þeir eru móttækilegastir fyrir henni og geta nýtt hana best.“

Þú lítur þá svo á að hlutverk kennarans felist í handleiðslu frekar en að það sé að mata nemandann með staðreyndum?

„Já ég held því fram að öll stærðfræðikennsla eigi að fara þannig fram. Ef ég á að taka stórt upp í mig held ég því fram að það séu mjög fáir nemendur sem fá mikið út úr því að hlusta á fyrirlestra um stærðfræði og sækja svo dæmatíma þar sem reiknuð eru fyrirfram ákveðin dæmi. Það er mjög erfitt að fá eitthvað út úr fyrirlestrum í stærðfræði og þeir sem fá eitthvað út úr kennslu með þessari aðferð eru e.t.v. bara langbestu nemendurnir og þeir eru svo fáir að ekki á að skipuleggja kennsluna út frá þeirra þörfum. Þar fyrir utan er ég ekki viss um að þetta sé besta leiðin fyrir þá til að læra heldur.“

Þeir sem hingað til hafa sótt sér háskólamenntun í stærðfræði eru afar fáir, að minnsta kosti hlutfallslega. Telur þú að með þessum aðferðum megi „laða fram stærðfræðinginn“ í stærri hluta hvers árgangs?

„Já ég held því alveg hiklaust fram. Án þess að hafa kannað það til hlítar held ég að fæstir af okkar nemendum hefðu látið sér detta til hugar að fara í háskólanám í stærðfræði. Það er eitt af markmiðunum með náminu hjá okkur, ekki hvað síst BS náminu, að fá miklu fleiri nemendur í stærðfræði. Þeir nemendur sem hafa farið í háskólanám í stærðfræði hafa til skamms tíma eingöngu verið þeir sem hafa verið algerlega vissir um að stærðfræðin væri það eina sem þeir gátu hugsað sér að fást við. Það eru hins vegar miklu fleiri sem eiga erindi í stærðfræðinám.“

Hvað með þig persónulega, hvernig kviknaði þinn áhugi á stærðfræði?

„Það var nú svolítið löng og krókótt leið. Þegar ég var unglingur nennti ég aldrei að læra og hætti í menntaskóla í fyrstu tilraun. Þá vissi ég samt að mér fannst stærðfræði voðalega skemmtileg en datt aldrei í hug að ég myndi gera neitt í því. Mér datt ekki í hug að ég yrði stærðfræðingur og sá stærðfræðina aldrei fyrir mér sem mögulega framtíðargrein. Svo þegar ég fór í öldungadeild þegar ég var 27 ára þá var það vegna þess að mig langaði að læra eitthvað sem e.t.v. mætti kalla „hugsunarfræði“ – eitthvað á mörkum taugalífeðlisfræði og heimspeki hugans. Ég áttaði mig á því að ef ég ætlaði að læra meira þá þyrfti ég að fara í skóla. En þegar ég var búinn að vera í öldungadeild í hálf tveim áttuárum áttaði ég mig á því að mér fannst stærðfræði bara svo skemmtileg og var auk þess farinn að gera mér grein fyrir að það væri hægt að verða stærðfræðingur. Og þá gerðist það bara að sjálfum sér.“

Nú fór allt þitt háskólanám fram í Bandaríkjunum. Voru einhverjar ákveðnar kennsluáðferðir eða

kennslufræði sem þú rakst á þar sem leiddi þig inn á þá braut sem þú ert á nú?

„Það má segja það, því öllum þeim sem ég hef rætt við sem lært hafa í Bandaríkjunum ber saman um að það er miklu meira um það að nemendur í námskeiðum þurfi að skila heimaverkefnum. Það er miklu meiri eftirfylgni og kennararnir fylgjast yfirleitt mun betur með því hvernig nemendunum gengur yfir alla önnina. Þetta var allt annað en ég sá þegar ég kom yfir til Svíþjóðar og fór að kenna þar sjálfur; þá sá ég þennan gríðarlega mun. Og þar sem ég þekki til á Íslandi er þetta miklu líkara því sem gengur og gerist hjá Svíunum en hjá Bandaríkjamönnum, þ.e.a.s. það virðist vera algengt að það séu fyrirlestrar, dæmatímar og skriflegt lokapróf og að nánast engin skil sem verulegu máli skipta fari fram áður en nemandinn fer í lokaprófið. Þetta er ástæðan fyrir því að ég fór að kenna eins og ég geri: í fyrsta lagi mundi ég eftir því frá Bandaríkjunum að maður komst ekkert hjá því að vera að vinna alveg stöðugt alla önnina. Þetta er gífurlega mikilvægt og ég held að allir stærðfræðikennarar séu sammála því að maður lærir ekki stærðfræðina vel nema vera að vinna alveg stöðugt. Og í öðru lagi held ég að flestir kennarar séu sammála því að námsmátið stýrir því að miklu leyti hvernig nemendurnir vinna. Ég sé enga aðra ályktun sem hægt er að draga af þessu en þá að námsmátið verði að vera þannig að nemendur séu stöðugt að skila verkefnum sem hefur áhrif á einkunnina.

Fyrir 10 árum var ég að búa til alveg nýtt námskeið og hafði tiltölulega frjálsar hendur. Þá hugsaði ég með sjálfum mér, hvernig hefði ég sjálfur vilja hafa hlutina þegar ég var í námi, ef ég hefði sjálfur fengið að ráða því hvernig ég lærði stærðfræðina? Ég þyrfti ekki að rannsaka hug minn lengi til að sjá að það sem ég óskaði mér alltaf var að hafa kennara við höndina þegar ég þyrfti virkilega á því að halda. Það gerist náttúrulega ekki endilega í fyrirlestrum eða dæmatímum heldur þegar maður er sjálfur að fást við krefjandi verkefni og festist og hefur engan að spyrja. Þannig að það sem ég hef gert síðan er að fyrir utan fyrirlestrana hef ég vinnutíma þar sem nemendur eru að vinna og ég hvet nemendur til að vinna í litlum hópum, helst tveir eða í mesta lagi þrír því fleiri en það er yfirleitt ekki gott, og svo hjálpa ég þeim. Það geri ég ekki með því að segja þeim hvernig þeir eigi að gera hlutina heldur krefst ég þess að nemendur séu byrjaðir að leysa verkefnið og búnir að rekast á hindrun áður en þeir fara að spyrja mig. Á þeim tímamarki eru nemendur móttækilegastir fyrir hjálpinni og þá verður hún þeim að mestu gagni vegna þess að þá vita þeir nákvæmlega hvað það er sem þeir skilja ekki og þurfa hjálp við.“

Þú leggur sem sé höfuðáherslu á skilning umfram það að kunna einhverja tækni sem nota við að leysa

ákveðin dæmi?

„Já, ég legg alltaf áherslu á skilning en ég er ekki að halda því fram að hægt sé að sleppa þessari tæknilegu hlið – það er alls ekki hægt. Þvert á móti þá er styrkur stærðfræðinnar fölginn í þessu tvennu og í stuttu máli mætti segja að aðal stærðfræðinnar sé að taka flókin verkefni og skilja þau nógu vel til þess að maður geti síðan reiknað út úr þeim. Hins vegar eru stærðfræðileg verkefni hvar sem er yfirleitt ekki eins og þau eru í kennslubókunum þar sem búið er að matreiða þau fyrir mann þannig að maður viti hvaða verkfæri maður á að nota. Raunveruleg stærðfræðileg verkefni, hvort sem þau tengjast einhverskonar atvinnulífi eða stærðfræðinni sjálfri, eru þannig að þau eru mjög óljós þegar hafist er handa og maður þarf að byrja á því að reyna að skilja viðfangsefnið áður en maður getur farið að beita einhverjum aðferðum sem maður kann til að leysa þau. Því myndi ég segja að kjarni stærðfræðinnar sé að skilja verkefnið nógu vel til að geta leyst það með reikningi og þess vegna legg ég mikla áherslu á að nemendur skilji stærðfræðina sem þeir eru að nota.“

Er þetta sú aðferð sem þú myndir vilja sjá beitt í skólasamfélaginu, allt frá grunnskóla í háskóla, í þeim tilgangi að auka áhuga á stærðfræði almenn?

„Já. Auðvitað fer kennslan fram með ólíkum hætti í fyrstu bekkjum grunnskóla og í háskólanámi en hvað þetta varðar finnst mér algerlega nauðsynlegt að leggja áherslu á skilning. Ég er ekki að segja að börn þurfi ekki að kunna margföldunartöfluna (þó engin þurfi í sjálfum sér að kunna hana – ég þekki fullt af frambærilegum nemendum sem geri það ekki) því það er alveg ljóst að einhver slík kunnátta er nauðsynlegt og það er einfaldlega hagkvæmt því þá sleppur maður við allskonar vinnu. Það er líka margt fleira í stærðfræðinni sem er hagstætt að kunna en það er ekki nóg að kunna bara það og það er ekki nóg að þjálfast bara í þessum reikniáðferðum; þá kemst maður aldrei upp úr því sem sumir kalla „sjoppureikning“ og er auðvitað ágætur út af fyrir sig. Það er þó ljóst að ef maður kann bara aðferðirnar getur maður aldrei notað stærðfræðina á eitthvað sem er ekki búið að matreiða fyrir mann. Styrkur stærðfræðinnar fellst ekki í að vera fljótur að reikna heldur að skilja hlutina nógu vel til þess að geta notað hina greinandi hlið hennar til að leysa vandamál.“

Þannig að stærðfræðin er þá eins og hvert annað tæki sem nota má í hagnýtum tilgangi?

„Já. Flestir nota stærðfræðina í hagnýtum tilgangi – eiginlega allir nema stærðfræðingar! En ég er þó á þeirri skoðun að mjög svipaðar grundvallarreglur gildi um stærðfræðináms stærðfræðinga. Svo maður

segi það á dálítið öfgafullan hátt þá held ég að það læri engin stærðfræði „abstrakt“ þrátt fyrir þá staðreynd að stærðfræðin er í eðli sínu abstrakt og það sé hennar helsti styrkleiki. Hún snýst um það að sjá samhengi í hlutum – að sjá kjarnann í hlutum – óháð því hvernig þessir hlutir eru kynntir til sögunnar. Það er það sem við köllum abstraksjón. Hins vegar lærir engin stærðfræði á þessu abstrakt plani; það gerist nánast aldrei. Maður nær tökum á hlutunum með því að vera með eitthvað sem maður skilur sem „konkret“ hluti – þó það geti verið mjög „abstrakt“ hlutir fyrir öðru fólki. Þegar maður nær tökum á þessum hlutum eru þeir orðnir mjög konkret fyrir manni. En svo er maður alltaf að leitast við að sjá þessa abstraksjón, að sjá kjarnann og samhengið í hlutunum sem maður lýsir svo með einhverjum formlegum hætti sem er í sjálfu sér ólíkur þeirri mynd sem hlutirnir birtast í upphaflega. Ég held að stærðfræðingar, eins og aðrir, læri stærðfræði með því að fást við konkret fyrirbæri og skilja heildina og samhengið út frá því.

Þess vegna held ég að það sé frekar lítið gagn í því fyrir stærðfræðinema að læra stærðfræði með því að horfa á kennara skrifa setningar og sannanir sem nemandinn hefur aldrei séð áður upp á töflu og vita ekkert hvaðan koma. Allir stærðfræðingar hafa lent í því að sitja svona fyrirlestra en kjarni málsins er sá að maður hefur voða lítið gagn af því að sjá setningu og sönnun á henni ef maður hefur ekki hugmynd um hvað er verið að tala og maður hefur engin tengsl við umrædda setningu.“

En nú hafa stærðfræðikennarar stundum beitt þeim rökum að það sé einmitt sú þjálfun í abstrakt hugsun sem stærðfræðin veitir sem geri hana mikilvæga.

„Hún er gríðarlega mikilvæg og ég er ekki að halda öðrum fram. Hún er aðalsmerki stærðfræðinnar og það sem gerir hana svo öflug, ekki bara í daglega lífinu heldur fyrir aðrar fræðigreinar. Verkfræði snýst um hagnýtri stærðfræði og það sama má segja um flestar raungreinar. Þarna koma þessir abstrakt eiginleikar stærðfræðinnar í ljós en hins vegar lærir enginn stærðfræði á þessu abstrakt plani. Það byrja allir út frá einhverju sem þeir hafa tök á. Það er auðvitað hægt að kenna mörgum börnum að reikna með bókstöfum án þess að þau skilji nokkuð hvað þau eru að gera, og það er auðvitað góðra gjalda vert, en hins vegar hentar flestum betur að læra það þannig að skilningur verði til á því að það sama gildi um reikning með bókstöfum og reikning með tölum. Það er sem sé mín skoðun að ekki sé hægt að kenna stærðfræði með skilvirkum hætti með því að byrja á því að kynna hana á algerlega abstrakt hátt – hún þarf að vaxa upp úr einhverju sem nemendurnir kunna. Það er hollt í þessu sambandi að minnst þess að það eru bara nokkur hundruð ár

síðan neikvæðar tölur voru abstrakt í hugum venjulegs fólks og sjálfsagt margra stærðfræðinga líka. Það hvað er abstrakt og hvað konkret er ekkert sem er meitlað í stein.“

Snúum okkur að menntun stærðfræðikennara við Háskólann í Reykjavík. Hvar leggið þið áherslurnar?

„Höfuðáherslan er lögð á að þjálfra kennaranemana í stærðfræði. Við kennum þeim mjög mikla stærðfræði og veitum þeim þjálfun í henni. Um tveir þriðju þeirra sem eru í meistaranáminu eru starfandi kennarar sem eru búnir með sitt kennaranám og eru því svo til eingöngu í stærðfræðigreinum auk kennslufræði stærðfræðinnar. Mestu máli skiptir að nemendurnir öðlist gott vald á stærðfræðinni og að þeir kynnist þeim kennsluáferðum sem hér er beitt. Margir þessara nemenda segja við mig að þessar aðferðir hafi opnað þeim nýja sýn á stærðfræðikennslu.

Það kann að vera augljóst en ástæða þess að við leggjum svona mikla áherslu á stærðfræðina sem slíka er auðvitað sú að það er algerlega nauðsynleg að hafa gott vald á því sem maður er að kenna. Það þýðir ekki bara að maður geti reiknað öll dæmin í einhverri bók; maður þarf að skilja stærðfræðina á miklu hærra plani en nemendurnir og geta séð hana í miklu breiðara samhengi til þess að vera góður kennari. Þá á maður auðveldara með að skilja alls kyns mismunandi aðferðir sem nemendurnir búa til í því skyni að leysa verkefni og maður á auðveldara með að útskýra samhengið fyrir þeim.“

Nú reikna ég með því að þú hafir farið í gegnum íslenskt skólakerfi.

„Já, alveg upp í stúdentspróf.“

Hvernig passaði sú kennsla sem þú fékkst sjálfur við þær hugmyndir sem þú hefur um stærðfræðikennslu?

Frekar illa.

Getur þú lýst því nánar?

„Já, það er rétt að geta þess að ég var frekar latur nemandi þangað til ég var kominn í öldungadeildina 27 ára gamall þannig að það er kannski ekki hægt að draga miklar ályktanir af því. En sú kennsla sem ég man eftir var með þessu hefðbundna formi, fyrirlestrar og dæmareikningur. Það vantaði alveg þetta stöðuga samspil milli nemenda og kennara sem ég vill sjá. Ég veit að þetta hefur breyst mikið á mörgum stöðum síðan ég var í skóla og margir hafa tekið upp aðrar aðferðir. Ég var til dæmis í heimsókn í Fjölbautaskóla Snæfellinga í fyrra og þar var mér sagt að stærðfræðin væri kennd með svipuðum hætti og ég hef verið að gera. Ég vil sjá meira af þessu: að nemendur og kennarar séu að tala saman fremur en að nemendur

séu óvirkir áhorfendur.“

Nú eru til tveir megin skólar þegar kemur að stærðfræðikennslu: annars vegar eru þeir sem leggja áherslu á að skilningur á stærðfræðinni komi á undan beitingu hennar og hins vegar þeir sem telja að með því að leggja nemendum til aðferðir til lausnar ákveðnum vandamálum og þjálfra þá í beitingu þeirra náist að lokum fram skilningur þeirra á viðfangsefninu. Tilheyrir þú öðrum þessara skóla fremur en hinum?

„Nei, alls ekki og mér finnst þessi umræða alltaf hafa verið á algerum villigötum. Þetta getur aldrei orðið annað hvort eða. Það verður að vera hvort tveggja; það verður að þjálfra tæknilegu hliðina og skilninginn samtímis. Sex ára börnum kennir maður auðvitað ekki bókstafareikning á fyrstu vikum þeirra í skóla, þó auðvitað mætti prófa það. Reyndar er ég þeirrar skoðunar að kennarar ættu að vera miklu duglegri við að gera tilraunir til að ögra getu nemenda því reynslan hefur kennt mér að viðfangsefni sem hafa ekki verið talin á færi annarra en doktorsnema hafa hentað nemendum á lægri stigum ágætlega.

En aðalatriðið er að skilningur og aðferðafræði þarf alltaf að haldast í hendur. Það kemur fyrir að nemandi öðlast skilning með því að beita sömu aðferðinni aftur og aftur en það er þó engin trygging fyrir því að það gerist. Til þess að það gerist verður nemandinn sjálfur að vera að hugsa um hvað hann er að gera. Hlutverk kennarans er að tengja saman þessa tvo þætti. Ég sé þessar tvær nálganir ekki sem andstæður heldur tel ég að þetta styðji hvort annað og því þurfi að leggja áherslu á hvort tveggja.“

Þú hefur reynslu af háskólakennslu, bæði hér heima og eins í Bandaríkjunum og Svíþjóð. Finnur þú einhvern mun á undirbúningi nemenda undir háskólanám í þessum löndum?

„Ég get ekki borið þetta saman með beinum hætti því þótt ég hafi kennt mörgum nemendum í Svíþjóð sem voru að koma beint úr framhaldskólanámi þá eru þeir ekki margir hér á landi. Ég er hins vegar nokkuð viss um að það er meiri breidd í þessu hér en er í Svíþjóð. Þar var ég að kenna nemendum sem stunduðu verkfræðinám og voru rjóminn af sænskum stúdentum. Þetta voru krakkar sem hafði alltaf gengið mjög vel í námi en jafnvel þeir allra klárustu höfðu hræðilega lélegan bakgrunn og höfðu ekki hugmynd um það hvað stærðfræðileg röksemdafærsla var, svo dæmi sé tekið. Ég er nokkuð viss um að breiddin er meiri hér á landi, að bestu nemendurnir sem koma frá sumum skólum eru með miklu betri bakgrunn en þeir sænsku. En í það heila er ljóst að nemendur með stúdentspróf, jafnvel af náttúrufræðibrautum, eru ekki vel undir það búnir að takast á við háskólastærðfræði,

að minnsta kosti ekki eins og hún var kennd fyrir 30 árum. Það þarf einnig að hafa það í huga að fyrir 30 árum var aðeins lítið hlutfall, kannski 10% hvers árgangs, sem kom upp í háskólana; nú eru þetta jafnvel 50% eða meira þannig að landslagið er gerbreytt í þessum efnum og engin spurning að háskólarnir verða auðvitað að laga sig að því.“

En hefur þú áhyggjur af því að háskólinn þurfi að slá af kröfum sínum, að námið verði, eins og stundum er sagt, gengisfellt?

„Ég hef engar áhyggjur af því. Það er hægt að hafa skoðanir á því hvort of margir séu að fara í háskóla en ég hef enga skoðun á því. Það er hins vegar alveg ljóst að skólarnir verða að laga sig að bakgrunni og getu þeirra nemenda sem þeir eru að taka inn. Það er fáránlegt að taka inn fullt af nemendum og ætla svo ekki að laga sig að því sem þeir ráða við. Auðvitað mætti segja sem svo að við getum ekki gert sömu kröfur í dag eins og fyrir 30 árum en á hinn bóginn er það mikill misskilningur að það fyrsta sem þurfi að gera sé að minnka kröfurnar. Mín reynsla er sú að það þurfi ekki að minnka kröfurnar heldur að breyta kennslunni og gera hana miklu, miklu skilvirkari.

Kennslan þarf að nýtast nemendum betur og maður þarf að hjálpa þeim miklu meira. Það er líka reynsla mín frá verkfræðináminu í Svíþjóð, þar sem við fengum inn bestu nemendurna úr menntaskólunum, að kennararnir kvörtuðu mikið um að nemendur væru lélegir, að þeir gætu ekki staðið undir þeim kröfum sem gerðar voru til þeirra, í stað þess að hjálpa þeim að komast upp á hærra plan. Þar sá ég ár eftir ár að nemendur sem manni fannst vera alveg

ömurlega lélegir á fyrsta ári voru á þriðja ári komnir á það plan sem manni þótti eðlilegt að þeir væru á; þeir voru búnir að vinna þetta upp. Því eigum við ekki að vera að skammast yfir þessu og kenna öðrum, þ.e. nemendum, um heldur eigum við að sjá til þess að kennslan nýtist þeim miklu betur – við verðum bara að vera duglegri í kennslunni.“

Hvað með framtíð stærðfræðinnar? Hvernig á okkur Íslendingum eftir að reiða af í sífellt tæknivæddari heimi sem gerir sífellt meiri kröfur um kunnáttu í stærðfræði?

„Ég er nú alltaf bjartsýnn og ég held að framtíðin sé björt í þessum efnum. Ástæðan er sú að það virðist vera gríðarleg samstaða um það á Íslandi meðal allra sem fjalla um þessi mál að það þurfi að gera átak í stærðfræðikennslu og að það sé mikilvægt. Og þótt það sé yfirleitt erfitt og seinlegt að breyta svona hlutum þá held ég að Ísland sé einhver besti staðurinn til þess sem til er. Ég held að það sé tiltölulega auðvelt að breyta hlutunum hér og gera virkilegt átak í stærðfræðimenntun. Við erum að vinna að því af fullum krafti hér í Háskólanaum í Reykjavík og erum að reyna að hafa áhrif út um allt. Ég held áfram að vera mjög bjartsýnn um að eftir 10 ár getum við, og aðrir þeir sem hafa jafn mikinn áhuga á þessu máli og við, horft til baka og sagt: það gerðist eitthvað.“

Anton Már Gylfason situr í ritnefnd Flatarmála og kennir við Borgarholtsskóla

Kennslufræði- og lýðheilsudeild Háskólans í Reykjavík býður upp á þrjár leiðir til háskólamenntunnar í stærðfræði. Í fyrsta lagi er um að ræða BS gráðu í stærðfræði þar sem boðið er upp á ýmis námskeið í stærðfræði (30 eininga skylda og 30 eininga val) auk þess sem nemendur geta valið 30 einingar í námskeiðum innan annarra deilda, til dæmis viðskipta-, tölvunar- eða verkfræðideildar. Í öðru lagi býður deildin upp á B.Ed. gráðu þar sem 30 einingar eru teknar í kennslufræði og 60 í stærðfræði. Öðlast þeir nemendur sem velja þessa leið kennsluréttindi í grunnskóla. Síðast en ekki síst býður skólinn upp á 60 eininga M.Ed. nám í stærðfræði og kennslufræði. 30 einingar eru ætlaðar stærðfræði og annað eins kennslufræðinni en nemendur hafa möguleika á að fá þær einingar sem þeir hafa þegar lokið í kennslufræði metnar. Ítarlegri upplýsingar má finna á vef HR, www.hr.is.

Ögrandi stærðfræðigátur

Kristín Halla Jónsdóttir

Eftirfarandi grein er unnin upp úr erindi sem flutt var í lokahófi Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema sem haldið var í Skólabæ 18. mars 2007. Félag raungreinakennara og Íslenska stærðfræðafélagið standa að keppninni.

Bókin „Síðasta setning Fermats“ eftir Simon Singh kom út í íslenskri þýðingu á vegum Hins Íslenska bókmenntafélags í desember síðast liðinn. Bókin er um sögu samnefndrar stærðfræðigátu og glímu stærðfræðinga og leikmanna við hana í meira en 300 ár. Einkum og sér í lagi fjallar Singh um atlögu stærðfræðingsins Andrew Wiles að setningunni, atlögu sem tók átta ár en lauk með fullum sigri Wiles árið 1994.

Pierre de Fermat var uppi 1601–1665. Hann var franskur, dómari að atvinnu og bjó og starfaði í Toulouse. Hann var frístundastærðfræðingur sem sinnti stærðfræðinni í einsemd en er þrátt fyrir það talinn einn merkilegasti stærðfræðingur allra tíma. Hann fékk mikilvægar hugmyndir á ýmsum sviðum stærðfræðinnar en fyrst og fremst er hans minnst sem upphafsmanns nútíma talnafræði. Fermat stóð í bréfaskiptum við marga stærðfræðinga í Evrópu, einkum í Frakklandi og Englandi, og bréf hans bárust vítt og breitt manna á milli. Þannig urðu hinar merkilegu uppgötvanir hans kunnar þeim sem höfðu stærðfræði að atvinnu. Til að vekja forvitni bréfavina sinna brá Fermat á það ráð að setja stærðfræðisetningar sínar fram án sönnunar og ögra þeim þannig til að takast sjálfir á við sannanirnar.

Fjölmargar tilgátur og fullyrðingar Fermats héldu áfram að brýna stærðfræðinga eftir daga hans. Frægust allra er sú sem gengur undir nafninu „síðasta setning Fermats“. Eftir dauða Fermats réðst Clément-Samuel, sonur hans, í að safna saman skrifum föður síns. Eitt af því sem hann fann var „síðasta setningin“, þ.e. eftirfarandi fullyrðing sem Fermat hafði skrifað á spássíu algebrubókar sinnar Arithmetica eftir Díófantos (hér með orðum algebrunnar):

Ef $n > 2$ þá á jafnan $x^n + y^n = z^n$ sér enga jákvæða heiltölulausn.

Svo bætti Fermat við á spássíuna að hann hefði uppgötvað satt að segja dásamlega sönnun á þessu en hripar svo niður að spássían sé of þröng til að rúma hana. Það er löngu orðið ljóst að síðasta setning Fermats hefur í aldanna rás verið ögrandi áskorun og haft djúpstæð áhrif hundruði manna. Á árinu 1986 jókst áhuginn á setningunni óhemjumikið þegar tveir stærðfræðingar tengdu fræga tilgátu, svokallaða Taniyama/Shimura-tilgátu, við setninguna. Það var einmitt sönnun Andrews Wiles á þessari tilgátu sem leiddi af sér sönnunina á síðustu setningu Fermats átta árum seinna. Sönnun Wiles beitir vel flestum aðferðum nútíma talnafræði og er stórbrotinn stærðfræðilegur sigur sem vitnar um ótrúlegan frumleika og þolgæði einstaklings. Hann vann að sönnuninni sleitulaust í átta ár og þrekauninni er lýst á áhrifamikinn hátt í bók Singhs. Stærðfræðilega séð hefur sönnun Wiles verið talin ígildi þess að kljúfa atómið eða uppgötva byggingu DNA-erfðaefnisins. Sönnunin er mikill vitsmunalegur sigur og ekki má horfa fram hjá þeirri staðreynd að hún hefur í einni svipan gjörbylt talnafræði.

Jafnvel þótt Wiles hafi endanlega afgreitt frægasta dæmi stærðfræðisögunnar þurfa þeir sem vilja glíma við stærðfræðigátur ekki að missa móðinn því enn úir og grúir af þeim óleystum. Margar þeirra, eins og síðasta setning Fermats, eiga rætur í stærðfræði Forn-Grikkja, en eru þó skiljanlegar börnum á skólaaldri. Til dæmis eru enn óleystar gátur um fullkomnu tölurnar. (Náttúrleg tala er fullkomin ef hún er summa allra minni talna sem ganga upp í hana. Til dæmis talan 6 sem uppfyllir: $6 = 1 + 2 + 3$). René Descartes sem hnitarrúmfræði er kennd við á að hafa sagt: „Fullkomnar tölur eru líkt og fullkomnir menn afar sjaldgæfar“. Satt að segja hafa aðeins 44 þeirra verið uppgötvaðar og þær eiga það allar sameiginlegt að vera sléttar tölur, sem kann að benda til þess að allar fullkomnar tölur séu það. Það er ótrúlegt hvað

Það reynist erfitt að sanna þetta en hér er þá komin augljós áskorun – óleyst gáta: eru allar fullkomnar tölur sléttar tölur? Önnur stór spurning varðandi fullkomnar tölur er sú hvort þær séu óendanlega margar. Á liðnum öldum hafa þúsundir talnafræðinga reynt án árangurs að sanna að til séu, eða ekki séu til, óendanlega margar fullkomnar tölur. Sá sem leysir þessa gátu á frátekið pláss á spjöldum sögunnar.

Ýmsar fleiri óleystar fornar gátur tengjast frumtölunum. Það hvernig frumtölurnar sitja innan um aðrar tölur virðist ekki fylgja greinanlegu mynstri, þvert á móti hefur þeim verið lýst sem gróðri sem sái sér sjálfur af handahófi. Séu náttúrlegu tölurnar skoðaðar getur maður rekist á bil þar sem er mikið af frumtölum og svo, án þess að nokkur skýring finnist, á önnur bil sem eru alger berangur. Öldum saman hafa stærðfræðingar reynt án árangurs að finna mynstur að baki frumtölunum og enn er auglýst eftir slíku mynstri – óráðin gáta að finna það. Fyrir tvö þúsund árum sannaði Grikkinn Evklíð að frumtölurnar séu óendanlega margar en síðustu tvær aldirnar hafa stærðfræðingar reynt að sanna að frumtalnatvívurur séu líka óendanlega margir. Frumtalnatvívurur eru par af frumtölum sem standa eins nálægt hvor annarri og frumtölur geta gert (ef talan 2 er undanskilin), þ.e. mismunur þeirra er 2. Dæmi um frumtalnatvívurur eru pörin (5, 7) og (17, 19) og meðal stærri para má finna (22.271, 22.273). Frumtalnatvívurur virðast eiga það sammerkt með frumtölunum að dreifast af handahófi meðal heilu talnanna en eftir því sem menn leggja meira á sig til að finna þá finnast sífellt fleiri. Allt bendir til þess að frumtalnatvívurur séu óendanlega margir en engum hefur enn tekist að sanna að svo sé – óleyst gáta.

Framfaraskref í áttina að sönnun þessarar svokölluðu *frumtalnatvívura-tilgátu* var stigið á árinu 1966 þegar kínverskum stærðfræðingi, Chen að nafni, tókst að sýna fram á að til séu óendanlega mörg pör af frumtölu og *næstum frumtölu*. Raunveruleg frumtala hefur, eins og kunnugt er, engan annan frumþátt en sjálfan sig en næstum frumtala er næst besti kosturinn því hún hefur tvo frumþætti (nákvæmlega tvo). Þannig er talan 21 næstum frumtala, frumþættir hennar eru 3 og 7. Chen gat sannað að til væru óendanlega mörg tilfelli þar sem frumtala á sér aðra frumtölu eða næstum frumtölu að tvívura. Þeim sem tekst að stíga einu skrefi lengra og losna við þetta *næstum* hefur tekist að stíga stærsta framfaraskrefið í frumtalnafræði frá dögum Evklíðs.

Aðra frumtalnagátu má rekja aftur til ársins 1742, þegar Goldbach, kennari rússakeisarans unga, Péturs

II, skrifaði bréf til Leonhards Euler, hins mikla stærðfræðings. Goldbach hafði skoðað fjöldann allan af sléttum tölum og uppgötvað að hann gat klofið þær allar upp í summu tveggja frumtalna (eina undantekningin var talan tveir). Dæmi: $4 = 2 + 2$, $50 = 19 + 31$, $21.000 = 17 + 20.983$. Goldbach spurði Euler í bréfinu hvort hann gæti sannað að þetta gilti um sérhverja slétta tölu en þrátt fyrir að stríða við þetta árum saman skildi þessi áskorun Euler eftir ráðþrota. Manninn sem sumir trúðu að gæti reiknað allt og hafði viðurnefnið „analysis incarnate“ (stærðfræðigreiningin holdi klædd). Á dögum tölvutækni hefur Goldbach-tilgátan, eins og hún kallast nú, verið prófuð á fleiri og fleiri tölur og sýnt hefur verið að hún gildir fyrir allar sléttar tölur upp að stærðargráðunni en engum hefur tekist að sanna að hún sé sönn fyrir allar sléttar tölur, út í það óendanlega. Enn ein óleyst gáta.

Þegar síðasta setning Fermats hafði verið sönnuð töldu margir að svokallað kúlnatroðsludæmi Keplers verðskuldaði það að teljast mikilvægasta óleysta gátan í stærðfræði. Kepler þessi er þýski vísindamaðurinn sem í byrjun 17. aldar sýndi fram á að reikistjörnurnar færu eftir sporöskjulaga, en ekki hringlaga, brautum og sú uppgötvun umbylti stjörnufræði og átti eftir að verða hvatinn að því að Newton setti fram kenninguna um þyngdaraflið. Kepler lætur að vísu ekki eftir sig stærðfræðiarf sem er jafn stór í sniðum og stjörnufræðiarfurinn en hann telst jafn djúpstæður. Í stórum dráttum snýst stærðfræðiarfurinn um hina áhugaverðu en hversdagslegu spurningu um hvernig raða megi appelsínur á sem hagkvæmastan hátt. Dæmið varð til árið 1611 þegar Kepler skrifaði fræðigreina með yfirskriftinni „Um sexhyrnda snjóhornið“ þar sem hann útskýrði á sannferðugan hátt af hverju engin tvö snjóhorn eru eins en þó öll sexhyrnd. Þetta er glaðleg grein og með henni lagði Kepler, sem bjó yfir ótrúlegum hæfileika til að öðlast djúpa innsýn við einföldustu athuganir, grunninn að kristallafræði. Áhugi Keplers á því hvernig efnisagnir raðast, og að því er virðist skipa sér sjálfar, varð til þess að hann tók að glíma við aðra spurningu: Á hvern hátt er hagkvæmast að stafla ögnum þannig að þær taki sem minnst rúmmál? Sé gert ráð fyrir kúlulaga ögnum er ljóst að sama hvernig þeim er skipað verður óhjákvæmilega alltaf holrúm á milli þeirra, og vandinn felst í því að finna skipan sem gefur minnst holrúm. Til að leysa dæmið raðaði Kepler kúlum upp á ýmsa lund og reiknaði síðan út pökkunarhagkvæmni fyrir hverja uppröðun.

Ein af fyrstu uppröðunum sem Kepler skoðaði nefnist nú í stærðfræði hliðarmiðsett teningsgrind. Hana má byggja upp með því að búa fyrst til botnlag

af kúlum þannig að hver kúla sé umkringd sex öðrum snertikúlum. Næsta lag er búið til með því að láta kúlur ofan í „bollana” á fyrra laginu. Í raun er lag númer tvö eftirmynd lags númer eitt en því hefur verið hliðrað lítilliga til svo það falli þétt að hinu. Þessi uppröðun er sú sama og kaupmenn nota þegar þeir stafla appelsínum upp í strýtu og pökkunarhagkvæmni hennar er 74%. Þetta þýðir að ef fylla ætti stóran kassa af appelsínum og nota hliðarmiðsettu skipanina þá myndu appelsínurnar fylla 74% af rúmmáli kassans. Eftir að Kepler hafði rannsakað fjöldan allan af uppröðunum setti hann fram niðurstöðu: „Pakkning skv. hliðarmiðsettri teningsgrind er eins þétt og hugsast getur”. Það var fullkomlega eðlilegt fyrir Kepler að setja þessa fullyrðingu fram því þetta var besta pökkunarhagkvæmni sem hann hafði fundið eftir þrotlaus leit, en það útilokaði ekki þann möguleika að til væri skipan sem honum hefði yfirsést og væri með enn betri pökkunarhagkvæmni. Þessi litla óvissa er kjarninn í kúlratroðsludæminu, óvissa sem þarf að eyða.

Líkt og með síðustu setninguna kallar dæmi Keplers á það að þróuð verði sönnun sem nær til óendanlega margra möguleika. Fermat hélt því fram að meðal allra hinna óendanlega mörgu náttúrlegu talna sé enga lausn að finna á jöfnu sinni, og Kepler hélt því fram að á meðal hinna óendanlega mörgu hugsanlegu uppraðana á kúlum væri engin með betri pökkunarhagkvæmni en hliðarmiðsetta teningsgrindin. Fyrir utan að sanna að engar reglulegar uppraðanir finnist, sem hafa betri pökkunarhagkvæmni, þarf líka að taka allar hugsanlegar handahófskenndar uppraðanir með í reikninginn. Í tæp 400 ár tókst engum að finna betri uppröðun og þetta varð til þess að breski kúlratroðslufræðingurinn C. A. Rogers hafði á orði um fullyrðingu Keplers að hún væri það sem „*flestir stærðfræðingar trú á en allir eðlisfræðingar vita*”. Roger sjálfum tókst að setja pökkunarhagkvæmninni efri mörk. Hann reiknaði út árið 1958 að það sé óhugsandi að til sé uppröðun með meiri pökkunarhagkvæmni en tæp 78%. Þessi hlutfallstala er ekki miklu hærri en pökkunarhagkvæmni Keplers. Fleiri stærðfræðingar fylgdu í fótspor Rogers og reyndu að loka smugunni endanlega með því að koma efri mörkunum niður en því miður reyndist það erfitt og lítið gekk næstu 40 árin. En fyrir tæpum 10 árum (1998) tókst loks Thomas Hales prófessor við Háskólann í Pittsburg að „sanna” kúlratroðslu-tilgátu Keplers með aðstoð tölvu, hann beitti flóknum tölvureikningum til að reikna út tilfelli eftir tilfelli eftir tilfelli ... Niðurstaðan var birt í stærðfræðitímariti eftir grandskoðun ritrýna sem sögðust vera „99% vissir um að hún væri rétt”.

Í baráttunni við síðustu setningu Fermats sem lauk

árið 1994 voru blýantur, blað og rökrétt hugsun einu vopnin sem Andrew Wiles beitti. Sönnunin er mjög hefðbundin, í anda Pýþagórasar og Evklíðs, jafnvel þótt Wiles nýti flestar nútímaaðferðir talnafræðinnar. Hún er dæmi um hetjusönnun í stærðfræðinni eins og þær hafa gerst bestar. Tölvusönnun Hales og fleiri slíkar fær mann hins vegar til að velta því fyrir sér hvort hetjusannanir muni í framtíðinni verða úr sögunni en við taki sannanir sem byggjast á „handafli” frekar en glæsilegri röksemdafærslu, silíkon-sannanir, eins og tölvusannanir hafa stundum verið nefndar og sumir vilja telja vísbendingu um hnignun stærðfræðinnar. Fyrsta fræga dæmið sem á endanum var leyst með silíkon-sönnun var uppgötvað í Englandi árið 1852 af frístundastærðfræðingnum Francis Guthrie. Dag nokkurn þegar Guthrie var í mestu makindum að lita kort af sýslum Bretlands datt hann niður á ráðgátu sem virtist auðveld en hann gat svo ekki leyst. Hann vildi einfaldlega fá svar við því hver væri minnsti fjöldi lita sem dygði til að lita hvaða landakort sem væri þannig að engin tvö lönd með sameiginleg landamæri yrðu eins á litinn. Guthrie var svekktur að ráða ekki við dæmið og hann nefndi það við yngri bróður sinn sem var við háskólanám í London. Bróðirinn lagði síðan dæmið fyrir kennarann sinn, hinn virta prófessor De Morgan, sem skrifar í bréfi til írska stærð- og eðlisfræðings Hamiltons:

Nemandi minn bað mig í dag að útskýra fyrir sér staðreynd sem ég vissi ekki að væri staðreynd – og veit ekki enn. Hann segir að hvernig sem flatarmynd sé skipt upp í svæði og þau lituð með ýmsum litum þannig að svæði, með hvað litla sameiginlega landamæralínu sem er, fái ólíkan lit, þá gæti þurft fjóra liti en ekki meir. Ég hef tilfelli sem kallar á fjóra liti. Spurning: Er ekki hægt að búa til dæmi þar sem fimm eða fleiri litir eru nauðsynlegir ... Ef þú svarar um hæl með mjög einföldu dæmi sem lætur mig lita út eins og asna þá verð ég að gera eins og Spinixin forðum ...

Hamilton tókst ekki að búa til kort sem þyrfti fimm liti en hann gat heldur ekki sannað að slíkt kort væri ekki til. Dæmið spurdist hratt út um Evrópu, en það stóð kröftuglega af sér allar árásir. Stærilætið náði tókum á Hermann Minkowski sem sagði að ástæða þess að ekki væri búið að leysa dæmið væri sú að aðeins Þriðja flokks stærðfræðingar hefðu glímt við það, en svo mistókst honum einnig sjálfum. „*Almættið hefur reiðst mér fyrir hrokann*”, tilkynnti hann, „*minni sönnun er líka ábótavant*.” Þrátt fyrir að hafa skapað eitt af þyngstu dæmum stærðfræðinnar, sem síðan hefur gengið undir nafninu fjögralitadæmið gaf Francis Guthrie stærðfræði upp á bátinn og hallaði sér að grasafraði.

Eina tilkall hans til frægðar fyrir utan fjögralítadæmið varð á því sviði – við hann er kennt beitleyng, Erica Guthriei. Eftir að fjögralítadæmið hafði verið óleyst í aldarfjórðung fylltust menn bjartsýni árið 1879 þegar breskur stærðfræðingur Kempe að nafni birti grein með sönnun á gátunni. Ekki varð betur séð en Kempe hefði sannað að fjórir litir dygðu hvaða korti sem er og fræðileg ritrýni staðfesti það. Það skipti engum togum að hann var kjörinn Meðlimur í Konunglega breska vísindafélagið (sem var mikill heiður) og var síðar aðlaður fyrir framlag sitt til stærðfræðinnar. En – áratug eftir að Kempe hafði leyst dæmið, eftir því sem best var vitað, birti John Heawood við Durham-háskóla grein sem skók stærðfræðisamfélagið því í henni sýndi hann fram á að hin svokallaða sönnun Kempes væri alvarlega gölluð. Eini ljósi punkturinn var að í „niðurrifsgreininni” tókst Heawood að sanna að hámarksföldi lita væri annaðhvort fjórir eða fimm, vissulega ekki meira en það.

Þótt Kempe, Heawood og fleirum tækist ekki að leysa fjögralítadæmið þá lögðu misheppnaðar tilraunir þeirra gífurlega mikið til hins nýja og ört vaxandi sviðs stærðfræðinnar, grannfræði. Ólíkt rúmfræði þar sem fengist er við nákvæma stærð og lögun hluta þá hefur grannfræði aðeins áhuga á eðli hlutarins, mestu grundvallareiginleikum hans. Stærðfræðingurinn John Kelly lýsti þessu þannig (á sinn sérstaka hátt): „Grannfræðingur er sá sem sér ekki mun á kleinuhring og kaffibolla.” Stærðfræðingar bundu vonir við að með því að skoða landakort með „einföldunargleri” grannfræðinnar næðu þeir tókum á kjarnanum í fjögralítadæminu. Fyrsta stóra framfaraskrefið var stigið árið 1922 þegar tókst að sanna að öllum landakortum með 25 eða færri löndum dygðu fjórir litir. Á árinu 1926 tókst að útvíkka sönnunina svo hún næði til korta með upp í 27 lönd; 1940 voru löndin komin upp í 35; og 1970 upp í 39. Glíman við dæmið virtist endurspeglar sögu síðustu setningar Fermats: Hæg framvinda í átt að hinu óendanlega. Upphaflega tilgátan virtist næstum örugglega vera rétt, en þar til almenn sönnun væri fundin þá var alltaf sá möguleiki fyrir hendi að einhver ætti eftir að teikna kort sem myndi afsanna tilgátu Guthries. Satt að segja, gerðist það 1975 að blaðamaðurinn og rithöfundurinn Martin Gardner birti kort í Scientific American sem hann fullyrtaði að þyrfti fimm liti. Útgáfudagur tímaritsins var 1. apríl og Gardner vissi manna best að þótt það gæti reynst erfitt að lita kortið með fjórum litum þá var það ekki ógerlegt.

Hinar hægu framfarir gerðu það sífellt ljósara að hefðbundnar aðferðir myndu seint duga til að brúa bilið milli sönnunar sem tók til korta með allt að 39

löndum, og sönnunar fyrir hvaða hugsanlegt kort sem væri. Þá gerðist það að tveir stærðfræðingar við Háskólann í Illinois, Haken og Appel, fundu upp nýja aðferð sem átti eftir að gjörbylta hugtakinu stærðfræðileg sönnun. Þeir höfðu verið að kynna sér rannsóknir stærðfræðings sem hélt því fram að öll hugsanleg kort mætti búa til úr endanlegum fjölda undirstöðukorta og með því að skoða undirstöðukortaeiningar kynni að vera hægt að ná tókum á almenna dæminu. Undirstöðukortin voru ígildirafeindarinnar, róteindarinnar og nifteindarinnar – grundvallareiningar sem allt annað mátti byggja úr. Því miður reyndist málið ekki eins einfalt og í tilfelli hinnar heilögu þrennu atómeinda, því Hacken og Appel tókst aðeins að koma fjögralítadæminu niður í 1482 undirstöðueiningar. En gætu þeir sýnt að þessi kort væru öll litanleg með fjórum litum þá væru öll hugsanleg kort það líka. Að fara í gegnum öll 1482 kortin og alla hugsanlega litasamsetningu á hverju þeirra yrði gífurleg vinna, sannarlega ofvaxin hvaða hópi stærðfræðinga sem væri. Jafnvel það að láta tölvu hjakka í gegnum og kanna alla þessa möguleika gæti tekið heila öld. En Hacken og Appel létu ekki bugast heldur tóku að leita leiða sem tölvan gæti notað til að flýta fyrir könnunarferlinu og allt í einu fór hún að haga sér eins og skáktölva. Forritið fór að setja saman lausnaleyðir sem byggðust á öllum snjallræðunum sem því höfðu verið „kennd”, og oft voru þessar leiðir miklu klókari en þær sem mennirnir hefðu reynt. Forritið fór að kenna þeim ýmislegt um það hvernig þeir gætu haldið áfram og í vissum skilningi má segja að það hafi farið fram úr sköpurum sínum í sumum „greindar”-þáttum verkefnisins ekki síður en þeim vélrænu.

Árið 1976, sex árum eftir að þeir tóku að glíma við dæmið og 1200 vinnustundum í tölvu síðar, gátu Haken og Appel tilkynnt að öll 1482 kortin hefðu verið greind og ekkert þeirra þyrfti fleiri en fjóra liti. Fjögralítadæmi Guthries hafði loksins verið leyst. Merkilegast af öllu var að þetta var fyrsta sönnun í stærðfræði þar sem tölva hafði gert meira en bara flýta fyrir útreikningum – hún hafði sjálf lagt svo ríkan skerf til niðurstöðunnar að án hennar hefði sönnunin verið óhugsandi. Þetta var gífurlegt afrek en því fylgdi viss óróleikatilfinning sem fór um stærðfræðisamfélagið því það var engin leið að sannreyna niðurstöðuna á hefðbundinn hátt. Áður en kæmi til birtingar á sönnuninni í fagtímariti urðu ritstjórnarnir að fá á hana einhverskonar faglega ritrýni. Hefðbundin ritrýni kom ekki til greina, svo þess í stað var forriti Hakens og Appels stungið inn í aðra tölvu til að sýna að hún kæmist að sömu niðurstöðu. Þessi óhefðbundna aðferð við ritrýni gerði ýmsa stærðfræðinga bálreiða, vægast sagt, og þeir héldu því

fram að þetta væri ófullkomin sannprófun enda væri ekkert sem tryggði að ekki kynni að vera galli innst inni í tölvunni sem orsakaði villu í röksemdafærslunni. Menn týndu til ýmsar staðreyndir um tölvusannanir máli sínu til stuðnings. Upp að vissu marki var þetta ofsóknarkennd hjá samfélagi sem kys að sniðganga tölvur frekar en hagnýta sér þær. Joseph Keller tók eftir því eitt sinn að við skólann hans, Stanford, voru færri tölvur í stærðfræðideildinni en nokkurri annarri deild, franskar bókmenntir þar með taldar. Þeir stærðfræðingar sem höfnuðu sönnun Hakens og Appels gátu ekki neitað því að allir stærðfræðingar taka hefðbundnar sannanir góðar og gildar þótt þeir hafi ekki sjálfir sannreynt þær. Sönnun Wiles á síðustu setningu Fermats skilur ekki einu sinni tíundi hluti talnafræðinga fyllilega en allir taka hana góða og gilda. Þeir sem geta ekki skilið sönnunina eru sáttir við hana því aðrir, sem skilja hugtökin sem þar eru á ferðinni, hafa rannsakað þau og sannreynt.

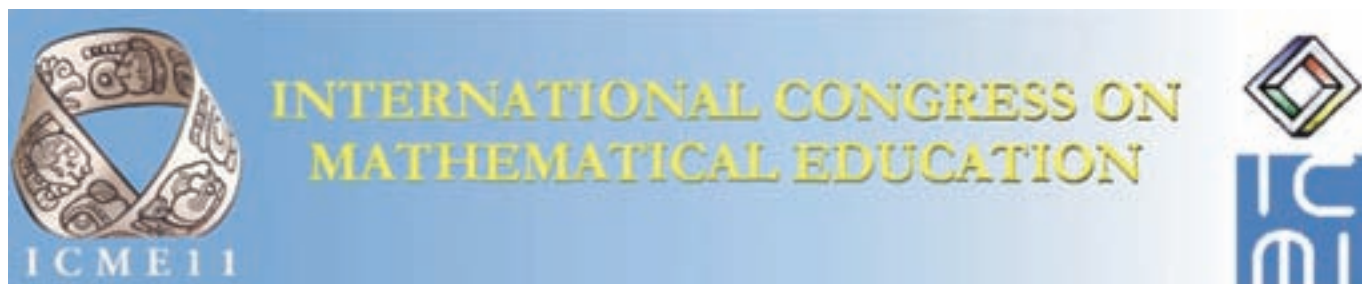
Á þeim þrjátíu árum sem liðin eru frá því sönnunin á fjögralitadæminu var tilkynnt hafa tölvur verið notaðar til að leysa kúlnatroðsludæmið eins og að framan er minnst á og önnur minna fræg, en engu síður merkileg, dæmi. Á fræðasviði sem fram að þessu hefur verið „ómengað“ af tækninni eru nú sífellt fleiri stærðfræðingar, með semingi þó, að setta sig við aukna notkun á tölvurökfræði, silíkon-rökfræði, og hallast að skoðun Hackens sem segir: „Hver sem er getur, hvar sem er í ferlinu, farið ofan í smáatriðin og sannreynt þau. Sú staðreynd að tölva getur farið í gegnum fleiri smáatriði á nokkrum klukkustundum en manneskja gæti einu sinni látið sig dreyma um að gera á allri sinni ævi, breytir ekki hugtakinu stærðfræðileg sönnun. Það sem hefur breyst eru ekki fræðin heldur framkvæmdin á stærðfræðinni.“ En það sem ekki fer á milli mála

er að tölvusönnun muni alltaf vanta útskýringarnar sem hefðbundin sönnun gefur og virðast innantóm samanborið við hana. Stærðfræðileg sönnun ætti ekki aðeins að svara spurningu, hún ætti einnig að varpa ljósi á hvers vegna svarið er það sem það er. Það að senda spurningu inn í svarthol og fá svar sent til baka bætir við þekkingu en eykur ekki skilning. Í sönnun Andrews Wiles á síðustu setningu Fermats kemur fram svar: „Að það séu engar lausnir til á jöfnu Fermats“, en Wiles rökstyður svarið, eins og kemur fram í bók Singhs, með því að segja að það verði að vera það sem það er til að grundvallar samband milli svokallaðra sporgerra jafna og mátforma haldist, en það er einmitt þetta samband sem Taniyama/Shimura-tilgátan (sem minnst er á hér að framan) fjallar um.

Margir stærðfræðingar draga ekki dul á það hvað þeim finnast tölvusannanir innantómar. Einn þeirra, Philip Davis, lýsti því á eftirfarandi hátt hvernig honum varð við þegar hann heyrði að fjögralitadæmið hefði verið sannað:

Fyrstu viðbrögð mín voru: „Dásamlegt! Hvernig fóru þeir að þessu?“ Ég átti von á einhverri stórkostlegri nýrri innsýn, sönnun sem snerist um svo fallega hugmynd að fyrir mér opnaðist nýr heimur. En þegar ég fékk svarið: „Þeir gerðu það með því að brjóta sönnunina upp í þúsundir tilfella og mata svo tölvu á þeim, einu af öðru“, þá varð ég miður mín. Síðan greip mig þessi tilfinning: „Huh - þetta sýnir þá bara að þetta hefur alls ekki verið gott dæmi þegar öllu er á botninn hvolft.“

Dr. Kristín Halla Jónsdóttir er þýðandi bókarinn „Síðasta setning Fermats“ og dósent við Kennaraháskóla Íslands.



Heimsping um stærðfræðimenntun

verður haldið í borginni Monterrey í Mexíkó dagana 6. - 13. júlí 2008.

Frekari upplýsinga er að finna á síðunni: <http://www.icme11.org.mx/icme11/>

Stærðfræði fyrir alla

Margrét Ásgeirsdóttir

„Atvikin rétta að oss reikningsdæmin „óuppsett“, og þá þurfum vér fyrst að skilja hvað um er að vera, skilja þau stærðahlutföll sem um er að ræða, og þar næst að hafa næga leikni til að inna útreikninginn fljótt og rétt af hendi. [...] Börnin verða frá byrjun að skilja út í æsar, hvað þau eru að hafast að, þegar þau telja og reikna. Og allstaðar þar sem reiknikennslan er komin í rétt horf er hún byggð á hlutskoðun.“

(Guðmundur Finnbogason, 1903. 2. útg. 1994:92.)

Í einstaklingsmiðaðri kennslu skipuleggur kennarinn námsumhverfi sem býður nemandanum að fara þá leið sem hentar honum við að nálgast viðfangsefnið á sviði námshæfni, áhuga og námsþarfa. Með því að leggja fyrir nemendur þrautir sem tengjast daglegu lífi þeirra, viðurkenna ólíkar leiðir við lausnir og greina skilning nemenda getur kennari kennt stórum hópi nemenda með mismunandi námshæfni og -þarfir þannig að allir fái nám við hæfi.

Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna (SKSB) er afrakstur áralangra rannsókna við Wisconsin háskólann í Bandaríkjunum. SKSB er byggð á rannsóknum á þróun stærðfræðihugsunar hjá börnum, kennsluaðferðum sem hafa áhrif á þá þróun, þekkingu og viðhorfi kennara sem hefur áhrif á kennsluhætti þeirra og hvernig þekking, viðhorf og framkvæmd verða fyrir áhrifum af skilningi kennara á stærðfræðihugsun nemenda (Carpenter o.fl.1999).

Litið inn í kennslustofu

Dæmi úr raunveruleikanum kveikja oft nýjar hugmyndir hjá kennurum og hjálpa mörgum að átta sig betur á fræðilegum kenningum og niðurstöðum úr rannsóknum. Mörgum reynist vel að máta eigin reynslu við slíkar sögur og læra af þeim. Skólaárið 2005 til 2006 kenndi ég nemendum í þriðja bekk. Í bekknum voru 25 nemendur og fékk ég stuðningsfulltrúa, Kolbrúnu, til aðstoðar í þrjár kennslustundir á viku, þar af tvær samliggjandi kennslustundir á miðvikudagsmorgnum. Þær notaði ég í þrautalausnir. Hér segi ég frá þrautalausnatíma um vorið. Á þeim tíma var unnið með söguramma um risaeðlur.

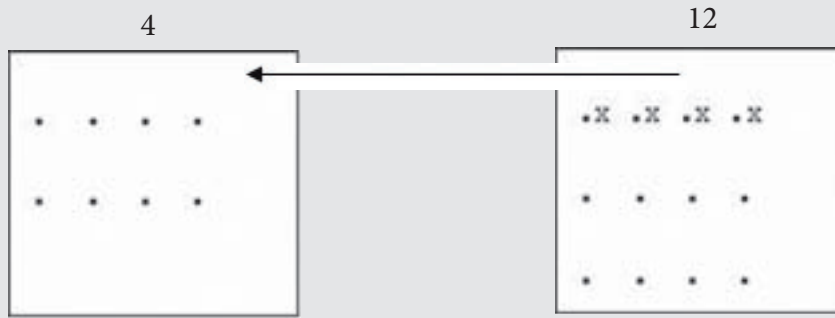
Ég segi börnunum að nú sé þrautalausnatími og ég sé með nokkrar þrautir um risaeðlur. Þau eigi að leysa þrautirnar og útskýra skriflega lausnarleiðina sína. Þegar þau séu búin með hverja þraut eigi þau að rétta upp hönd og bíða eftir að ég eða Kolbrún komi til þeirra. Við Kolbrún dreifum miðum með tveimur fyrstu þrautunum til flestra nemenda, en fjórum til þeirra sem ég veit að verða fljótir að reikna fyrstu þrautirnar. Nemendur líma þær inn í reikningsbækur sínar. Þegar allir eru tilbúnir lesum við saman fyrstu

þrautina, ég upphátt og börnin í hljóði. Fyrsta þrautin hljóðar svo:

**Karítas á 4 risaeðlur og Enzo á 12 risaeðlur.
Þau ætla að leika sér með risaeðlurnar og
ákveða að skipta þeim jafnt á milli sín.
Hvað fær hvort þeirra margar risaeðlur?**

Nokkur barnanna sækja talnagrindur en önnur hefjast handa. Við Kolbrún göngum á milli þeirra og fylgjumst með vinnunni. Fljótlega réttir stúlka upp hönd og ég lít á lausnina hennar. Ég segi henni að hún megi halda áfram og hún gerir það. Um leið hleypur nokkrum nemendum kapp í kinn og þeir rétta upp hönd hver af öðrum. Aðrir þurfa aðstoð til að komast af stað. Í þeim tilvikum þarf að lesa þrautina aftur og umorða. Eftir stutta stund eru allir komnir í gang. Eftir 40 mínútur stöðva ég vinnuna og býð nemendum að setjast á gólfíð hjá töflunni. Ég spyr hvort einhver vilji sýna okkur lausn á fyrstu þrautinni. Margar hendur eru á lofti og nokkur barnanna sýna okkur leiðir sínar:

Lausnaleið A:



A: „Ég teiknaði tvo kassa. Í öðrum eru 4 risaeðlur sem Karítas á og í hinum eru 12 risaeðlur sem Enzo á. Svo færði ég 4 risaeðlur úr kassanum hans Enzos í kassann hennar Karítasar og þau leika sér með 8 risaeðlur hvort.“

Ég spyr börnin hvort þau skilji lausnina. Þeim finnst lausnin skýr og auðskiljanleg.

Lausnarleið B:

1) 8

12, 13, 14, 15, 16

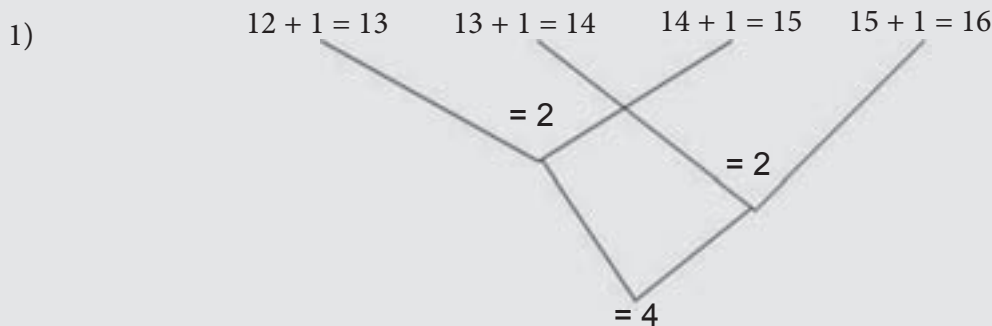
s1 2 3 4

$8 + 8 = 16$

B: „Ég taldi á fingrunum 12 [...], 13, 14, 15, 16 og ég vissi að 8 plús 8 eru jafnt og 16.“

Ég spyr börnin hvað þeim finnst um lausnina. Nokkur börn segjast hafa leyst þrautina á svipaðan hátt. Flestum finnst lausnin skýr og skilja hana.

Lausnarleið C:



Þá er $12 + 4 = 16$ og svarið er 8. (Skipt á talnagrind).

C: „Ég bætti einum við fjórum sinnum og það voru 16 risaeðlur. Svo skipti ég 16 á talnagrind svona [sýnir á stórra talnagrind og tekur fyrst 10 kúlur og síðan 6, færir 8 til hliðar og telur 2 með 6] og Karítas fékk 8 og Enzo fékk 8.“

Börnunum fannst þessi lausn einnig skýr og ekki þarfnast nánari skýringar. Nokkrir segjast hafa skipt eins á talnagrindinni.

Lausnarleið D:

1) $4 + 12 = 16$ $8 + 8 = 16$

Svar: 8

D: „Ég vissi að 4 plús 12 eru 16 og að 8 + 8 er jafnt og 16 og þá vissi ég að svarið er 8.“

Mörg barnanna segjast hafa gert eins. Flest þeirra skilja lausnina.

Lausnarleið E:

$$4 + 12 = 16$$

$$16 \text{ deilt með } 2 = 8$$

E: „Ég vissi að 4 plús 12 eru 16 og svo reiknaði ég í huganum 16 deilt með 2 og ég vissi að 2 sinnum 8 eru jafnt og 16.“

Einn nemandi segist hafa gert þetta svona nema hann hafi skráð dæmi með deilingarmerki.

Þegar ég spyr hvort nemendur sjái eitthvað líkt með lausnunum segja nokkrir að lausn B, C, D og E séu líkar en lausn A sé allt öðruvísi. Í lausn B og C er einum bætt við þar til búið er að bæta öllum 4 við. Í lausn D og E vissu krakkarnir að 4 plús 12 eru 16 og í lausn B og D vissu krakkarnir að 8 plús 8 eru 16 en í C og E skipta krakkarnir 16 í tvo hluta.

Ég rýf umræðurnar með þraut nr. 2 sem þarf einnig að ræða. Þrautin hljóðar svo:

**Alex á 6 risaeðlur en Ísabella á 4 sinnum fleiri risaeðlur en Alex.
Hvað á Ísabella margar risaeðlur?**

Lausnarleið F:

2) Svar 24

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

F: „Ég vissi að 6 plús 6 = 12 og svo taldi ég á talnagrind 6 kúlur og svo 6 kúlur og það voru 24 kúlur [sýnir á talnagrind].“

Nokkrir nemendur segjast hafa gert þetta svona. Aðrir margfölduðu á talnagrind 6 kúlur 4 sinnum.

Lausnarleið G:

2) $4 \times 6 = 24$ risaeðlur

G: „Ég taldi fjórum sinnum upp á 6 og taldi $10 + 10 + 4$ og það var svarið á talnagrind.“ [Sýnir á talnagrind og telur 6 og áfram upp 4 upp í tug og fer á næsta tug og telur 5, 6 og bætir síðan 6 við og 2 upp í tug. Fer næst á þriðja tuginn og telur 3, 4, 5, 6. Hún er komin með tvo tugi og 4 einingar.]

Nokkur barnanna segjast hafa gert alveg eins. Öðrum finnst þetta auðskilið.

Lausnarleið H

2) $6 + 6 = 12$

$$12 + 12 = 24$$

2×6

4×6

24 risaeðlur

H: „Ég vissi að 6 plús 6 eru jafnt og 12 og að það er 2 sinnum 6. Ég vissi líka að $12 + 12 = 24$ og að það er 4×6 af því að 2 sinnum 6 er 12 og tvisvar sinnum og tvisvar sinnum er fjórum sinnum.“

Nokkur barnanna segjast hafa gert alveg eins en önnur svipað á talnagrind. Nokkur börn skilja ekki útskýringuna. Úthald þeirra er á þrotum.

Allir nemendur í bekknum náðu að ljúka fyrstu tveimur þrautum en nokkur barnanna náðu að ljúka fjórum þrautum sem voru sömu tegundar og fyrstu tvær en með hærri tölum.

Greining á stærðfræðilegri hugsun

Lausnarleið A reynist börnunum auðskiljanleg þar sem nemandinn býr til hlutrænt líkan. Hann teiknar tvö mengi og setur fjóra punkta inn í annað og tólf punkta inn í hitt. Hann flytur síðan fjóra punkta yfir í mengið með færri punktum og sér strax að hann er búinn að jafna mengin.

Nemandinn sem sýnir lausnarleið B er á talningarstigi þegar hann telur en notar einnig þá staðreynd, sem hann þekkir, að $8 + 8 = 16$.

Í lausnarleið C notar nemandinn þekktar staðreyndir í samlagningu en grípur til hlutræns líkans við deilingu sem er algengt þar sem deiling krefst flóknari hugsunar en samlagning.

Nemandinn, sem sýnir lausnarleið D, notar þekktar staðreyndir um samlagningu.

Við lausnarleið E notar nemandinn þekktar staðreyndir í samlagningu og margföldun. Hann skilur jafnframt tengsl margföldunar og deilingar.

Nemandinn sem sýnir lausnarleið F í annarri þraut notar endurtekna samlagningu. Hann byrjar á staðreynd sem hann þekkir en fíkrar sig síðan áfram með hlutrænu líkani á talnagrind.

Í lausnarleið G notar nemandinn talnagrind sem hlutrænt líkan við talningu. Hann skilur að fljótlegra er að telja tugi og býr þess vegna til tugi við talninguna.

Við lausnarleið H notar nemandinn þekktar staðreyndir og útskýrir bæði með samlagningu og margföldun. Hann gerir sér vel grein fyrir uppbyggingu margföldunatóflunnar.

Niðurstöður

Börnin fengu verkefni sem höfðaði til áhugasviðs þeirra allra. Þau komu í skólann með leikfangarisaeðlur og léku sér með þær, unnu veggmynd af risaeðlum í réttum hlutföllum, öfluðu upplýsinga um risaeðlur á neti og úr bókum, bjuggu til leikrit og líkón af risaeðlum og saumuðu mjúkar risaeðlur. Þrautirnar voru liður í þemanu og gagntóku nemendur strax. Við gerð þrautanna var miðað við að allir nemendur gætu að minnsta kosti glímt við fyrstu tvær þrautirnar. Dugmeiri nemendur fengu erfiðari þrautir um leið og þeir höfðu útskýrt lausnir sínar. Lausnirnar sýndu þrjú stig lausnarleiða samkvæmt Carpenter og félögum (1999). Á fyrsta stigi búa börn til hlutrænt líkan af þrautinni, á öðru stigi telja þau og á því þriðja nota þau staðreyndir um tölur sem þau þekkja.

Sem umsjónarkennari þessa bekkjar í fjögur ár hef ég séð hvernig skilningur nemenda þróast frá hinu hlutbundna til hins huglæga. Börnin eru nú í fjórða bekk og hafa mörg náð mjög góðum tókum á stærðfræði. Þegar þau nefna hvað sé skemmtilegast í skólanum er stærðfræði ofarlega eða efst á blaði. Þau hafa gaman af ögrandi verkefnum. Nú legg ég fyrir þau tvær þrautir í kennslustund en þegar þau hafa lokið við þær fá þau að búa til þrautir sömu tegundar sem þau eiga síðan sjálf að leysa. Þrautirnar þeirra eru ávallt mun erfiðari en ég hefði lagt fyrir þau.

Margrét er umsjónarkennari við Melaskóla í Reykjavík. Hún er menntaður leikskóla- og grunnskólakennari og stundar nú meistaranám í menntunarfræðum við Kennaraháskóla Íslands.

Þemahefti Dags stærðfræðinnar

Flötur hefur nú þegar gefið út sex þemahefti í tilefni Dags stærðfræðinnar. Þemaheftin eru til sölu og kosta 1.000 kr. stykkið.

Tekið er við pöntunum á: flotur@ismennt.is

Mynstur og algebra 2005

Stærðfræði í lífi og starfi 2004

Tími og rúm 2003

Stærðfræði og barnabókmenntir 2002

Heimaverkefni í stærðfræði 2001

Rúmfræði, verkefni og hugmyndir 2000

Heimildir:

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth NH: Heinemann.

Guðmundur Finnbogason. 1994. *Lýðmenntun. Hugleiðingar og tillögur*. (2. útg.) Reykjavík: Rannsóknarstofnun KHÍ.

Dyscalculia

Eiríkur Ellertsson

Stærðfræðihömlun

Orðið *dyscalculia* eða *dyskalkúla* eins og það er oft skrifað á íslensku merkir erfiðleikar með tölur. Orðhlutinn *dys* þýðir erfiðleikar og *calculia* er reikningur. Líkt og lesblindar er hugtakið talnablanda oft notað en stærðfræðihömlun tengist sjaldnast sjón og sá sem er með *dyscalculiu* er ekki blindur á tölur. Í þessari grein eru hugtökin *dyscalculia* og stærðfræðihömlun notuð jöfnum höndum og verður fókusinn að mestu leyti stilltur á framhaldsskólanemendur sem stríða við erfiðleika í stærðfræði.

Stærðfræðiörðugleikar í framhaldsskóla

Greinarhöfundur hefur síðast liðin þrjú ár starfað sem *dyslexiuráðgjafi* og sérkennari við Borgarholtsskóla í Reykjavík en áður við sérkennslu í grunnskólum í Reykjavík og á landsbyggðinni. Borgarholtsskóli býður upp á fjölbreytt nám; almennt nám fyrir þá sem hafa ekki náð lágmarkseinkunn á samræmdu grunnskólaprófi, bóklegt nám til stúdentsprófs, starfsnám, iðnnám og námsbraut fyrir fatlaða.

Í Borgarholtsskóla sem og öðrum sambærilegum framhaldsskólum er hópur nemenda sem á í miklum vanda með stærðfræðina. Skólarnir veita þessum nemendum ýmiss konar stuðning, eftir því sem aðstæður leyfa, s.s. hægferð og sérstaka stuðningstíma. Ef nemendur stríða við mikla örðugleika í stærðfræði dugar slíkur stuðningur ekki. Þeir falla og reyna hvað eftir annað við sama áfangann. Afleiðingin verður sú að sumir hætta námi, einhverjir kaupa sér dýra einkakennslu og einstaka nemandi sækir um undanþágu frá stærðfræðinni. Dæmi eru um að nemendum hafi verið veitt undanþága frá stærðfræði að undangenginni greiningu ásamt úttekt á námslegri stöðu þeirra í öðrum námsgreinum. Hérlandis hafa ekki verið gerðar rannsóknir á stærðfræðiörðugleikum framhaldsskólanemenda en allt bendir þess að þeir séu algengari meðal nemenda

á starfsmenntunarbrotum. Flestir þessara nemenda eiga að baki langa sögu um erfiðleika í stærðfræði og þrátt fyrir sérkennslu og annan stuðning í leik- og grunnskóla eru námserfiðleikar í stærðfræði enn til staðar er þeir hefja í nám í framhaldsskóla.

Dyscalculia er eins og aðrar gerðir námserfiðleika einstaklingsbundin, hún getur verið lítil eða mikil og birtingarform hennar er mismunandi. Stærðfræðihömlun sem til er komin vegna veikleika í starfsemi miðtaugakerfisins fylgir einstaklingnum alla ævi. Þessi hömlun getur verið einskorðuð við stærðfræði þ.e. að erfiðleikar í stærðfræði skerða ekki hæfni til að ná árangri í öðrum námsgreinum. Hvernig framhaldsskólinn mætir þessum nemendum og hvaða stuðning þeir fá er afar mismunandi en mikilvægt er að stuðningurinn taki mið af stöðu hvers og eins. Staða nemanda sem býr við námserfiðleika í fleiri en einni námsgrein er önnur en þegar eingöngu er um *dyscalculiu* að ræða.

Sérfræðingar í stærðfræðiörðugleikum hafa bent á að hægt sé að finna þessa einstaklinga á meðan þeir eru í leikskóla og með markvissum aðgerðum mætti fyrirbyggja óæskilegar afleiðingar *dyscalculiu* s.s. neikvæða afstöðu til stærðfræðinnar og námslega og/eða tilfinningalega vanmáttarkennd. Brottfall í framhaldsskólunum er mikið áhyggjuefni og örugglega hætta einhverjir vegna örðugleika sinna í stærðfræði. Margir þessara nemenda eiga í miklum erfiðleikum með stærðfræði framhaldsskólans og þeir sjá ekki tilgang í að læra stærðfræði sem hefur takmarkaða skírskotun til verkefna sem þeir og reyndar við flest sinnum í daglegu lífi. Þeir sjá heldur ekki hvar eða hvernig ýmsir efnisþættir stærðfræðinnar sem þeir þurfa að læra nýtist í framtíðarstarfi. Nemendur með erfiðleika í stærðfræði þurfa að eiga kosta á stærðfræðinámi sem tekur mið af erfiðleikum þeirra og eflir þá í stærðfræði sem þeir munu nota í daglegu lífi. Rannsóknir sýna að stærðfræðiverkefni sem

tengjast augljóslega daglegu lífi okkar og hafa hagnýtt gildi vekja meiri áhuga og gleði en þau sem eru bara blanda af bók- og tölustöfum á blaði. Með aukinni þekkingu á stærðfræðihömlun skapast forsendur til að þróa leiðir sem gagnast þessum nemendum í námi.

Samkvæmt lögum á framhaldsskólinn að vera fyrir alla en svo virðist sem höfundar námskrár í stærðfræði hafi ekki áttað sig á að nemendur með ýmsar námsraskanir stunda nám í framhaldsskólum landsins. Í Aðalnámskrá framhaldsskóla er hvergi fjallað um stærðfræðinám þeirra sem stríða við erfiðleika í stærðfræði og engir framhaldsskólar bjóða upp á stærðfræðiáfangu sem sérstaklega koma til móts við nemendur með stærðfræðihömlun. Allt annað er uppi á teningnum hvað varðar dyslexíu en í Aðalnámskránni er sérstaklega fjallað um leshömlun:

„Í framhaldsskólum skal einiskis látið ófreistað til að koma til móts við nemendur sem eiga við lestrarörðugleika að stríða af einhverju tagi. Greina þarf í hverju vandi einstakra nemenda liggur og mæta síðan þörfum hvers og eins. Þessu má mæta með skipulagi kennslunnar, sérstökum verkefnum, verkefnaskilum og próftöku við hæfi. Nauðsynlegt er að bjóða sumum nemendum upp á sérstakan stuðning þar sem lögð er áhersla á að bæta lestur og stafsetningu með sérstökum námskeiðum.“

Þessi umfjöllun í Aðalnámskránni viðurkennir dyslexíu sem sérstakan námsörðugleika og að starfsfólk skólanna eigi að veita nemendum með leshömlun námslegan og persónulegan stuðning. Sams konar viðhorf ætti að koma fram í Aðalnámskrá framhaldsskóla varðandi stærðfræðihömlun. Mjög brýnt er að finna lausn á vanda nemenda sem geta náð eðlilegum árangri í öllum námsgreinum en geta ekki, þrátt fyrir margar tilraunir, uppfyllt kröfur sem gerðar eru í stærðfræðinni. Virðing fyrir stærðfræði minnkar ekki þó við breytum áherslum hjá þeim sem geta ekki farið hina hefðbundnu leið í námsgreininni.

Mismunandi hæfni til að vinna með tölur hefur sennilega alla tíð fylgt manningum en hin síðari ár hefur áhugi kennara og fræðimanna fyrir þessari tegund námserfiðleika farið vaxandi. Samanburður við dyslexíu er þó óhagstæður því ekkert í húanískum fræðum hefur verið rannsakað jafn mikið og dyslexía. Rannsóknir á dyslexíu hafa gefið af sér mikla fræðilega og hagnýta þekkingu sem ýmsar fagstéttir nýta sér í vinnu með nemendum með lestrarörðugleika. Sérfræðingar í námsörðugleikum telja að staða nemenda með dyscalculíu sé eins í dag og hún var gagnvart dyslexískum nemendum fyrir fjórum til fimm áratugum síðan. Þá var algengt að

tengja örðugleika í lestri við heimsku eða leti og því miður heyrst orðanotkun á líkum nótum í dag í garð nemenda með stærðfræðihömlun. „Hvaða erindi átt þú á bóknámsbraut ef þú skilur ekki þetta einfalda dæmi.“ „Þú getur þetta ef þú bara reynir betur.“ „Mér finnst hann bara ekkert vera að leggja sig fram.“ Ekki þarf að fara mörgum orðum um sálrænar- og félagslegar afleiðingar viðhorfa af þessu tagi. Leiða má líkur að því að nemendur með dyscalculíu horfi ekki björtum augum til framtíðar því að í framhaldsskólum eru fá sérúrræði í boði og stíf krafa gerð um að nemendur ljúki öllum stærðfræðiáföngum viðkomandi námsbrautar. Á félagsfræðabraut og málabraut eru og verða alltaf til einstaklingar sem sýna eðlilegan árangur í öllum námsgreinum nema stærðfræði og vegna stærðfræðiörðugleikanna kemur fyrir að slíkir nemendur hætti námi eða skipti yfir á braut sem gerir minni námskröfur í stærðfræði. Hluti nemenda sem stundar nám á styttri starfsbrautum t.d. aðstoðarfólk í grunnskólum og félagsliðabraut eða eru í iðnnámi finnst vera lögð of mikil áhersla á stærðfræði sem lítið sem ekkert tengist starfsmenntun þeirra. Það væri áhugavert ef gerð yrði úttekt á því hvað fólk sem hefur menntað sig í félagsvísindum t.d. sálfræðingar eða félagsráðgjafar noti mikið af framhaldsskólastærðfræði við vinnu sína? Nám í stærðfræði sem og öðrum námsgreinum hefur ekki staðið í stað en spurningunni um hvað sé nauðsynlegt og mikilvægt að læra hefur ekki verið gefinn nógur gaumur.

Tíðni og orsakir

Fyrir rúmu ári síðan stóð Lestrarsetur Rannveigar Lund fyrir námstefnu um stærðfræðihömlun og var Bretinn John Rack aðalfyrirlesari námstefnunnar. Hann sagði m.a. frá nýlegri rannsókn á þekkingu og færni fullorðinna Breta í ensku og stærðfræði. Fyrir þátttakendur rannsóknarinnar voru lögð hefðbundin samræmd lokapróf fyrir grunnskóla. Niðurstöður rannsóknarinnar voru að 16% fullorðinna Breta náðu ekki lágmarkseinkunn í ensku og hvað stærðfræðina varðar var niðurstaðan enn athyglisverðari því 47% náðu ekki prófinu. Tæplega helmingur þeirra sem féllu höfðu ekki náð samræmda prófinu í stærðfræði á sínum tíma svo það hefur fjölgað í „fallhópnum“ . Kunnáttan var slökust í þeim efnisþáttum sem kenndir eru í efstu bekkjunum. Hvaða ályktanir má draga af þessum niðurstöðum? Hvers vegna hefur fólk gleymt stærðfræði sem það einu sinni kunnir? Notar fólk lítið þá stærðfræði sem það lærði í efstu bekkjum grunnskóla. Hér er ekki svigrúm til að svara þessum spurningum en niðurstöðurnar hljóta að hvetja okkur til að velta fyrir okkur tilgangi og markmiðum náms

í stærðfræði og líklega er einnig þörf á að skoða námsmarkmið annarra námsgreina.

Flestar rannsóknir eru samdóma um að 6-7% manna séu með meðfædda arfbundna stærðfræðihömlun. Til viðbótar stríði önnur 6-7% við mismikla stærðfræðierfiðleika sem geta stafað af hinum mismunandi orsökum. Um helmingur þeirra sem eru með dyscalculiu er einnig með dyslexíu. Fræðimenn telja að veikleiki í langtímaminni, heyrnrænu skammtímaminni, málþroska og sjónrænni rökhugsun séu oft til staðar hjá einstaklingum með stærðfræðiörðugleika.

Skilgreiningar

Ekki er einhugur um skilgreiningar fræðimanna á stærðfræðiörðugleikum og því gætir töluverðs ósamræmis í hugtakanotkun um þá. Sumar skilgreiningar eru hluti af alþjóðlegum flokkunarkerfum (ICD-10 og DSM-IV) um námsörðugleika en aðrar tengjast einstaka fræðimönnum eða samtökum. Hjá fræðimönnum á Norðurlöndum er dyscalculia sameiginlegt heiti yfir allar tegundir örðugleika við að nema stærðfræði. Flestir fræðimenn ganga út frá því að orsakir stærðfræðihömlunarinnar megi rekja til veikleika í miðtaugakerfinu. Það er þó ekki algilt því stundum má beinlínis rekja örðugleikana til lélegrar kennslu eða tilfinningalegra örðugleika s.s. kvíða og ótta við að mistakast.

ICD-10

ICD-10 (alþjóðlegt flokkunarkerfi) skilgreiningin gengur út frá því að stærðfræðihömlunina megi ekki rekja til almenns seinþroska eða ófullnægjandi kennslu. Færni barnsins í stærðfræði þarf að vera marktækt lægri en búast má við miðað við aldur og greind. Sá sem er greindur með aðrar raskanir s.s. dyslexíu til viðbótar getur ekki fallið undir ICD-10 skilgreininguna þ.e. ef einhver er greindur með dyscalculiu en stríðir einnig við dyslexíu fær hann ekki greiningu um að hann sé með dyscalculiu. Samkvæmt ICD-10 staðlinum er talið að best sé að meta færni og kunnáttu í stærðfræði með stöðluðu einstaklingsprófi. Helst koma örðugleikarnir fram í lítilli getu til að ná færni í reikningsaðgerðunum fjórum. Margir kennarar og fræðimenn eru ósáttir við ICD-10 skilgreininguna því þeir sjá ekki tilganginn með því að afmarka hópinn á þennan hátt. Það sé ekki lítill hópur einstaklinga sem telst vera með stærðfræðihömlun heldur séu það allir einstaklingar sem eiga í erfiðleikum með að tileinka sér færni í stærðfræði.

Skilgreining DSM-IV

Samkvæmt greiningarviðmiðum DSM-IV sem er eins og ICD-10 alþjóðlegt flokkunarkerfi þarf færni einstaklings í stærðfræði sem hefur verið mæld með stöðluðu einstaklingsprófi að vera mun lægri en búast mætti við miðað við aldur, mældrar greindar og/eða kennslu. Greiningarviðmið DSM-IV gera ráð fyrir að stærðfræðihömlunin hafi bæði veruleg áhrif á nám í stærðfræði og færni við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni daglegs lífs. Þessi greiningarviðmið gera ráð fyrir að þeir sem eru með dyscalculiu geti líka verið með leshömlun eða aðra örðugleika í námi.

Hvernig birtast stærðfræðierfiðleikar?

Bæði fræðimenn og skólafólk hafa lýst í ræðu og riti hvernig örðugleikarnir birtast. Hér verður farið yfir það helsta:

- **Hugtakanotkun í stærðfræði:** Margir einstaklingar eiga í erfiðleikum með að læra og nota tungumál stærðfræðinnar en til að ná tókum á stærðfræðinni þarf einstaklingurinn að hafa á valdi sínu fjöldann allan af stærðfræðilegum hugtökum. Hér má nefna erfiðleika við að skilja hugtök sem tengjast þyngd, áttun, tíma og rúmi. Örðugleikar með að skilja stærðfræðitákn reikningsaðgerðanna fjögurra t.d. mismundi orð yfir +, hvað mínus er, stærra en, meira en/fleiri en, deila í eða deila með o.s.frv. Einnig er þekkt að stærðfræðihamlaðir einstaklingar lesa oft orðadæmi ónákvæmt og leysa því dæmið með rangri aðferð. Rannsóknir á Norðurlöndunum hafa sýnt fram á að sterk tengsl eru á milli málþroskafrávika og stærðfræðiörðugleika. Til að forðast örðugleika í stærðfræði þurfa kennarar að leggja mikla áherslu á nám í tungumáli stærðfræðinnar.

- **Skammtíma vinnsluminni og langtímaminni:** Það segir sig sjálft að einstaklingur sem er með annan hvorn þessara minnisþátta eða báða á erfitt með stærðfræði. Einkennin verða t.d. sýnileg í hugareikningi og við að læra margföldunartöflur. Einstaklingurinn getur einnig átt erfitt með að fylgja ferli í þrautalausnum, velja reikningsaðferð, fylgja aðgerðaröð í reikningsaðgerðunum fjórum og hefur stöðuga þörf fyrir að nota einhvers konar hlutbundið efni til að finna lausn dæmisins. Minnisörðugleikar finnast ekki bara í grunnskóla heldur verða þeir áfram til staðar í framhaldsskóla. Bent hefur verið á að þeir sem bæði eru með örðugleika í lestri og stærðfræði búi oft við undirliggjandi minnisörðugleika.

- **Áttun:** Einstaklingurinn speglar tölustafi og veit ekki alltaf hvar á að byrja í reikningsaðgerðunum. Í

samlagningu á að vinna frá hægri til vinstri en aftur á móti eru tölur lesnar frá vinstri til hægri.

• **Erfiðleikar með tölur og runur:** Sumir einstaklingar eiga erfitt með að telja einn af einum, telja mynstur eins og 2-4-6... og telja aftur á bak.

• **Kvíði, óöryggi og skert sjálfsmynd:** Kvíði leiðir oft af sér mistök og fleiri mistök við haldakvíðanum. Hringrás kvíða og mistaka myndast og einstaklingurinn verður fráhræfður stærðfræðinni.

• **Lítill virkni:** Nemendur sýna stærðfræði lítinn áhuga, verða óákveðnir og andlega kraftlausir og hugurinn upptekinn af dagdraumum.

• **Slæmar vinnuaðferðir.** Nemendur fá ekki leiðsögn um æskilegar aðferðir í reikningi t.d. festast í að telja aftur á bak í frádrætti í stað þess að telja talnabilin á milli talnanna, verða háðir hlutbundnum námsgögnum og ekki unnið markvisst að því að þjálfá án hlutbundinna gagna (óhlutbundið).

• **Eðlilegt að stígangi í yfirferð námsefnisins taki mið af raunverulegri kunnáttu.** Nemendur með dyscalculiu verða að fá að fara yfir námsefnið á sínum hraða þ.e. fá nægan tíma fyrir hvern efnisþátt og til að rifja upp. Margir heltast úr lestinni vegna þess að ekki er passað upp á að nemendur fái nægan tíma til að ná tókum á sérhverjum efnisþætti stærðfræðinnar.

Nemendur sem komnir eru í öngstræti með stærðfræðina eru hvattir til að leita sér aðstoðar hjá námsráðgjöfum eða öðrum ráðgjöfum framhaldsskólanna.

Greinarhöfundur leggur fyrir suma þeirra könnun (óformleg greining) sem á að gefa vísbendingu um kunnáttu og vinnubrögð í greininni. Í ljós hefur komið að örðugleikarnir eru oft miklir og kunnáttan þar af leiðandi það lítill að erfitt er að sjá fyrir sér að þessir nemendur muni nokkurn tíma ljúka einhverjum af stærðfræðiáföngum framhaldsskólanna.

Hvernig á nemandi sem

> þarf að telja á fingrum í dæmum eins og 5+4 eða 6+8

> telur aftur á bak í einföldum frádráttardæmum

> veit ekki hvenær og hvernig á að taka til láns í frádráttardæmum

> kann lítið sem ekkert í margföldun

> hefur ekki kunnáttu til að reikna einföld deilingardæmi

> er illa að sér í algengum stærðfræðilegum hugtökum

> býr við takmarkaða þekkingu á byrjunaratriðum í almennum brotum, prósentureikningi, flatarmáli o.fl. efnisþáttum stærðfræðinnar

að geta tekist á við stærðfræði 102?

Stærðfræði 102 er skylduáfangi fyrir nemendur á iðnbrautum, starfsbrautum og fyrir þá nemendur á mála- og félagsfræðabraut sem ekki hafa forsendur til að vera í stærðfræði 103. Ef borin er saman kunnáttu nemenda sem eru með stærðfræðihömlun og áfangalýsingu fyrir STÆ102 verður ljóst að bilið sem er á milli raunverulegrar þekkingar og markmiða áfangans verður aldrei brúað. Það sorglega er að þessi nemendur fá ekki tækifæri til að þjálfá sig í stærðfræði sem nýtist þeim úti í lífinu. Áfangalýsingu fyrir STÆ102 má finna í lok þessarar greinar.

Hvað er til ráða?

• Auka þarf fræðslu um stærðfræðiörðugleika. Meiri þekking mun stuðla að meiri skilningi og leggja grunn að jákvæðum viðhorfum til þeirra sem stríða við námshömlun í stærðfræði.

• Einingabærir áfangar fyrir nemendur með stærðfræðihömlun eiga að standa þeim til boða. Það er tímabært að samin verði og samþykkt af Menntamálaráðuneytinu áfangalýsing fyrir þessa nemendur.

• Námsmat þarf að vera sveigjanlegt. Það hentar sumum stærðfræðihömluðum nemendum að fá að taka munnlegt próf meðan aðrir geta verið í þörf fyrir meiri stuðning í prófinu en almennt tíðkast í dag. Æskilegt er að kvíðnir og óöruggir nemendur fái að taka stærðfræðipróf í séraðstæðum t.d. einir með kennara. Nemendur með stærðfræðihömlun eiga að fá lengra próftíma óski þeir eftir því.

• Kennarar og aðrir sem tengjast þessum nemendum verða að hafa í huga að miðað við aðrar námsgreinar getur stærðfræði verið uppspretta kvíða og vonbrigða. Flesta nemendur langar til að læra að reikna en örðugleikarnir leiða til þess að þeir verða fyrir sífelldum vonbrigðum með árangurinn.

Í kennsluáðstæðum þarf að hafa eftirfarandi í huga:

• Stærðfræðihamlaðir nemendur eru í þörf fyrir annars konar kennslu en nemendur sem ekki búa við slíka hömlun. Þeir þurfa að fá nákvæmar útskýringar og oft einstaklingsbundnar. Ef nemandinn skilur

ekki hvernig á að vinna verkefni getur kennarinn sýnt nemandanum hvernig má leysa það, hann talar upphátt um leið og hann vinnur verkefnið (modellerer). Einnig hafa umræður um leiðir til að leysa verkefni mikla þýðingu.

- Nemendur sem hvorki fá nógan tíma til að læra nýjan efnispátt né reglulega upprifjun eru fljótir að gleyma efninu og missa þar af leiðandi áhugann fyrir stærðfræðinni.

- Þegar nemandi og kennari eru vissir um að ákveðin þekking er til staðar hjá nemandanum má byrja á nýjum efnisþætti en nauðsynlegt er að rífa upp „eldra“ námsefni.

- Rannsóknir sýna að markviss og regluleg upprifjun er mjög mikilvæg og því verður að gera ráð fyrir tíma til að rífa upp. Ástæðan fyrir gleymsku á aðferðum má rekja til þess að nemandinn er ekki búinn að læra þær nógu vel.

- Nemendur þurfa að læra að setja upp dæmi skipulega og á skýran hátt. Reikningsdæmi þurfa að vera sett þannig upp að gott bil sé á milli dæmanna og gott pláss fyrir „útreikninga“.

- Það hjálpar að nemendur lesi dæmi upphátt eða þau séu lesin upp fyrir þá því algengt er að þeir misskilji verkefnið eða viti ekki hvernig eigi að leysa verkefnið.

- Nemendur þurfa að sjá tilgang með stærðfræðináminu og því er nauðsynlegt að verkefni tengist raunverulegum aðstæðum. Dæmi sem eru sprottin upp úr raunverulegum aðstæðum vekja oftast meiri áhuga og þykir auðveldara að leysa þau.

- Vasareiknir er nauðsynlegur og hjálpar nemendum sem eiga erfitt með að setja dæmi upp á skipulagðan hátt. Notkun vasareiknis verður að fara hönd í hönd við skilninginn. Nemendur þurfa að fá mikla þjálfun í að velja reikningsaðgerð eftir orðadæmum eða munnlegum fyrirmælum. Erfitt er að muna aðferð ef maður skilur ekki út á hvað hún gengur.

- Margföldunartöflur með svörum eiga að vera sjálfsagðar en nemendur þurfa að skilja hvað aðgerðin felur í sér.

- Að hvetja og hrósa er ekki síður mikilvægt í stærðfræði en öðrum námsgreinum.

- Skrá skammtíma sem og langtíma markmið stærðfræðinámsins. Vinna að markmiðum þarf að vera markviss og nemandinn þarf að fá skýrar

upplýsingar um framfarir.

- Greining á stærðfræðihömlun á að vera jafn eðlileg og dyslexíugreining og einnig þarf að auka gæði greininganna. Framhaldsskólar þurfa að setja sér reglur um greiningarviðmið. Sérkennarar og stærðfræðikennarar sem hafa sérhæft sig í stærðfræðiörðugleikum eru vel til þess fallnir að greina vanda nemenda í stærðfræði.

- Ræða þarf stöðu og í sumum tilvikum að endurskoða markmið stærðfræðináms ýmissa námsbrauta framhaldsskólans. Stærðfræði er t.d. ekki kennd á mála- og félagsfræðanámsbrautum á Spáni. Getur kunnátta í stærðfræði komið í veg fyrir að fólk ljúki háskólaprófi? Hvaða stærðfræði nota kokkar og bifvélaþvirkjar í tengslum við starf sitt? Umræður og mat á stöðu stærðfræðináms í framhaldsskólum hefur mikla þýðingu fyrir stærðfræðihamlaða nemendur.

Hér að framan var vitnað í þann kafla Aðalnámskrár framhaldsskóla sem fjallar um lestrarerfiðleika. Æskilegt væri að eitthvað líkt því væri skráð í Aðalnámskrá framhaldsskóla sem nú er í endurskoðun. Til samræmis við textann um dyslexíu gæti grein um dyscalculiu hljóðað eftirfarandi:

Í framhaldsskólum skal einskis látið ófreistað til að koma til móts við nemendur sem eiga við stærðfræðiörðugleika að stríða af einhverju tagi. Greina þarf í hverju vandi einstakra nemenda liggur og mæta síðan þörfum hvers og eins. Þessu má mæta með skipulagi kennslunnar, sérstökum verkefnum, verkefnaskilum og próftöku við hæfi. Nauðsynlegt er að bjóða nemendum sem hafa verið greindir með dyscalculiu upp á sérstaka áfanga þar sem lögð er áhersla á að bæta færni í grunnatriðum stærðfræðinnar og þeirri stærðfræði sem við flest notum í daglegu lífi. Slíkir áfangar eru einingabærir og metnir til jafns við hefðbundna áfanga. Markmiðið með stofnun sérstakra áfanga fyrir nemendur með stærðfræðihömlun er að allir nemendur útskrifist úr framhaldsskóla með færni og kunnáttu í stærðfræði sem geri þeim kleyft að leysa stærðfræðileg verkefni sem fólk mætir í sínu daglega lífi. Nám í undirstöðuatriðum tölfræði á að vera í boði fyrir stærðfræðihamlaða námsmenn sem hyggja á háskólanám.

Þegar sá tími kemur að viðhorf af þessu tagi verða staðfest í Aðalnámskrá framhaldsskóla getum við ályktað að stærðfræðihömlun sé viðurkennd sem sérstakur námsörðugleiki og þar með skapast betri forsendur til að þróa námsleiðir sem styrkja faglega þá nemendur sem búa við slíka erfiðleika.

Áfangalýsing STÆ 102

- Áfangaheiti Stærðfræði
- Nánara áfangaheiti Jöfnur og hlutföll

Markmið

Að nemendur

- hafi tileinkað sér undirstöðuatriði um talnameðferð
- kunnir undirstöðuatriði algebru
- geti sett upp og leyst verkefni sem fela í sér jöfnur og formúlur
- geti beitt fjölbreyttum vinnubrögðum við lausn stærðfræðilegra verkefna
- náit tökum á hlutfallshugtakinu
- þekki undirstöðuhugtök hnitarúmfræði í sléttum fleti

Námslýsing, efnisatriði og kennsluhættir

Lagður er grunnur að vinnubrögðum í stærðfræði, nákvæmni í framsetningu, röksemdafærslum og lausnum verkefna og þrauta. Meginviðfangsefni eru upprifjun á talnameðferð og jöfnur. Enn fremur er

fjallað um hnitakerfið og jöfnu beinnar línu. Áhersla er lögð á hlutfallshugtakið frá mörgum hliðum. Náttúrulegar heilar og ræðar tölur og aðgerðir á þeim. Undirstöðuatriði algebru. Lausnir jafna, óuppsettar jöfnur. Lausnir verkefna og þrauta. Reikniformúlur. Talnahlutföll, prósentur og vextir. Rétthyrnt hnitakerfi í sléttum fleti, jafna beinnar línu.

Kennsla verður með hefðbundnum hætti: kennari leggur námsefni inn og reiknar á töflu þau dæmi sem dæmigerð geta talist. Áhersla verður lögð á að gefa nemendum tækifæri til að reikna í tímum þannig að færi gefist á spurningum.

Námsmat er byggt á vinnu nemenda yfir önnina, bæði heimaverkefnum og hlutaprófum. Lagt er mat á vinnusemi, ástundun og frágang skilaverkefna. Tekið verður tillit til þess hvort nemendur hafi tileinkað sér ásætlanleg og fagleg vinnubrögð.

Höfundur er sérkennari/dyslexíuráðgjafi við Borgarholtsskóla.

F á n a v e r k e f n i

Guðrún S. Guðmundsdóttir

Þetta fánaverkefni var lagt fram sem kennsluverkefni í stærðfræðiáfangi við Kennaraháskólann fyrir mörgum árum þegar ég stundaði þar nám á orlofsári. Alla tíð síðan hefur þetta verkefni verið eitt af mínum uppáhaldsverkefnum. Kennaranemarnir áttu að finna fræðigrein í stærðfræðitímariti og búa til kennsluverkefni. Eftir langa leit í mörgum tímaritum fann ég áhugaverða grein í danska fagtímaritinu Matematik. Ég heillaðist strax af þessu verkefni. Þarna var farið yfir hlutföll og útlit margra alþjóðlegra fána. Danska fánanum var gerð sérstök skil, saga hans rakin í máli og myndum. Sagt frá hvernig hlutföll hans hafa breyst í aldanna rás. Ég fékk strax áhuga á að gera sambærilega athugun á íslenska fánanum Í vetur gafst mér tækifæri til að draga þetta verkefni fram þegar nemendur mínir voru að læra um hlutföll í Geisla. 3 (bls. 74-75) Í þessum kafla í kennslubókinni eru kynntir nokkrir fánar sem allir hafa það sameiginlegt að vera skipt í þrennt langsum eða þversum í ýmsum litum og hlutföllum.



Þetta verkefni er ágæt viðbót sem frekari þjálfun í hlutfallareikningi og útliti mismunandi fána.

Nota má verkefnið fyrir yngri nemendur, láta þá teikna fánann í reikningsbókina sína, stækka eða minnka hann og reikna út flatarmál og jafnvel flatarmál fánalitanna.

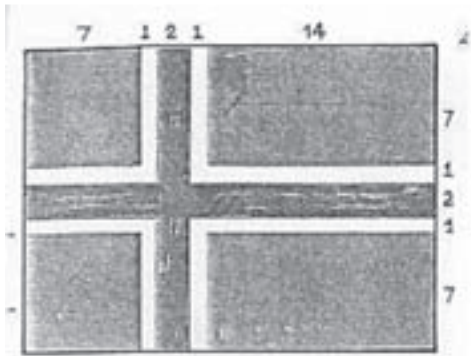
Þá má einnig nýta verkefnið í landafræðikennslu og búa til fána allra Norðurlandanna, klippa þá út í mislitan pappír. Þá má benda nemendum á að áður en fánaverkefninu er lokið má sjá hvítbláa fánann.

Íslenski fáninn

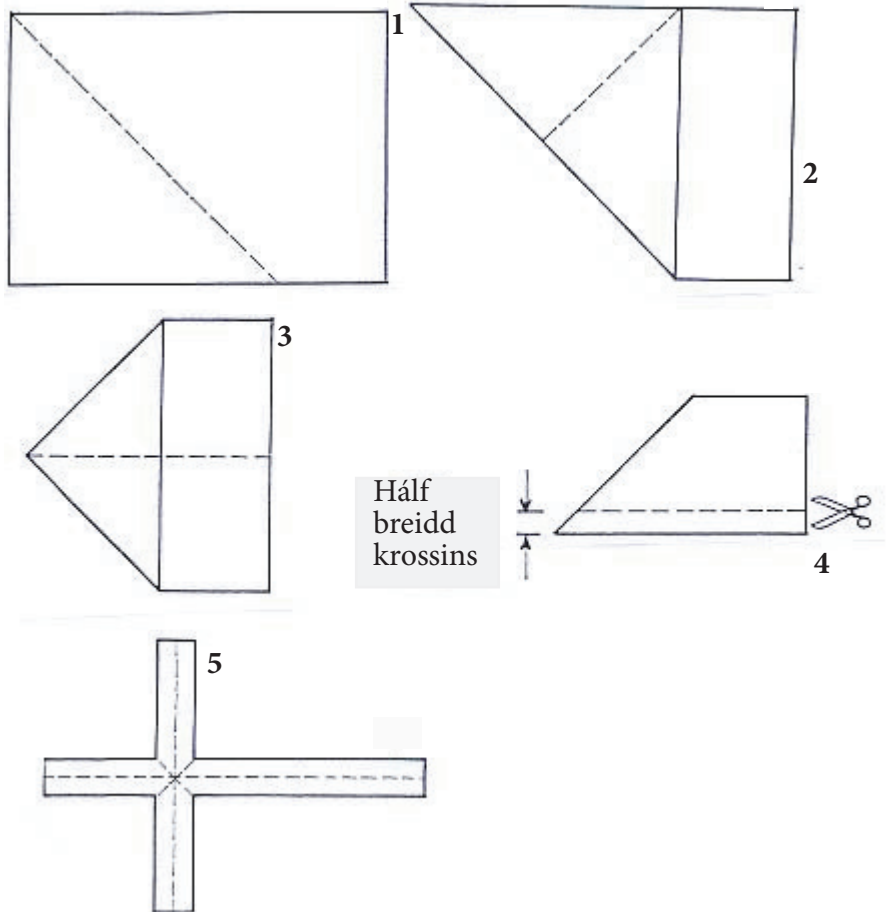
Efni: Rúðustrikaður pappír, blár, hvítur og rauður pappír, skæri og lím.

Hlutföll 25x18 rúður (eða cm)

1. Teljið út 25 rúður á breiddina og 18 rúður á hæð og klippið út. Klippið síðan út bláan, rauðan og hvítan pappír í sömu stærð.



2. Brjótið hvíta pappírinn eins og skýringarmyndin sýnir, mælið 2 rúður frá miðju brotsins og klippið. Rauði liturinn brotinn á sama hátt, mælið 1 rúðu og klippið.



3. Nú er allt límt saman, hvíti krossinn ofan á bláa flötinn. Nú má sjá hvítbláa fánann. Að lokum er rauði krossinn límdur í miðju fánans.



Stoltir nemendur með fánana sína.

Höfundur er kennari við Lækjarskóla í Hafnarfirði

Peran í Digranesskóla

Pórður St. Guðmundsson

Það var haustið 2003 þegar Digranesskóli var að hefja sitt 40. starfsár að skólastjórinn Helgi Halldórsson bað mig að finna upp á einhverju skemmtilegu til tilbreytingar á afmælisárinu. Ég hafði þá í tvö ár skoðað reglulega á netinu síðu sem heitir “Ukens Nött” sem er undirsíða á heimasíðu KappAbel (kappabel.com). Á þessari síðu birtist vikulega reikningsdæmi eða þraut sem einkum er ætluð efri bekkjum grunnskóla en hver sem er hefur þó rétt til þátttöku. Þetta eru mjög fjölbreytt og skemmtileg verkefni og þátttakendur senda lausnirnar beint af síðunni. Ég stakk því upp á því við Helga að við létum útbúa fyrir okkur forrit sem virkaði á sama hátt og Ukens Nött. Þetta varð svo að veruleika þegar ungur forritari Arnþór Sigurðsson féllst á að gera þetta fyrir lítinn pening. Norðmenn kalla svona þrautir „hnetur” (nött) en ég kaus að kalla okkar dæmi perur með vísan í orðtakið „að kveikja á perunni”. Fyrsta Peran birtist á heimasíðu Digranesskóla föstudaginn 27. febrúar 2004 og í Morgunblaðinu sunnudaginn þar á eftir, en Mogginn hefur verið í samstarfi við okkur allan tímann. Margir aðilar hafa gefið verðlaun, en Heimilistæki hafa frá byrjun gefið fyrstu verðlaun

í viku hverri vandaða Casio reiknivél. Þátttaka í Perunni var mest fyrsta veturinn, en þá bárust á þriðja hundrað lausna í hverri viku. Síðan hefur heldur dregið úr þátttöku en nú taka um það bil 100 – 150 krakkar þátt í viku hverri. Það vekur athygli að hlutfallslega mest þátttaka er af landsbyggðinni. Alltaf eru meðal þátttakenda nokkrir einstaklingar utan skólakerfisins.

Til dæmis eru tveir fastagestir fæddir 1926. Við höfum kosið að kalla þessi dæmi Stærðfræðigátur og þrautir.

Margar þeirra sem ég sjálfur, nokkrar koma af norsku síðunni aðrar úr ýmsum áttum meðal annars frá Flensborgarskólanum. Við beinum þeim eindregnu tilmælum til stærðfræðikennara um land allt að láta nemendur sína glíma við skemmtilegar þrautir og gefa þeim tækifæri til að senda lausnir í skólanum. Ég hef til dæmis tekið um það bil 10 – 15 mín. af einum tíma á viku og leyft nemendum að senda svar einu í einu meðan tíminn gengur. „Biðröð við tölvuna er bönnuð”. Mér til aðstoðar við tölvutæknilega úrvinnslu er Einar Long Siguroddsson fyrrum aðstoðarskólastjóri við Digranesskóla.



Höfundur er kennari við Digranesskóla í Kópavogi

Ljósaperupraut

Spurning: Hve marga stærðfræðinga þarf til að skipta um ljósaperu?

Svar: Engan. Stærðfræðingur getur ekki skipt um ljósaperu, en hann getur auðveldlega sannað að það sé hægt.

Spurning: Hve marga prófessora þarf til að skipta um ljósaperu?

Svar: Einn. Með hjálp átta rannsóknarnema, tveggja forritara, þriggja doktorsnema og ritara getur hann skipt um peru.

Spurning: Hve marga umsjónarmenn stærðfræðideilda þarf til að skipta um ljósaperu?

Svar: Engan. Hvað var að þeirri gömlu?

Nokkrir góðir

Tölfræðingur getur verið með höfuðið inni í funheitum ofni og haft fæturna í ísköldu vatni og sagt að hann hafi það að meðaltali gott.

Kennarinn: Hve oft geturðu dregið 7 frá 83 og hvaða útkomu færðu?

Nemandinn: Ég get dregið 7 eins oft frá 83 og ég vil og ég fæ alltaf 76.

Héðan og þaðan

Kaðlín gengur upp fjall á hraðanum 2 km/klst. Niður fjallið, eftir sama stíg, gengur hún á hraðanum 6 km á klukkustund.

Ef hún stoppar ekkert uppi á fjallsttindinum og heldur rakiðis niður aftur hver er þá meðalhraði hennar í fjallgöngunni.

Doris eyddi $\frac{2}{3}$ af sparifé sínu í notaðan bíl. $\frac{1}{4}$ af afganginum eyddi hún í reiðhjól.

Ef reiðhjólið kostaði 25.000 kr. hve mikla peninga átti hún þá í upphafi?

Tuttugu og átta börn eru að fara í ferðalag. Fjögur börn komast í hvern bíl. Hve marga bíla þarf í ferðalagið?

Nemandi nokkur fær meðaleinkunnina 7,2 á fimm mismunandi prófum.

Ef lægsta einkunnin er ekki tekin með hækkar meðaleinkunnin upp í 8,4. Hver var lægsta einkunnin?

Þrjár endur og tveir andarundar vega 32 kg. Fjórar endur og þrjár andarungar vega 44 kg.

Allar endurnar vega jafnmikið og allir andarungarnir eru jafnþungir.

Hve mikið vega tvær endur og einn andarungi?

Númi leggur eftirfarandi þraut fyrir Nínu:

Ég er með tvær tölur.

Ef 5 sinnum fyrri talan plús 3 sinnum seinni talan eru jafnt og 47 og 10 sinnum fyrri talan mínus 4 sinnum seinni talan eru jafnt og 4, hverjar eru þá tölurnar?

Janus ætlar að kaupa 12 blýanta og einn penna, sem samanlagt kosta 845 kr.

Hann er ekki með nóga peninga svo hann ákveður að kaupa 8 blýöntum minna. Hann þarf að borga 605 kr.

Hve mikið kostar penninn?

FLATAR máli

1. tbl. 14. árg. 2007

Námstefna Flatar 2007	3
Raddir þátttakenda	4
Viðtöl við þátttakendur á Námstefnu Flatar 2006	
Skiptir einhverju máli hvað nemendum finnst?	7
Ingólfur Gíslason	
Stærðfræði fyrir alla	9
Viðtal við Einar Steingrímsson prófessor við HR	
Ögrandi stærðfræðigátur	14
Kristín Halla Jónsdóttir	
Stærðfræði fyrir alla	19
Margrét Ásgeirsdóttir	
Dyscalulia	23
Eiríkur Ellertsson	
Fánaverkefni	28
Guðrún S. Guðmundsdóttir	
Peran í Digranesskóla	30
Þórður St. Guðmundsson	
Héðan og þaðan	31



Flötur
SAMTÖK STÆRÐFRÆÐIKENNARA