FLATARMÁL

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆÐIKENNARA
1. TBL., 19. ÁRG.

2012

Flatarmál 1. tbl., 19. árg. 2012
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara

Útgefandi
Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar
Valgarð Már Jakobsson *formaður*
Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ
Ásta Ólafsdóttir *gjaldkeri*
Réttarholtsskóla
Imke Schirmacher *ritari*
Lágafellsskóla
Kristján Einarsson *vefumsjón*
Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ
Erla Þórey Ólafsdóttir *meðstjórnandi*
Kársnesskóla

Ritnefnd Flatarmála
Þórgunnur Óttarsdóttir *ritstjóri*
Brekkubæjarskóla
Laufey Einarsdóttir
Kelduskóla - Korpu
Guðbjörg Pálsdóttir
Menntavísindasviði HÍ

Prófarkalestur
Birna Hugrún Bjarnardóttir
Laufey Skúladóttir

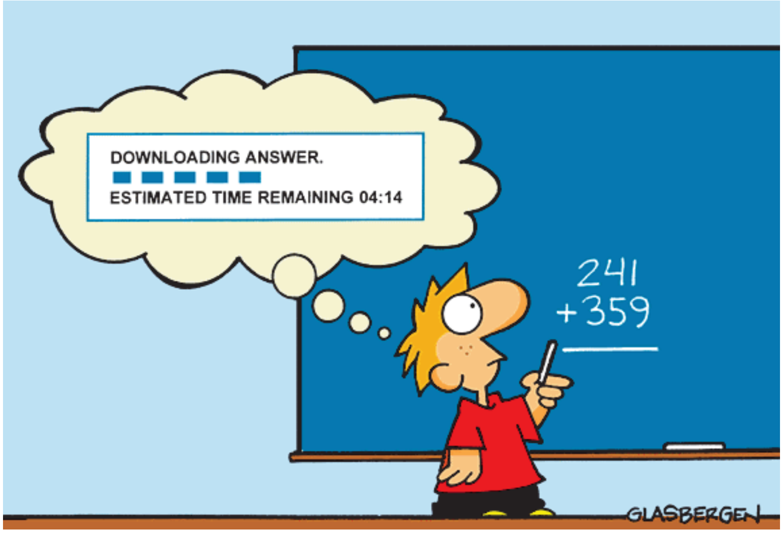
Umbrot og myndvinnsla
Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

Prentun
Prentsmiðjan Oddi ehf.

Veffang / netfang
flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.



Heil og sæl

DAGUR STÆRÐFRÆÐINNAR rann upp í þrettánda sinn föstudaginn 3. febrúar í ár. Árið 2000 var alþjóðlegt ár stærðfræðinnar og af því tilefni var ákveðið að halda upp á dag stærðfræðinnar. Stjórn Flatar hefur frá upphafi staðið fyrir uppbroti þennan dag. Fyrstu árin var dagur stærðfræðinnar 27. september en fljótlega þótti henta betur að halda upp á daginn fyrsta föstudag febrúarmánaðar. Allt til ársins 2005 voru gefin út sérstök þemahefti með fjölbreyttum verkefnum í tilefni dagsins.

Síðustu árin hefur stjórn Flatar verið með verkefna- og þrautabanka á vef félagsins í tilefni dagsins. Í ár setti stjórnin inn hugmyndir að nýtingu tölva og rafrænna kennslugagna í stærðfræðikennslu. Allt það efni sem gefið hefur verið út má nálgast á Flatarvefnum og má nota það allan ársins hring til að krydda stærðfræðikennsluna.

Eins og lesa má á vef Flatar er markmið dagsins einkum tvíþætt: *að vekja nemendur og sem flesta aðra til umhugsunar um stærðfræði og hlutverk hennar í samfélaginu*, einnig *að fá nemendur til að koma auga á möguleika stærðfræðinnar og notagildi hennar í víðara samhengi.*

Það er hlutverk okkar kennara að gera þennan dag eftirminnilegan fyrir nemendur. Gefa þeim kost á að takast á við verkefni stærðfræðinnar á sem fjölbreyttastan hátt, líta upp úr bókunum og uppgötva töfra stærðfræðinnar á áþreifanlegan og skemmtilegan hátt. Dagurinn er jafnframt áminning fyrir okkur kennara um mikilvægi fjölbreyttra kennsluaðferða og raunverkefna í allri kennslu.

Hvergi í námskrá stendur að nemendur eigi að klára námsbókina en aftur á móti eiga nemendur að:

- *læra að takast á við margvísleg verkefni og þrautir og finna lausnir á þeim*
- *öðlast jákvætt viðhorf til stærðfræðinnar og kynnast skemmtigildi hennar*
- *kynnist því að lausnarferlið er ekki síður mikilvægt en niðurstaðan sjálf og röng svör geta einnig verið lærdómsrík.*

Í öllu stærðfræðinámi þurfa nemendur að fá að þróa skilning sinn á stærðfræðihugtökum með því að fást við viðfangsefni sem tengjast daglegum veruleika þeirra og hafa merkingu fyrir þá sjálfa. Mikilvægt er einnig að stærðfræði sé tengd viðfangsefnum annarra námsgreina.

Framtíðarsýn okkar er að kennsluhættir í stærðfræði verði fjölbreyttir og að stærðfræðikennarar leggi meiri áherslu á inntak stærðfræðinnar og hlutbundna vinnu. Afrakstur slíkrar vinnu getur jafnast á við margar blaðsíður í bókinni.

Efni blaðsins er að vanda fjölbreytt. Þar gefur að líta umfjöllun um vinnu á degi stærðfræðinnar í Lágafellsskóla þar sem Imke Schirmacher fjallar um nálgun nemenda í talningu. Söguhorn Kristínar Bjarnadóttur er á sínum stað og að þessu sinni eru það Arkímedes og uppgötvanir hans sem eru umfjöllunarefni hennar. Þuríður Ástvaldsdóttir deilir með okkur efni úr masterritgerð sinni, *Stærðfræðin er meira en bara tölur* og Þóra Rósa Geirsdóttir skrifar um stærðfræðikennslu ungra barna.

Ingólfur Gíslason veltir upp spurningum um umbun og hrós í stærðfræðikennslu, en Sigrún L. Guðbjörnsdóttir fjallar um sannanir á reglu Pýþagórasar. Valgarð Jakobsson, formaður Flatar, hefur tekið saman umfjöllun um Námstefnu Flatar haustið 2011 og Laufey Einarsdóttir segir frá nálgun Mikael Skånstrøm í stærðfræðikennslu. Áhugaverðir vefir og stærðfræðitímarit eru á sínum stað. Einnig minnum við á þá viðburði sem fram fara á árinu undir liðnum *Hvað er á döfinni*.

Vinna við annað tölublað ársins er þegar hafin. Allt stærðfræðitengt efni - þ.e. ábendingar um áhugaverðar greinar og verkefni, sögur úr kennslustofunni eða annað sem brennur á ykkur - væri vel þegið.

Þórgunnur Óttarsdóttir,
ritstjóri Flatarmála

Nokkrir punktar um hrós og greind og hvað það er að vera góður í stærðfræði

eftir INGÓLF GÍSLASON
doktorsnema við Háskóla Íslands
í stærðfræðimenntun

Bæði börn og fullorðnir standa sig verr við hverskonar athafnir ef þau eiga von á skömmum eða niðurlægingu ef þeim tekst ekki vel upp. Fjölmargir eiga því miður minningar um að hafa orðið fyrir slíku í stærðfræðinámi sínu. Enn þann dag í dag kemur það fyrir að einhverjir kennarar missa út úr sér niðurlægjandi orð við nemendur sína.

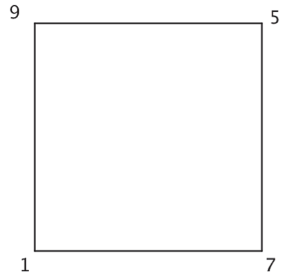
Stundum gerum við hins vegar þau mistök að hrósa nemendum án þess að hugsa nægilega vel um tilganginn með því. Í þekktri rannsókn Claudiu Mueller og Carols Dweck frá 1998 voru nokkur auðveld stærðfræðiverkefni lögð fyrir börn. Að því loknu fékk helmingurinn af hópnum skilaboðin „þú hlýtur að vera rosalega klár“, en hinn helmingurinn fékk skilaboðin „þú hlýtur að hafa unnið rosalega vel.“

Síðan fengu börnin aðeins erfiðari stærðfræðiverkefni til að leysa. Þeim börnum sem hafði verið sagt að þau væru klár gekk ekki vel að leysa verkefnin. Þegar börnin sáu ekki samstundis hvernig leysa átti verkefnin fóru þau að hafa áhyggjur af frammistöðu sinni og reyndu ekki að takast á við verkefnin. Hinum hópnum gekk mun betur. Þau börn sáu að verkefnin voru erfið en voru ekki hrædd við að reyna.

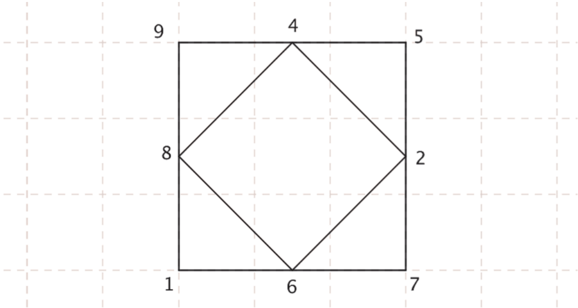
Bandaríski sálfræðingurinn Carol Dweck hefur birt greinar og gefið út bækur um neikvæð áhrif þess að hrósa fólki fyrir greind. Skrif hennar eiga alveg sérstakt erindi við stærðfræðikennara og stærðfræðinemendur vegna útbreiddra hugmynda um að árangur í stærðfræði komi til af meðfæddum hæfileikum eða greind. Það spillir fyrir stærðfræðinámi að trúa því að greind sé sérstakur óbreytanlegur eiginleiki. Þegar stærðfræðin fer að þyngjast á þetta alls ekki við. Sumir geta að vísu spjarað sig nokkuð lengi og eiga kannski auðvelt með alla stærðfræði í grunnskóla. En einhvern tíma rennur upp sú stund að stærðfræðin reynist þeim ekki lengur jafn auðveld og þá þarf að leggja meira á sig við stærðfræðinámið.

Þetta er líka ein af ástæðum þess að öll börn hafa gott af því að glíma reglulega við krefjandi verkefni þar sem ekki er ljóst hvernig fara á að. Verkefnin þurfa helst að vera þannig að allir nemendur geti tekist á við þau, það séu margar leiðir til þess, og að það gefi færi á að kafa dýpra og dýpra.

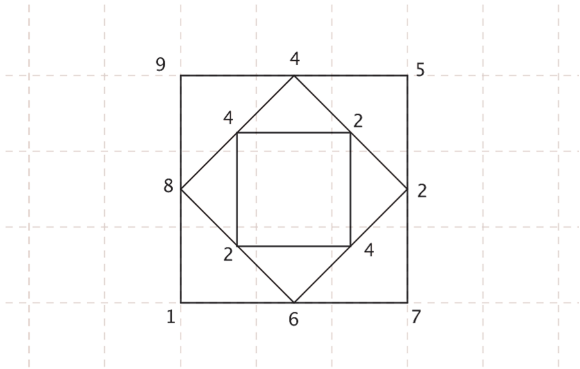
Hér er eitt slíkt verkefni:



Við byrjum með ferning og fjórar tölur við horn ferningsins. Svo teiknum við nýjan ferning sem hefur hornpunkta sína á miðpunktum hliða upphaflega ferningsins. Við hvert af þessum hornum skrifum við mismun þeirra tveggja talna sem eru á endum hliðarinnar. Ef við gerum þetta við ferninginn hér að ofan fæst þessi ferningur:



Nú höldum við áfram að gera það sama við næsta ferning og fáum þessa mynd:



Svona eigum við að halda áfram þangað til við fáum ferning sem hefur töluna 0 á öllum hornum. Fyrsta verkefnið er að ljúka við ferninginn hér að ofan. Hvað þarf margar umferðir til að klára verkefnið?

Nú eiga kennarar og nemendur að prófa að búa til ferninga með aðrar tölur á hornunum og athuga hvort öll slík verkefni endi með ferningi sem hefur núll á öllum hornum. Er hægt að búa til ferninga þannig að það taki fleiri umferðir að klára þá?

Þessi þraut er að því leyti góð að allir geta glímt við hana. Í fyrsta lagi er þetta æfing í frádrætti. En það er margt fleira í henni. Þeir sem leika sér aðeins með hana fara að taka eftir ýmsum mynstrum. Þeir fara að spyrja spurninga og setja fram tilgátur. Er eitthvað í gangi þarna sem tengist sléttum tölum? Það er ekki hægt að finna út úr þessu í einum hvelli. Það að vera góður í stærðfræði er ekki að vera fyrstur að finna svarið heldur margt annað: að spyrja góðra spurninga, að tjá hugsun sína svo aðrir skilji, að hlusta á útskýringar annarra, og síðast en ekki síst – að geta kafað dýpra.

Ábendingar um lesefni

Rannsóknum Dwecks má kynnast í bók hennar *Mindset: The new psychology of success* (2007), en heimasíðu hennar má einnig finna á netinu.

Greinin eftir Mueller og Carols Dweck er *Praise for intelligence can undermine children's motivation and performance,* birt í Journal of Personality and Social Psychology, 75(1), 33-52.

Meiri umfjöllun með fleiri hugmyndum um mismunaferninga er á bloggsíðunni Math for love: http://mathforlove.com/2011/04/squares_of_differences/

Grein um mismunaferninga sem skrifuð er á nokkuð háu stærðfræðilegu stigi (The Convergence of Difference Boxes eftir Behn, Kribs-Zaleta og Ponomarenko) birtist í American mathematical monthly í maí 2005, en var 13. júní 2011 fáanleg á síðunni http://www.maa.org/pubs/AMM-May05_Boxes.pdf

Lesið úr tugabrotum

Oft koma upp álitamál um hvernig lesa skuli úr tugabrotum. Tökum sem dæmi töluna 382,174. Tveggja kosta er völ að minnsta kosti:

Valkostur A

Þrjú hundruð áttatíu og tveir
komma einn, sjö, fjórir

eða

Valkostur B

Þrjú hundruð áttatíu og tveir
komma hundrað sjötíu og fjórir

Réttara er að lesa samkvæmt valkosti A. Það er nefnilega ekki neitt „hundrað“ aftan við kommu, þar sem 1 er ekki í hundraðasæti og 7 eru ekki í tugasæti. Þess vegna er ritháttur B villandi fyrir skilning á sætiskerfinu.

Þó má nefna tvær undantekningar:

382,17 kr. mætti lesa sem

þrjú hundruð áttatíu og tveir
komma sautján

þar sem sautján stendur fyrir 17 aura.

Tilvik þar sem aurar koma við sögu hins vegar orðin sjaldgæf hér á landi en þetta gæti til dæmis átt við um evrur og dollara.

Hin undantekningin er ef til vill algengari en það er þegar skráð eru brot úr metra:

5,85 m
eru þá 5 m og 85 cm.

Það á þó ekki við 5,85 km
þar sem ekki tíðkast að tala um 85 dekametra.

Skoðum að lokum samanburð á 5,9 og 5,13. Lesháttur B gæti leitt til þeirra ályktunar að 5,13 sé stærri tala en 5,9 af því að 13 er stærra en 9, en svo er ekki. Meginreglan er því að lesa hvern aukastaf fyrir sig eins og í valkosti A hér að ofan.

Miklu skiptir að kenna nemendum á miðstigi að lesa rétt úr tugabrotum um leið og skilningur á sætiskerfinu er festur í sessi. Einungis tilvik, þegar um tiltekinn fastan fjölda aukastafa er að ræða, eins og krónur og aura og metra og sentimetra, geta réttlætt lesmáta B.

- Kristín Bjarnadóttir

Stærðfræði - kennsla ungra barna

eftir
ÞÓRU RÓSU GEIRSDÓTTUR
sérfræðing við miðstöð skólaþróunar
við Háskólann á Akureyri

Í allmörg ár hef ég haldið námskeið og fyrirlestra fyrir kennara sem hafa viljað bæta stærðfræðikennslu sína. Eftir námskeiðin hafa margrir kennarar gert breytingar á kennslu sinni, til dæmis aukið vinnu með hlutbundið efni, aukið fjölbreytni í námsaðstæðum og dregið úr sjálfstýringu námsbóka. Reynslan hefur þó sýnt mér að stök námskeið og fyrirlestrar hafa ekki náð að vera sá stuðningur sem kennarar þurfa til að ná tökum á nýjum leiðum og öðlast þá sýn á stærðfræðikennslu sem þarf til að breyta henni.

Undanfarin ár hafa margir grunnskólar tekið þátt í þróunarverkefninu *Byrjendalæsi* undir leiðsögn Miðstöðvar skólaþróunar við Háskólann á Akureyri (Rósa Eggertsdóttir o. fl. 2011). Í þróunarverkefninu er athyglinni beint að því hvernig börn verða læs og hvernig kennarar haga kennslu sinni og skapa námsaðstæður fyrir börnin út frá þekkingu sinni á lestrarferlinu. *Byrjendalæsi* byggir á samvirkri nálgun á nám þar sem farið er frá heild til eindar og aftur til heildar. Viðfangsefni kennara felst að stórum hluta í að tileinka sér kennsluhætti sem byggja á kennsluáætlanagerð út frá markmiðum, stigskiptum stuðningi í kennslu, einstaklingsmiðun og leiðsagnarmati, samvinnu nemenda, fjölbreytni í verkefnum og námsaðstæðum með áherslu á spil og leiki. Kennarinn er fyrirmynd nemenda og nýtir aðferðir stigskipts stuðnings (Vygotsky. 1978) við að kenna nemendum. Þróunarverkefnið stendur yfir í 2 ár og fá kennarar stuðning með fræðslu, heimsóknum og ráðgjöf þann tíma.

Frá árinu 2009 hef ég verið hluti af sérfræðingateymi Háskólans á Akureyri sem leiðir þróunarverkefnið *Byrjendalæsi*. Fljótlega sá ég að sú kennslufræði og þær námsaðstæður sem *Byrjendalæsið* byggir á er í samræmi við mína sýn á stærðfræðikennsluna. Ég fékk kennarahópa sem höfðu lokið 2ja ára þróunarstarfi í *Byrjendalæsi* til að skoða með mér þessa samlíkingu og vinna með mér að því að endurmeta stærðfræðikennslu þeirra í takt við þá kennslufræði og kennsluhætti sem þeir höfðu tileinkað sér í *Byrjendalæsinu*. Nú starfa með mér þrír kennarahópar yngri barna á Akureyri sem ég hitti einu sinni í mánuði og einn hópur í Reykjavík sem ég hitti fimm sinnum yfir veturinn. Allt eru þetta kennarar sem vinna eftir Byjendalæsi með yngstu börnum grunnskólans.

Stærðfræði – kennsla ungra barna

Verkefnið *Stærðfræði – kennsla ungra barna* er hugsað sem stuðningur við kennara sem hafa kennt *Byrjendalæsi* og tekið þátt í þróunarstarfi í tengslum við það eða eru á síðara ári í þeirri vinnu. Beinagrind verkefnisins samanstendur af tveimur meginstoðum sem eru:

1. Yfirfærsla á kennslufræði læsiskennslunnar yfir á stærðfræðikennsluna.
2. Endurmenntun kennara í stærðfræði.

Verkefnið byggir á mánaðarlegum 90 – 120 mínútna námsfundum þar sem eitt viðfangsefni er til umræðu, það ígrundað og rætt og mátað inn í kennslu- og námsaðstæður. Ég hafði áætlað að fara einnig í kennslustundir en af því hefur ekki orðið. Kennarar sem taka þátt í verkefninu eru hvattir til félagastuðnings og til að skoða kennslu hver hjá öðrum.

Yfirfærsla á kennslufræði

Rannsóknir á lestri hafa dregið fram nokkrar framúrskarandi aðferðir fyrir nemendur til að nota við læsisnámið og tileinka kennarar sér hluta þeirra í *Byrjendalæsinu*. Þegar hafa verið þróaðar leiðir til að kenna nemendum ákveðnar lesskilningsaðferðir (Hyde. 2006). Með gleraugum stærðfræðikennslunnar má finna samhljóm við hvert einasta atriði sem nefnt er hér að neðan og eru hér á ferðinni ekki síður framúrskarandi aðferðir fyrir stærðfræðinám nemenda en fyrir læsisnám þeirra.

Að mynda tengingar - að virkja fyrri þekkingu við efnið, tengja við eigin reynslu, gefa aðstæðum gaum.

Að spyrja spurninga - að undrast á virkan hátt, leita að ástæðum, leita eftir sömu einkennum, skoða „hvað ef þetta væri ...“, reyna að sjá fyrir sér.

Að sjá fyrir sér - ímynda sér tilteknar aðstæður eða lýsingu, gera sér í hugarlund.

Að álykta og spá fyrir um - túlka, komast að niðurstöðu, koma fram með kenningar.

Að greina mikilvægi þátta - sjá og finna hvað skiptir mestu máli og hvað minna máli.

Að tengja saman - finna mynstur, taka saman það helsta, endursegja.

Að stilla af námsvitundina - að fylgjast með hugsunum sínum á virkan hátt, aðlaga vinnuaðferðir að því sem lesið er.

Ef draga ætti einhverja af þessum punktum sérstaklega fram má segja að fyrsti og þriðji punktur fái sérstaka athygli hvað varðar stærðfræðikennslu yngri barnanna. Í verkefninu er mikið lagt upp úr því að börnin geri sér myndir af viðfangsefnunum í huganum og átti sig á tengslum þeirra við stærðfræðina og tengi viðfangsefnin við þær daglegu aðstæður sem þau þekkja.

KVL og hugtakakort

Einnig má benda á að KVL aðferðin getur nýst vel í stærðfræðinámi barna. KVL (kann – vil vita – hef lært) er hjálpartæki til lesskilnings þar sem nemendur gera sér grein fyrir því sem þeir kunna um efnið, það sem læra skal og því sem þeir vilja vita. Að loknum lestri og rannsóknarvinnu geta nemendur svo skráð hvað þeir hafa lært. Við lausnaleit á orðadæmum og þrautum er gott að hugsa í þeim farvegi og bendir Hyde á það í bókinni *Comprehending Math Adapting Reading Strategies to Teach Mathematics, K-6* (Hyde. 2006). Ferlið set ég fram sem KVhL þar sem h stendur fyrir **hvernig.** Börnin læra markvisst að fylla út í fjögur hólf við lausnaleitina og með því rofnar ferlið aldrei frá viðfangsefni til lokasvars:

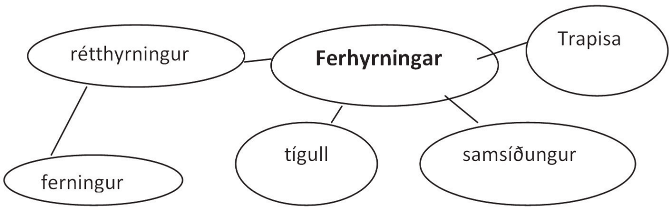
K – Hvað veit ég (**kann),** hvaða upplýsingar eru gefnar í dæminu.
V – Hvað **vil ég vita** eða að hverju er spurt, hver er spurningin.
h – **Hvernig** get ég fundið svarið, hvernig reikna ég.
L – Hver er **lausnin**, svarið við spurningunni sem skráð er.

Dæmi: Jón og Gunna eiga afa og ömmu sem eru samtals 148 ára gömul. Afi er 8 árum yngri en amma. Hve gömul er amma þeirra Jóns og Gunnu?

K **Samanlagður aldur beggja er 148 ár. Afi er 8 árum yngri.** (Hér skrá nemendur allt það sem fram kemur og skiptir máli við lausnaleitina.)	**V** **Hvað er amman gömul?** (Hér geta nemendur orðað spurninguna með eigin orðum.)
h **148 – 8 = 140** **140 / 2 = 70** **70 + 8 = 78** (Hér eru líka teikningar, lýsingar með orðum, meiri útreikningar ...)	**L** **Amman er 78 ára gömul.** (Hér er alltaf svarað í heilli setningu/málsgrein.)

Á þennan máta má kenna nemendum markvisst að lesa og skilja orðadæmi sem oft reynast þeim erfið í stærðfræðináminu.

Hugtakakort er eitt af því sem nemendur læra að nota í *Byrjendalæsinu*. Þannig kort hentar einkar vel í stærðfræði, til dæmis til að skilgreina og sjá tengsl hugtaka:



Einnig er gott að nota hugtakakort til þess að skilgreina tölur, sjá fjölbreytileika og samsetningar þeirra og í framhaldinu að styrkja notkun jafnaðarmerkisins.

Kennsluáætlun og uppbygging kennslunnar

Uppbygging kennslunnar í *Byrjendalæsi* byggir á samvirkri nálgun (Rósa Eggertsdóttir o.fl. 2010) og er í þrem þrepum þar sem fyrst er unnið út frá heildinni síðan farið í sundurgreinandi vinnu og í lokin er byggt aftur upp til heildar.
Ef þessi samvirka aðferð er yfirfærð á stærðfræðina lítur það svona út:

1. skref – heildin, það er daglega lífið, þar er stærðfræðin í sínu rétta samhengi. Í gegnum þetta þrep er viðfangsefnið kynnt og tengt raunveruleikanum. Hér er tækifæri á að efla orðaforða og hugtakaskilning tengdan stærðfræðinni. Hér birtast að stórum hluta tengslin við daglegt líf.

2. skref – rannsóknarvinnan þar sem einstaka tölur, talnahópar, aðgerðir og talnamynstur er krufið til mergjar. Hér fara fram allar hugsanlegar aðgerðir og athafnir að því marki að auka talnaskilning, styrkja færar leiðir við reikniaðgerðirnar fjórar eða kryfja rúmfræðina til mergjar. Hér er hlutbundin vinna í fyrirrúmi, fjölbreytt verkefni, samræða og samvinna, leikir og spil.

3. skref – enduruppbyggingin þar sem sú þekking og vitneskja sem aflað hefur verið er færð inn víðara samhengi. Hér eru þrautir og viðfangsefni daglegs lífs, frekari æfingar og þjálfun.

Myndir frá Síðuskóla á Akureyri.

Kennsluáætlanir

Meginviðfangsefni kennara í þessu þróunarstarfi er að þeir hafi sjálfir stjórnina á stærðfræðikennslunni í stað þess að láta kennslubókina ráða. Leiðin að því markmiði er að gera kennsluáætlanir út frá markmiðum, bæði inntaks- og aðferðarmarkmiðum (Aðalnámskrá grunnskóla. 2007). Við gerð áætlana er notað kennsluáætlanamódel sem byggir á sex aðalatriðum: Viðfangsefni - tímaplan - meginspurningar sem vinna á með - skýr markmið sem eru mælanleg - hugtök - námsmat (Fjørtoft, Henning. 2009). Í kjölfar kennsluáætlana kemur lýsing á hverri vinnulotu sem er nákvæm í upphafi. Með þessum hætti verður kennari meðvitaðri um markmið kennslu sinnar og um leið styrkist hann í stjórnunarhlutverkinu.

Endurmenntun kennara - inntak stærðfræðinnar

Stærsta viðfangsefni þessa verkefnis er talnaskilningur og talnaleikni. Sú hefð sem ríkt hefur í stærðfræðikennslu hér á landi, það er að kenna strax ákveðnar uppsetningar í reikniaðgerðunum fjórum, hefur að mínu mati ekki þjálfað börnin í talnaskilningi og launsaleit þannig að þau séu að finna út færar leiðir. Námsefnið Eining lagði góðan grunn að þessum áherslum en náði því miður ekki að breyta hefðinni.

Dæmi: 59 + 37

Hefðbundin leið: Dæmið sett upp lóðrétt, 9 og 7 lagðir saman sem gefur 6 og einn er geymdur. Svo eru 5 og 3 og 1 lagðir saman og skrifað 9 fyrir framan 6. Í þessu tilfelli er aldrei verið að vinna með 50 eða 30 og svarið 96 ekki endilega lesið.

Leið með talnaleikni og skilningi: 59 + 37 ... er jafnt og 60 + 36 ... 60, 70, 80, 90 og 6 ... eða 96. Hér er 59 alltaf 50 og 9 en ekki 5 og 9 (Fosnot og Dolk. 2001).

Leggja þarf mikla áherslu á að kenna börnunum mismunandi leiðir sem byggja á talnaskilningi og leikni með tölur. Til eru margar leiðir sem gera ráð fyrir að nemendur vinni með þá tölu sem lagt er upp með.

Þegar fyrstu skrefin eru tekin í algebrunámi skapast góð tækifæri til að styrkja og efla talnaskilninginn og ekki síður skilning á jafnaðarmerkinu og aðgerðamerkjum (Carpenter. 2006). Lögð er áhersla á þá nálgun sem leið til talna- og aðgerðaskilnings í verkefninu *Stærðfræði – kennsla ungra barna*. Auk áherslunnar á talnaskilning og talnaleikni í þróunarverkefninu er lögð mikil áhersla á tengsl stærðfræðinnar við daglegt líf. Þar er unnið með hugtakanám, hlutbundin gögn, orðadæmi og þrautir og ekki síst opnar þrautir. Kennarar kynnast SKSB (e. *Cognitively Guided Instruction, CGI*) í þeim tilgangi að læra að lesa úr aðgerðum nemenda við lausnaleit og til að útbúa þrautir þar sem ýmist niðurstaða, breyting eða upphaf er hið ókunna (Carpenter, Fennema o.fl. 1999).

Að lokum

Verkefnið *Stærðfræði – kennsla ungra barna* byggir á kennslufræði sem hefur samhljóm með læsiskennslu og tekur einnig mið af rannsóknum og skrifum um stærðfræðinám ungra barna. Reynslan segir mér að það sé mikil þörf á því að styðja kennara við að efla sjálfstraust sitt í stærðfræðikennslu. Með því að færa kennsluaðferðir í stærðfræði nær þeim aðferðum sem kennarar hafa tileinkað sér við kennslu *Byrjendalæsis* og draga fram samhljóm þeirra og efla stærðfræðiþekkingu kennaranna samhliða því, tel ég leið til breytinga í stærðfræðikennslu yngri barna færari en oft áður.

Heimildaskrá

Aðalnámskrá grunnskóla. Stærðfræði. 2007. Reykjavík, Menntamálaráðuneytið.

Carpenter, T.E., M. L. Franke, L. Levi. 2006. *Thinking Mathematically Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School.* Portsmouth, Heinemann.

Carpenter, T., E. Fennema, M.L. Franke, L. Levi og S. B. Empson. 1999. *Children's mathemmatics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmmouth, Heinemann.

Fjørtoft, H. 2009. *Effektiv planlegging og vurderring, rubrikker og andre verktøj for lærere*. Bergen, Fagbokforlaget.

Fosnot, C. T., M. Dolk. 2001. *Young Mathematicians at Work - Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction.* Portsmouth, Heinemann.

Hyde, A. 2006. *Comprehending Math Adapting Reading Strategies to Teach Mathematics, K-6.* Portsmouth, Heinemann.

Rósa Eggertsdóttir, Jenný Gunnbjörnsdóttir, Þóra Rósa Geirsdóttir. 2010. Byrjendalæsi – Lestur eða læsi? *Skíma* 2 (33) 26 – 29.

Vygotsky, L.S. 1978. *Mind in Society. The developmennt of Higher Psycologial Processes* (ritstj. C Michael, V. John – Steiner, S. Scribner og E. Souberman). Cambridge Massachusetts London, Harward University Press.

◀ *Arkímedes hugsi* - málverk eftir ítalska barokkmálarann Domenico Fetti frá 1620.

Arkímedes og gullkóróna Híerós konun

eftir
KRISTÍNU BJARNADÓTTUR
dósent á Menntavísindasviði HÍ

Híeró II, konungur í gríska borgríkinu Sýrakúsu á Sikiley, var fæddur um 306 f. Kr. Híeró hóf frægðarferil sinn þegar hann var kjörinn annar foringi Sýrakúsuhers, en Sýrakúsubúar höfðu um langa hríð átt í útistöðum við Karþagómenn. Híeró stýrði valdaráni hersins árið 275 f. Kr. auk þess sem hann tryggði völd sín með því að kvænast Filistis, dóttur vinsæls borgara í Sýrakúsu. Híeró var kjörinn konungur Sýrakúsu árið 270 f. Kr. fyrir hetjulega baráttu gegn Mamertínum, sem voru flokkur sjóræningja frá Messínu á Sikiley, en fullnaðarsigur á þeim vannst nokkru síðar.

Sigur Híerós á Mamertínum raskaði viðkvæmu valdajafnvægi Grikkja, Rómverja og Karþagómanna sem allir vildu ná yfirráðum á Sikiley. Híeró taldi að vænlegra væri að vera bandamaður Rómverja en Karþagómanna og samdi við Rómverja árið 263 f. Kr. um að greiða þeim skatt og leggja þeim til korn. Híeró virti friðarsamninginn á meðan hann lifði og var tryggur bandamaður Rómverja. Með því tryggði hann frið og farsæld á meðan Rómverjar og Karþagómenn áttu í erjum sín á milli.

Híeró var þakklátur guðunum fyrir heppni sína og farsæld og ákvað að láta gera kórónu þeim til heiðurs. Kórónan átti að verða eins og lárviðarsveigur. Híeró vó sjálfur tiltekið magn gulls og fékk það gullsmiði sem hann fól að smíða sveig við hæfi guðanna.

Gullsmiðurinn skilaði kórónunni á tilteknum tíma. Sveigurinn vó nákvæmlega jafnmikið og gullið sem konungurinn hafði afhent gullsmiðnum. Híeró var ánægður og greiddi gullsmiðnum vel. Gullsmiðurinn hélt svo leiðar sinnar.

Nokkru síðar heyrði Híeró orðróm um að gullsmiðurinn hefði blekkt sig og ekki afhent kórónu úr skíru gulli heldur hafi gullið verið blandað silfri. Þá var stærðfræðingurinn Arkímedes kallaður til, en hann mun hafa verið náinn ættingi Híerós. Arkímedes fann að gullkórónan hratt frá sér meira vatni en ef hún væri úr hreinu gulli og ályktaði því að brögð væru í tafli.

Ólafur Daníelsson lagði dæmi þetta fyrir í bók sinni *Kennslubók í algebru* (Ólafur Daníelsson, 1927, bls. 100) og er það hér með lagt fyrir til lausnar. Þar segir:

> *Gullkóróna Híerós konungs í Sýrakúsu vó 20 „mínur“ en var blönduð silfri. Arkímedes fann að þegar hann vó hana í vatni léttist hún um 1/16 hluta af þyngd sinni. Hve mikið var af hvorum málmanna í kórónunni? Gull léttist um 1/20 hluta þyngdar sinnar, þegar það er vegið í vatni, en silfur um 1/10 hluta.*

SÖGUHORNIÐ

...gs í Sýrakúsu

Ástæðan fyrir því að kórónan léttist í vatni er að sérhver hlutur sem sökkt er í vatn léttist um þyngd þess vatns sem hann ryður frá sér. Gull er mjög þungur málmur. Kóróna úr hreinu gulli hefur því minna rúmmál en jafnþung kóróna sem er blönduð silfri. Fyrirbrigði þetta nefnist *uppdrif* og skýrir til dæmis hvers vegna okkur finnst við léttast í vatni og við getum jafnvel flotið. Lögmálið á ekki aðeins við um vatn heldur hvaða fljótandi efni sem er. Allir hlutir í venjulegu andrúmslofti léttast um jafnþyngd sína af lofti, en loftið er svo miklu léttara en flest efni að það skiptir litlu máli, þar til komið er að hlutum eins og dúni, rykögnum eða blöðrum sem fylltar eru af gasi.

Eureka!

Sagan segir að Arkímedes hafi verið í baði þegar hann uppgötvaði lögmálið um uppdrif. Hann hafi þá orðið svo hrifinn að hann hafi hlaupið nakinn um götur Sýrakúsu og hrópað: Eureka, eureka, ég hef fundið það, ég hef fundið það! Enska orðið *heuristics* er af þessu dregið og er notað um námsaðferðir sem byggjast á að nemandi feti sig áfram og reki sig á en sé jafnframt gagntekinn af löngun til að leita lausna á tilteknu viðfangsefni.

Híeró var góður stjórnandi sem vann hug og hjörtu þegna sinna. Hann endurbyggði Sýrakúsu á ríkisstjórnartíma sínum sem stóð yfir í 60 ár. Hann styrkti varnir borgarinnar samkvæmt ráðum Arkímedesar en sá honum jafnframt fyrir friðsælu umhverfi til að iðka fræði sín.

Arkímedes (287–212 f. Kr.) var mesti stærðfræðingur fornaldar. Hann ritaði mörg rit sem hafa varðveist, þar á meðal *Um fljótandi hluti, Um kúlu og sívalning, Um vefjur*, *Mælingar hrings* og *Sandreikninn* auk annarra sem hafa glatast í tímans rás. Arkímedes útbjó ýmis konar vígvélar til að verja Sýrakúsu og granda skipum Rómverja. Þær byggðust meðal annars á vogarafli og þóttu ráð hans ganga göldrum næst.

Eftir daga Híerós tóku við eintómar hremmingar. Æstur múgur myrti fjölskyldu hans og Rómverjar hertóku Sýrakúsu. Rómverskur hermaður myrti Arkímedes. Sýrakúsa, sem ljómi hafði leikið um, varð smábær innan Rómaríkis og 500 ára sögu Sýrakúsu sem grísks borgríkis var lokið.

Heimildir

Chowdhury, R. Eureka. The story of Archimedes. Sótt 18. janúar 2012 af http://www.longlongtimeago.com/llta_greatdiscoveries_archimedes_eureka.html.
Ólafur Daníelsson (1927). Kennslubók í algebru. Akureyri: Bókaverslun Þorsteins M. Jónssonar.
Rorres, C. Royal family of Syracuse. Hiero II. Sótt 18. janúar 2012 af http://math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Family/Hiero.html

eftir
ÞURÍÐI ÁSTVALDSDÓTTUR
M.Ed. kennara við
Lindaskóla Kópavogi

Greinin er byggð á meistaraprófsverkefni höfundar: *„Ég skildi ekki orð, ekki eitt einasta orð". Reynsla einstaklinga með sértæka námserfiðleika í stærðfræði.*

„Stærðfræðin er meira en bara tölur"

Í upphafi árs 2010 voru tekin viðtöl við fimm einstaklinga valda af handahófi. Þeir voru á misjöfnum aldri, en áttu það sameiginlegt að hafa átt í erfiðleikum með stærðfræðinám en að öðru leyti gengið vel í námi. Þrír höfðu lokið háskólanámi, einn stundaði nám við háskóla og yngsti viðmælandinn var á fyrsta ári í framhaldsskóla. Viðtölin voru opin og sögðu viðmælendur greinarhöfundi frá reynslu sinni af námi í stærðfræði. Áhugavert var að sjá hvað margt líkt var með reynslu svo ólíkra viðmælenda. Notuð var þemagreining við úrvinnslu á viðtölunum.

Rannsóknir á sértækum námserfiðleikum í stærðfræði

Læknisfræðilegar rannsóknir á afleiðingum heilaskaða hjá einstaklingum hafa gefið mikilvægar upplýsingar um starfsemi heilans. Það voru einmitt slíkar rannsóknir sem gáfu fyrstu vísbendingar um að til væri meðfædd hömlun (*e.disability*) er varðaði stærðfræðinám (Gersten, Clarke, og Mazzocco, 2007). Fræðimenn eru ekki sammála um hugtakanotkun og ekki verður farið í þá umræðu hér, en samt ber að nefna hugtök eins og *dyscalculia* og *developmental dyscalculia* sem eru notuð af enskumælandi fræðimönnum. Hugtakið *talnablinda* hefur náð útbreiðslu meðal almennings sem þýðing á dyscalculia en einnig hefur verið talað um reikniblindu. Talnablinda er gott orð og lipurt í notkun en hefur ekki verið skilgreint af íslenskum sérfræðingum. Hér verður notað hugtakið *sértækir námserfiðleikar í stærðfræði* en þar er vísað til meðfæddrar hömlunar sem veldur sérstökum erfiðleikum í stærðfræðinámi. Einstaklingum með sértæka námserfiðleika í stærðfræði gengur mun verr í stærðfræði en ætla mætti af almennri námsgetu þeirra.

Rannsóknir á námserfiðleikum í stærðfræði eiga sér ekki langa sögu. Fræðimenn er fjalla um námserfiðleika í stærðfræði benda á hve stutt á veg rannsóknir séu komnar miðað við rannsóknir á lestrarerfiðleikum (Hansen, Jess, Pedersen, og Rönn, 2006, Gersten, Clarke, og Mazzocco, 2007). Gersten, Clarke og Mazzocco hafa borið saman fjölda rannsókna á hvoru sviðinu fyrir sig sem hafa verið birtar á gagnagrunnunum ERIC og PubMed (Gersten, Clarke, og Mazzocco, 2007). Í ljós kom að rannsóknir á stærðfræðierfiðleikum eru langt á eftir rannsóknum á erfiðleikum í lestri. Niðurstöður þeirra birtast í töflu 1 hér á næstu opnu.

Af tölunum í töflu 1 virðist sem áhugi fyrir rannsóknum á stærðfræðierfiðleikum sé að aukast en hlutfallið er enn óhagstætt. Þegar slegið er inn leitarorðunum „reading disability" og „mathematical learning disability" á ERIC og tímabilið 2006 - 2010 skoðað, kemur fram að lesturinn á þar 498 greinar en stærðfræðin aðeins 27. Hlutfallið er 18:1 og enn er stærðfræðin verulega langt á eftir í fjölda rannsókna miðað við lesturinn.

Mikið verk er óunnið í rannsóknum á sértækum námserfiðleikum í stærðfræði. Bæði hvað varðar ástæður að baki erfiðleikunum og hvernig bregðast megi við í kennslu þannig að nemendur með sértæka námserfiðleika beri ekki skaða af en njóti góðs af námi í stærðfræði.

Tungumál, rýmisskynjun og skynjun á magni eru allt þættir sem taka þarf með þegar námserfiðleikar í stærðfræði eru rannsakaðir (Butterworth, 2003). Þegar skoðað er hvað felst í einfaldri talnameðferð og reikningi, sést að þarna er ekki um einfaldar aðgerðir að ræða. Þetta hefur átt þátt í því að gera fræðimönnum erfitt fyrir þegar leitað er orsaka vandans.

Rannsóknir á orsökum sértækra námserfiðleika í stærðfræði byggja að miklu leyti á taugafræðilegum rannsóknum á heilastarfsemi. Lítum á hugmyndir þriggja leiðandi fræðimanna á orsökum sértækra námserfiðleika í stærðfræði. Þeir eru David C. Geary, prófessor við Háskóla Missouri, Brian Butterworth prófessor við University College í London og Stanislas Dehaene prófessor við Collége de France í París. Geary er doktor í þroskasálfræði, Butterworth er doktor í taugasálfræði og Dehaene er upphaflega stærðfræðingur sem varð síðan þekktur fyrir taugafræðirannsóknir á talnaskynjun.

Geary gengur út frá því sem hefur verið rannsakað og staðfest um lausnaleiðir *(e. strategy use)* barna við einfalda samlagningu og hvernig þær þróast (Geary, Hoard, Nugent, og Byrd-Craven, 2007). Lausnaleiðirnar flokkar Geary í tvö stig eftir því hvort barnið kallar fram lærðar staðreyndir úr langtímaminni eða telji sig eingöngu áfram. Í fyrstu telur barnið á fingrum sér eða munnlega. Lausnaleiðir við einfalda samlagningu þróast frá því að telja allt, í að telja áfram frá annarri tölunni, oftast þeirri hærri. Geary bendir á að á meðan á talningastiginu stendur byggist upp vitneskja í langtímaminni sem síðan er kölluð fram í vinnsluminni þegar lausnaleiðir barnsins þróast. Á seinna stiginu styður barnið sig við vitneskju úr minni. Það þekkir fjölda, bútar dæmi niður í þekktar stærðir, t.d. 6 + 7 verður 6 + 6 + 1 eða dregur fram þekkingu úr langtímaminni og kemur með svar án þess að hika.

Geary skoðaði lausnaleiðir barna með sértæka námserfiðleika í stærðfræði og bar saman við viðmiðunarhóp. Niðurstaða hans var að börn með sértæka námserfiðleika í stærðfræði noti sömu lausnaleiðir og viðmiðunarhópurinn en aftur á móti var einkennandi að þau kalla ekki fram þekkingu úr langtímaminni þegar unnið er með einfalda samlagningu. Það virðist sem þessi hópur haldi sig við talningastigið. Niðurstöður Geary eru þær að orsaka sértækra námserfiðleika í stærðfræði sé að leita í skerðingu á virkni vinnsluminnis eða langtímaminnis (Geary, Hoard, Nugent, og Byrd-Craven, 2007).

Brian Butterworth er ekki sammála Geary og hafnar því alfarið að vandinn liggi í vinnsluminni eða langtímaminni. Hann telur rót vandans liggja í því að meðfæddur hæfileiki einstaklings, til að skynja og vinna með fjölda, sé skertur. (Butterworth og Reigosa, 2007). Butterworth hefur fundið að talnablindir einstaklingar eru marktækt lengur að áætla fjölda og bera saman stærðir en þeir sem ekki eru talnablindir.

Stanislas Dehaene hefur unnið með rannsóknir á starfsemi heilans og greinir frá taugastöðvum í vinstra og hægra hvirfilblaði sem verða virkar við talnavinnu. Hann telur talnaskynjun og rýmisskynjun nátengda og hefur sett fram þá skoðun að talnaskilningur sé upprunninn frá aðskildum heilastöðvum sem tengjast málstöð og rýmisskynjun. Dehaene talar um tvo aðskilda þætti í talnaskynjun; áætlun*(e.approximation)* og nákvæmni *(e. exact)* (Dehaene, 1997).

Þó rannsóknir á stærðfræðierfiðleikum séu mun styttra á veg komnar en rannsóknir á lestrarerfiðleikum hefur margt áunnist og áhugavert að fylgjast náið með skrifum fræðimanna um þetta efni. Robert Siegler, bandarískur fræðimaður er kom til Íslands haustið 2009 og hélt fyrirlestur á Norsma5 telur að hér sé um að ræða upphaf að nýju fræðasviði er fjalli um stærðfræðierfiðleika (Siegler, 2007). Vonandi verða þetta orð að sönnu, að taugasálfræðingar, fræðimenn á sviði stærðfræðimenntunar og sérkennslu og kennarar sameini krafta sína á einu sviði.

„Þrisvar sinnum taflan var algjör martröð"

Viðmælendurnir voru á breiðu aldursbili. Með því að velja eldri viðmælendur sem ekki væru lengur í námi var vonast til að fá skýrari línur í frásagnirnar. Þeir voru ekki lengur hluti af skólaumhverfinu og gátu rætt um reynslu sína úr nokkurri fjarlægð. Þó hver frásögn væri einstök var margt sameiginlegt með þeim. Allir viðmælendur fjölluðu á sinn hátt um líðan, viðhorf og kennsluhætti. Hjá þeim öllum kom sterkt fram að þeir töldu skilning á náminu mikilvægan. Frásagnirnar ollu tilfinningalegu róti hjá viðmælendum. Þeir töluðu um erfiða upplifun af kennslustundum og prófum í stærðfræði. Fram kom að skilningur og þekking kennara á erfiðleikunum var lítill. Skilningur hjá nánustu fjölskyldu var mestur þar sem samskonar erfiðleikar voru þekktir innan fjölskyldunnar.

Viðmælendurnir voru fimm og voru nefndir Arna, Bjarni, Kata, Davíð og Einar. Einar var lesblindur og lýsti því vel hvernig hann tengir erfiðleika sína í stærðfræði við þau einkenni lesblindu að hugsa í myndum. Hann segir frá því að ef hann geti ekki gert sér mynd af því sem hann fjallar um í stærðfræðinni geti hann ekki munað það.

> *Það er eitt einkenni á lesblindu að hugsa í svona myndum frekar en orðum. Abstrakt texta á ég mjög erfitt með að muna og það á sömuleiðis við um stærðfræði, ef ég er að hugsa um stærðfræðidæmi og ég get gert mynd af því í huganum þá sé ég hvernig ferlið virkar og það verður rökrétt í huganum á mér. Þannig gat ég lært algebru.*

Hann segir síðan frá reynslu sinni af hornafræði í framhaldsskólanum.

> *Við fórum að fara í stærðfræði sem ég gat ekki búið mér til mynd af í huganum, af því að það gat enginn útskýrt það fyrir mér, til dæmis hvað gerist þegar ég ýti á kosínustakkann, hvert er ferlið? Það gat enginn sagt mér það. Aðeins sagt: „Þú átt að ýta á kosínustakkann, þú átt að læra aðferðina. Gera svona og svona og ýta á þennan takka“. En hvernig er ferlið? Hvernig er myndin? Það eru engar myndir. Þetta er bara einhver aðferð að ýta á einhvern takka. Þannig að þetta voru bara dæmi sem voru mér óskiljanleg. Ég gat ekki hugsað þau, gat ekki séð þau.*

	ERIC L:S	PubMed L:S
1956 – 1965	**10:0**	**11:0**
1966 - 1975	**100:1**	**185:1**
1976 - 1985	**36:1**	**61:1**
1986 - 1995	**22:1**	**15:1**
1996 -2005	**14:1**	**18:1**

Tafla 1 Hlutfall milli fjölda rannsókna á lestrarerfiðleikum (L) og rannsókna á stærðfræðierfiðleikum (S) sem hafa verið birtar á ERIC og PubMed.

ERIC = Education Resources Center
PubMed = leitarvél fyrir greinar birtar hjá „National Library of Medicine“ og „National Institutes of Health“

Arna og Kata lýstu erfiðleikum við að muna tölur en áttu báðar auðvelt með að skilja rúmmáls- og flatarmálsreikning. Örnu var minnisstætt hvað henni fannst margföldunartaflan hræðileg.

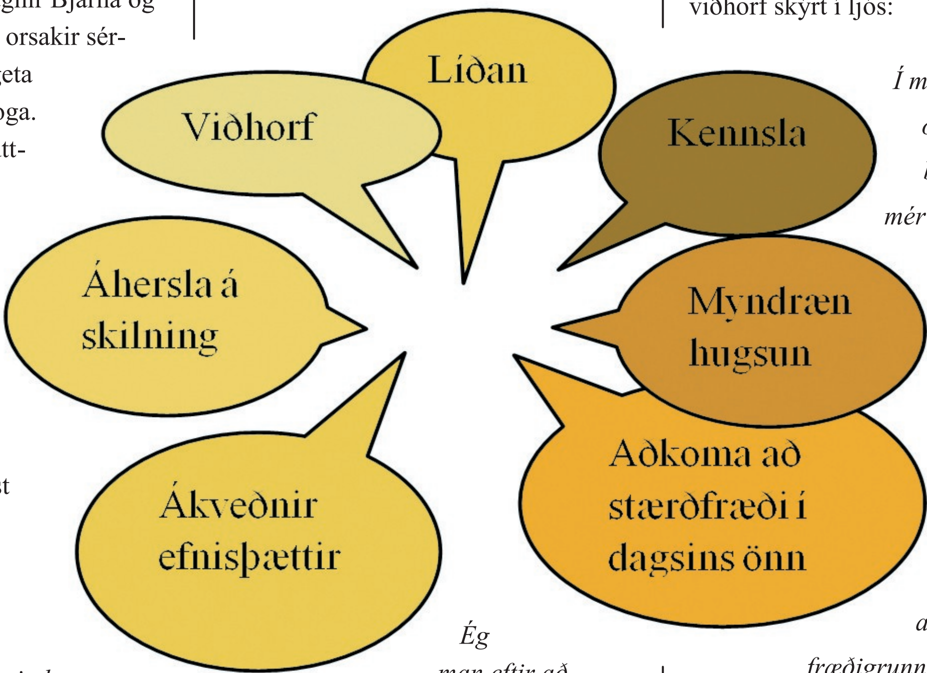
Hún gat lært tvisvar og fjórum sinnum töflurnar og fimm sinnum taflan gekk nokkurn veginn. Þrisvar sinnum taflan var henni aftur á móti „*algjör martröð*“ og sjö sinnum taflan sem „*ókleifur múr*“. Þegar Arna ræddi baráttu sína við margföldunartöflurnar kom í ljós að myndræn skynjun er undirstaðan á talnaskilningi hennar. Hún sér fyrir sér tölurnar sem kubbalaga massa sem raðast saman. Í tvisvar og fimm sinnum töflunum raðast „tölumassarnir“ reglulega upp. En þrisvar og sjö sinnum töflurnar voru of óreglulegar til að hún gæti ráðið við þær. Hjá Kötu er það einnig myndræn hugsun sem er undirstaðan við að muna margföldunartöflurnar. Ef hún þarf að finna hvað til dæmis 5*7 er mikið þá er eins og hún „renni augunum“ eftir línum margföldunartöflunnar sem hún ber sem mynd í minninu.

Annað er upp á teningnum þegar kemur að rými og flatarmálsfræði. Arna og Kata tala báðar um að það hafi verið auðvelt og skemmtilegt. Arna segist hafa séð fyrir sér hvernig flatarmálsfræðin virkaði og nefnir sem dæmi cosínus, sínus, vektora og reglu Pýþagórasar.

Þessu var öfugt farið hjá þeim Bjarna og Davíð. Þeir nefndu engin vandræði með tölur en hins vegar erfiðleika með rúmmál og flatarmálsfræði. Rýmisskynjun er þeim báðum erfið. Þeir tala báðir um að þeir eigi erfitt með að skynja stærð rýmis og útreikningar séu erfiðir. Bjarni talar um að hann geti vel lært formúlurnar utan að en geti til dæmis ómögulega séð hvernig reikna á út flatarmál og rúmmál óreglulegra forma. Erfiðleikar þeirra með stærðfræðina komu einnig seinna í ljós en hjá þeim Örnu og Kötu. Davíð er á fyrsta ári í framhaldsskóla og segir svo frá:

> *Ég átti bara auðvelt með stærðfræðina fyrstu fjóra bekkina í grunnskóla, var þá ekkert að óttast neitt. Svo í 5., 6. og 7. bekk varð þetta aðeins erfiðara en samt ekki neitt ómögulegt, en síðan í 8. bekk þá fór allt í einu að verða óþægilegt að fara í stærðfræðitíma. Ég fékk oft höfuðverk.*

Þegar frásagnir Örnu og Kötu eru bornar saman við frásagnir Bjarna og Davíðs virðist ljóst að orsakir sértækra námserfiðleika geta verið af mismunandi toga. Á þetta hefur Brian Butterworth bent og vísaði þá til sinna eigin rannsókna og rannsókna Stanislas Dehaene (Butterworth og Reigosa, 2007). Sértækir námserfiðleikar gætu því flokkast til dæmis í talnablindu og rýmisblindu.



Líðan

Í bókinni *Tilfinningagreind* fjallar Daniel Goleman um áhrif tilfinninga á nám og hugsun. Þar kemur fram að sterkar tilfinningar, svo sem kvíði og reiði, geti truflað starfsemi vinnsluminnis og afleiðingin verður sú að geta til skýrrar hugsunar og náms skerðist verulega. Nemendur sem eru kvíðnir, reiðir eða þunglyndir læra ekkert. Fólk sem situr fast í slíkri gildru tekur ekki við upplýsingum eða vinnur úr þeim svo gagn sé að (Goleman, 1995/2000).

Brian Butterworth greinir frá rannsókn, gerðri í Bretlandi, þar sem talað er við hóp níu ára nemenda með sértæka námserfiðleika í stærðfræði (*e. dyscalculia*). Nemendurnir eru spurðir um líðan þeirra í stærðfræðitímum. Fram kemur að þeim líður illa, eru óöruggir og finnst að þeir séu heimskir (Butterworth og Yeo, 2004).

Í frásögnunum viðmælenda minna kom fram að afleiðingin af erfiðleikum í stærðfræðinámi var hræðsla við stærðfræði og kvíði. Fyrsta minning Örnu tengd stærðfræði var að hún sat grátandi heima yfir margföldunartöflunni. Síðan segir hún:

> *Ég man eftir að þegar ég átti að geyma í samlagningu, það var alveg hræðilegt. Ég bara einhvern veginn taldi mig áfram, bjó mér til kerfi. Mér fannst ég aldrei geta neitt í reikningi þannig að mín upplifun í reikningi var alveg hræðileg.*

Neikvæðar tilfinningar geta birst í líkamlegum einkennum. Davíð segir til dæmis svo frá „Bara þegar ég sé eitthvað dæmi fæ ég hausverk og svima og líður illa“. Allir viðmælendurnir töluðu um vaxandi kvíða fyrir stærðfræðitímum og að með tímanum fór þeim að líða illa í kennslustundum. Mikill prófkvíði sem einskorðast við stærðfræðina gerði vart við sig. Allir höfðu frá slíku að segja, jafnvel þó þeir bæru engan kvíða fyrir prófum í öðrum fögum.

Kennsluhættir

Bjarni ræddi um nauðsyn þess að skilja stærðfræðina til að geta lært hana. Þegar hann var spurður um skoðanir á því hvernig hægt hefði verið að gera öðruvísi í kennslu til að koma til móts við hann kemur þetta viðhorf skýrt í ljós:

> *Í mínu tilviki hefði örugglega verið betra að leyfa mér pínulítið að fara mínar eigin leiðir. Ég þarf tíma til skoða, spá og spekúlera. Ég held að ef ég hefði fengið að byggja stærðfræðigrunninn á mínum styrkleika þá hefði ég upplifað stærðfræðina skemmtilega, eins og mér þóttu tungumálin, mér fannst ótrúlegt að geta sagt sama hlutinn á tvo vegu, ensku og íslensku. Ég man þegar ég uppgötvaði það, en í stærðfræðinni var það alltaf, nei þú átt ekki að gera þetta svona, heldur svona.*

Davíð nefndi annað atriði sem tengist skilningi. Hann nefndi að allt of lítill tími gæfist til að skilja og tileinka sér ný efnisatriði, því dæmin væru strax orðin flókin.

> *Þegar grunnatriðin eru sett fram, þá eru tekin tvö til þrjú dæmi og maður skilur þau alveg. Síðan er maður strax settur í eitthvað flóknara og það er eins og það sé búist við því að maður nái þessu strax í fyrstu þrjú skiptin og strax farið í flóknari dæmi.*

Kennsluhættir hafa áhrif á það hvernig nemendum með sértæka námserfiðleika vegnar og þar af leiðandi getur kennslan haft áhrif á líðan og hegðun nemenda. Rannsóknir á stærðfræðierfiðleikum eru marktækt styttra á veg komnar en rannsóknir á lestrarerfiðleikum. Þó er nægilega mikið vitað um erfiðleikana til að hefjast handa við að koma til móts við nemendur í vanda. Við hugsum og nemum á mismunandi hátt og þar af leiðandi verða kennsluhættir að vera fjölbreyttir til að ná til sem flestra nemenda. Þannig ætti að vera hægt að bæta líðan nemenda í vanda og byggja upp trúna á eigin getu.

Tony Attwood, sérfræðingur hjá *Dyscalculia centre* í Bretlandi, gagnrýnir hvernig aðstoð við nemendur með námserfiðleika í stærðfræði er framkvæmd. Nemendum sem eigi í erfiðleikum er kennt aftur sama efni og á sama hátt og í almennu bekkjunum, aðeins hægar. Skoðun hans er að þessi leið sé, með vissum undantekningum, ekki vænleg til árangurs. Hann telur að kenna verði stærðfræðina á nýjan og fjölbreyttan hátt (Attwood, 2009). Brian Butterworth er á sömu skoðun og Attwood. Hann bendir á að til séu nægjanlegar vísbendingar um að endurteknar æfingar á hefðbundnum talnaverkefnum hjálpi ekki talnablindum einstaklingum (Butterworth og Yeo, 2004). Hann leggur áherslu á að það sé nauðsynlegt að efla skilning á meðferð talna. Samkvæmt skoðun hans er talnablinda afleiðing af röskun á meðfæddri talnaskynjun. Í leiðbeiningum til kennara orðar Butterworth þetta þannig, að það vanti „fyrsta verkfærasettið“ fyrir talnavinnuna (Butterworth og Yeo, 2004).

Það er því mikilvægt í kennslu talnablindra einstaklinga að byggja upp skilning á tölum sem geta komið í staðinn fyrir „verkfærin“ sem vantar. Þetta verður að gera með fjölbreyttum verkefnum þar sem nemandinn er virkur í námi. Einnig verður að aðlaga hraða yfirferðar að einstaklingnum því talnablindir einstaklingar ruglast auðveldlega ef hraðinn verður of mikill. Rannsakendur víða um heim leita svara við spurningunni, hverskonar kennsluhættir í stærðfræði styðji sem best við skilning. Í bókinni *Making Sense*, sem kom út 1997, birtist sameiginleg niðurstaða hóps rannsakenda. Þetta eru átta fræðimenn frá Bandaríkjunum og Suður Afríku og þeir draga saman niðurstöður sínar af fjórum mjög mismunandi rannsóknarverkefnum (Hiebert o.fl., 1997). Þeir ganga út frá þeirri skilgreiningu að skilning nemenda megi merkja af þeim tengslum sem þeir mynda á milli hugmynda, staðreynda og aðferða. Lykilþættina í því að öðlast skilning í stærðfræði telja þeir vera íhugun og tjáningu. Nemandi íhugar til dæmis þegar hann leitar lausnarleiða í verkefnavinnu eða brýtur heilann yfir þraut. Með tjáningu er átt við að nemendur ræði saman, hlusti, skrifi, teikni, útskýri, skiptist á skoðunum og svo framvegis. Þegar kemur að námsumhverfi skólastofunnar er hópurinn sammála um fimm þætti sem hafi afgerandi áhrif. Með því að skoða þessa þætti er hægt að greina hve vel kennsluhættirnir leggi áherslu á skilning. Þættirnir eru *eðli verkefna*, *hlutverk kennarans*, *félagslegt andrúmsloft*, *aðgengileg gögn og jafnræði*.

Kjarninn í öllum þáttunum á að vera að gefa nemendum tækifæri til að íhuga og ræða saman um stærðfræði og að gefa þeim tækifæri til að byggja upp skilning (Hiebert o.fl., 1997).

Heimildaskrá

Attwood, T. (2009). Dyscalculia: Does testing help? *SEn Journal for special needs*, 34-35.

Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia screener.* London: nferNelson Publishing Company Ldt.

Butterworth, B., og Reigosa, V. (2007). Information processing deficits in dyscalculia. Í D. Berch, og M. Mazzocco, *Why is math so hard for some children?:The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (bls. 65-78). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

Butterworth, B., og Yeo, D. (2004). *Dyscalculia guidance: Helping pupils with specific learning difficulties in maths.* London: nferNelson Publishing Company Ltd.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., og Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 970-975.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., og Byrd-Craven, J. (2007). Strategy use, long-term memory and working memory capacity. Í D. B. Berch, og M. M. Mazzocco, *Why is math so hard for some children?:Nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities.* (bls. 83-100). Baltimore: Paul H.Brookes Publishing Co.

Gersten, R., Clarke, B., og Mazzocco, M. (2007). Historical and temporary perspectives on mathematical learning disabilities. Í B. Berch, og M. Mazzocco, *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (bls. 7-27). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

Goleman, D. (1995/2000). *Tilfinningagreind* (Áslaug Ragnars þýddi). Reykjavík: Iðunn.

Hiebert, J., o.fl. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: University of Wisconsin Foundation.

Siegler, R. S. (2007). Foreword: The birth of a new dicipline. Í D. B. Berch, og M. M. Mazzocco, *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (bls. xvii-xxii). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

eftir
IMKE SCHIRMACHER
Lágafellsskóla

Dagur stærðfræðinnar í Lágafellsskóla

Dagur stærðfræðinnar – hvað skal gera? Dagurinn kemur alltaf á óvart og mér finnst ég nýbúin að gera eitthvað skemmtilegt.

Þar sem ég er umsjónarkennari í 2. bekk ákvað ég að fara í talningar þetta árið. Við ætluðum að finna út hvað við erum með marga LEGO kubba í kennslustofunni okkar. Til að byrja með reyndum við að giska á fjöldann. Nemendurnir voru ekki smeykir við það og fljótt komu tölur eins og 137, 400, 87 eða 600. Merkilegt er að enginn giskaði á meira en 1000, en það staðfestir að við erum ekki búin að „uppgötva“ talnasvið 1 - 10.000. Þúsund var hæsta talan sem við miðuðum við en það er mjög eðlilegt fyrir þennan aldurshóp. Við skrifuðum tölurnar á töfluna og reyndum svo að gera okkur í hugarlund hvernig væri hægt að telja svona marga kubba.

Sturtum bara úr og teljum, var ein tillagan og gerðum við það. Nemendur pöruðu sig saman í litla hópa og byrjuðu að telja. Eftir smá stund lentu sumir nemendur í vandræðum. Því allt í einu hætti talningin. *Hundraðtuttugu og tíu*, heyrðist mér einn nemandinn segja. *Nei, þessi tala er ekki til*, var svarað. Nemendurnir fóru að ræða saman um hvaða tala kæmi á eftir hundrað tuttugu og níu. Útskýringar þeirra voru miklu betri en mínar. Nemendurnir töluðu saman á sínu máli. Tugakerfið skildist.

Samt voru þetta svo margir kubbar og engin alvöru talnaáætlun komin. Þetta var mjög fróðlegt að horfa á og eftir 15 mínútur stoppuðum við og fórum að tala saman. *Hvernig gengur?* spurði ég. *Vel*, sögðu sumir, *ekkert vel*, sögðu aðrir. *Hvað gengur ekki vel? Að telja, hver vinnur fyrir sig*, svaraði einn. *Og ég er alltaf að ruglast*, svaraði annar. Nú voru góð ráð dýr. Eftir nokkurra mínútna umræður fundum við lausnina. Sameiginlega ákváðum við að setja alltaf 10 kubba saman og nota svo 10 sinnum töfluna. Einn snillingur hugsaði þetta alla leið, þá eru 10 sinnum 10 hundrað og svo getum við talið hundrað, tvöhundruð o.s.frv.

Og það gerðum við. Þetta voru tvær kennslustundir í talningu og umræðum og núna vitum við hvað við eigum marga LEGO kubba í stofunni okkar: Eittþúsund fjögurhundruð þrjátíu og sjö. Við lærðum mikið um tugakerfið og tölur og helling í samvinnu.

Í kennslustofunni við hliðina var málið leyst með öðrum hætti. Þar var ákveðið að flokka fyrst alla LEGO kubbana eftir litum og byrja svo að telja. Niðurstöðum var safnað á töflu og að lokum var allt lagt saman með reiknivél.

Í 1. bekk halda nemendur Hundraðdagahátíð. Síðan þeir byrjuðu í fyrsta bekk hafa þeir talið hve marga daga þeir hafa verið í skólanum. Og loksins var stóri dagurinn runninn upp. Nemendurnir bjuggu til gleraugu og kramarhús og fengu tíu stykki af tíu mismunandi nammitegundum í kramarhúsið sitt. Þetta var síðan borðað á meðan nemendur horfðu á mynd.

Á miðstigi undirbjuggu nemendur sunnudagssteikina. Þeir fundu uppskrift og þurftu svo að fara út í búð til að kanna verðið á hráefninu. Þeir reiknuðu síðan út hvað sunnudagssteikin kostaði.

eftir **LAUFEYJU EINARSDÓTTUR**
kennara í Kelduskóla - Korpu

Vekjaraklukkan hringir! Þú slekkur á henni um leið og þú snýrð þér á hina hliðina og óskar þess að það sé laugardagur. En þá manstu allt í einu eftir spennandi verkefnunum sem eru framundan í stærðfræði - Stærðfræðinni í morgunsárið. Þú stekkur fram úr heitu rúminu með eftirvæntingu og setur upp stærðfræðigleraugun. Í baðherberginu brosir spegillinn til þín á meðan þú athugar hvort þú hafir nokkuð fengið bólur í andlitið um nóttina. Þú burstar tennurnar og ímyndar þér hversu skemmtilegt það væri að athuga hvað þú getur búið til langa tannkremsrönd ef þú myndir þrýsta öllu tannkreminu úr túbunni. Þú gleymir þér síðan í heitri sturtunni - hey, hvað notaðir þú eiginlega mikið vatn?

Á síðustu námstefnu Flatar fjallaði Mikael Skånstrøm, aðjúnkt við kennaraháskólann í Nørre Nissum í Danmörku, m.a. um líkön í stærðfræðinámi og -kennslu. Þegar stærðfræði er notuð til að skilja, meta og vinna úr raunverulegum upplýsingum eða aðstæðum er verið að vinna með stærðfræðileg líkön. Markmiðið með því að nota stærðfræðileg líkön í kennslu er fyrst og fremst það að nemendur átti sig á tengslum stærðfræðinnar og umhverfisins; að nemendur upplifi þessi tengsl á áþreifanlegan hátt með því að beita stærðfræðihugtökum og nota stærðfræðilega framsetningu til að lýsa raunverulegum aðstæðum og geti þannig dýpkað skilning sinn.

Frásögnin hér í byrjun er kveikja að vinnu með stærðfræðileg líkön sem Mikael, ásamt Morten Blomhøj lektor við Roskilde Universitet, hefur lagt fyrir nemendur á unglingastigi. Mikael vekur athygli nemenda sinna á að stærðfræði er líka að finna í klukkunni, veðrinu, herberginu, morgunmatnum, hjólaferðinni og mörgu fleiru sem unglingar fást við á morgnana. Nemendur eiga að skrá á nákvæman hátt það sem þeir sjá með stærðfræðigleraugum sínum frá því þeir vakna þar til þeir mæta í skólann. Þeir eiga að nota stærðfræði til að vinna úr athugunum sínum og setja upplýsingarnar fram á skilmerkilegan og aðlaðandi hátt á veggspjald. Hér á eftir koma tvö dæmi um glímu nemenda við slík verkefni.

Tannkremstúban

Lærke ákveður að skoða tannkremstúbuna nánar. Hve oft ætli sé hægt að bursta tennurnar með tannkremi úr einni túbu og hvað ætli sé hægt að gera langa tannkremsrönd ef maður ýtir öllu tannkreminu út í einu. Þetta ætlar Lærke að athuga. Hún tekur eftir að það eru 75 ml í einni túbu. Hún hefur teiknað nokkrar myndir og reynir að skrá leið til að finna rúmmál eins skammts af tannkremi. Hún byrjar að ýta einum skammti úr túbunni og spyr kennarann:

Lærke: Hvað á ég að mæla?

Kennarinn: Hvað er það sem þú ert að leita að?

Lærke: Hvað það er mikið tannkrem í svona rönd – einum skammti?

Kennarinn: Hvaða form er þetta?

Lærke: Form? ... Þetta er sívalningur.

Kennarinn: Hvað þarftu að vita til að geta reiknað rúmmál sívalnings?

Lærke: Er það ekki eitthvað með h sinnum pí og r í öðru veldi?

Kennarinn: Jú, en hvað er h og r miðað við tann-kremsskammtinn þinn?

Lærke: h er hæðin – nei, það hlýtur að vera lengdin og r er geislinn, en hvernig mæli ég hann?

Kennarinn: Prófaðu með reglustiku (kennarinn fer).

Lærke byrjar strax að mæla. Hún finnur út að lengd skammtsins er 1,5 cm. Hún reynir að mæla geislann en þar sem það reynist henni erfitt ákveður hún að mæla þvermálið frekar. Hún sker lóðrétt snið í tannkremsröndina með reglustikunni og mælir bæði þvermál hennar og gatsins á túbunni. Eftir nokkrar mælingar ákveður hún að þvermál eins skammts af tannkremi sé 0,7 cm. Geislinn er þá 0,35 cm. Hún skrifar niður regluna fyrir rúmmál sívalnings: $R = \pi \cdot r^2 \cdot h$ og slær síðan upplýsingarnar inn í reiknivél. Hún fær niðurstöðuna $\pi \cdot 0{,}352 \cdot 1{,}5 = 0{,}6\ cm^3$. Lærke ræðir aðeins við bekkjarfélaga um athugun sína og skrifar svo niður 1 ml = 1 cm^3. Síðan reiknar hún út hvað tannkremið dugar í marga skammta á þennan hátt 75 ml : 0,6 ml = 125 skammtar. Það kemur henni á óvart hvað þetta eru margir skammtar og hún kallar á kennarann því hún heldur að hún hafi gert mistök. Í sameiningu komast þau að þeirri niðurstöðu að samkvæmt útreikningum Lærke notar fjögurra manna fjölskylda eina tannkremstúbu á 15 dögum. Lærke finnst það hljóma sennilega. Kennarinn hvetur nú Lærke til að athuga hvað sé hægt að kreista langa tannkremsrönd úr einni túbu. Lærke setur 75 cm^3 inn í rúmmálsregluna, leysir fyrir h og finnur út með hjálp reiknivélarinnar að h er 195 cm. Það er örugglega hægt að fá lengri rönd ef maður passar sig að hafa hana mjög þunna hugsar Lærke og langar til að prófa sjálf.

Sturtan

Nokkrir nemendur hafa á mismunandi hátt fundið út hversu mikið vatn þeir notuðu í morgunsturtunni. Morten setti fötu undir sturtuna í eina mínútu og mældi síðan vatnsmagnið í fötunni. Það reyndust vera 6 lítrar af vatni í fötunni. Hann hefur skráð að hann sé 10 mínútur í sturtu og noti því 60 lítra af vatni. Kennarinn kemur til hans og þeir ræða um mælingarnar.

Kennarinn: Lætur þú ekki vatnið renna aðeins áður en þú ferð í sturtuna til þess að hita það?

Morten: Jú, það tekur um það bil hálfa mínútu.

Kennarinn: Prófaðu að mæla það líka á morgun. Ef þú bíður í hálfa mínútu, hversu mikið vatn notar þú þá samtals í sturtunni.

Morten: 63 lítra.

Kennarinn: Getur þú búið til töflu sem sýnir hve mikið vatn þú notar, allt eftir því hversu lengi þú ert í sturtunni? (Kennarinn fer.)

Eftir um það bil 10 mínútur hefur Morten búið til töflu sem sýnir vatnsnotkunina fyrir 1-20 mínútur. Morten útskýrir að hann hafi bætt 6 lítrum við fyrir hverja mínútu og að fyrstu mínútuna séu notaðir 9 lítrar. Kennarinn hvetur hann til að teikna samhengið í graf. Morten gerir það (sjá myndrit á næstu bls.).

Kennarinn: Getur þú líka sett fram reiknireglu til að finna vatnsnotkunina eftir því hvað þú ert lengi í sturtu?

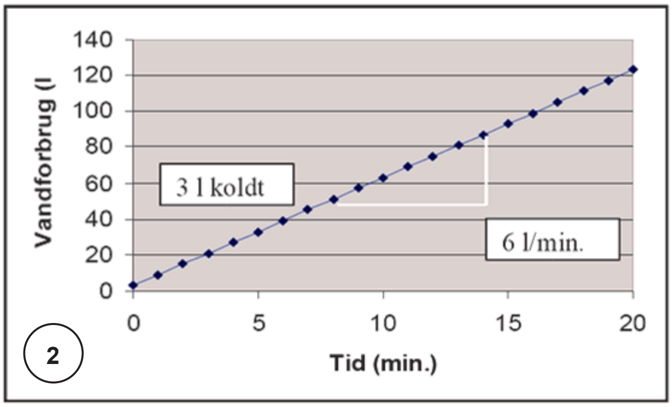
Morten: Hvað áttu við ... maður margfaldar með 6 og leggur 3 við.

Kennarinn: Já, það er rétt. Ef þú lætur tímann vera x og vatnsnotkunina y, geturðu þá búið til reiknireglu eða jöfnu?

Eftir nokkrar mínútur og smá hjálp frá kennaranum hefur Morten sett fram eftirfarandi reglu: $y = 6 \cdot x + 3$. Hann prófar regluna fyrir mismunandi mínútufjölda og hún virkar! Morten er ánægður með regluna og er afar móttækilegur fyrir nýjum hugtökum, s.s. jöfnu, hallatölu og skurðpunkti við y-ás, í samræðum við kennarann. Morten setti töfluna, grafið og jöfnuna á veggspjaldið sitt ásamt góðum útskýringum á breytum og niðurstöðum. Að síðustu stingur kennarinn upp á að Morten íhugi hvort hann vilji auka eða minnka hallatöluna næst þegar hann fari í sturtu. Morten hlær og segir: en þá passa útreikningarnir ekki lengur.

Að sögn Mikaels og Mortens voru nemendurnir mjög uppteknir af því að leysa ákveðin vandamál eða lýsa ákveðnum aðstæðum með hjálp stærðfræðinnar. Þeir benda einnig á að samræður á milli kennara og nemenda hafi verið áberandi í vinnuferlinu. Það gerði kennurunum kleift að styðja við og hafa áhrif á nám nemendanna auk þess sem þá gafst tækifæri til að styrkja hugtakaþekkingu þeirra í stærðfræði. Yfirleitt voru það nemendurnir sem áttu frumkvæðið að samræðunum og oft þurftu kennararnir ekki að gera annað en að spyrja einfaldra spurninga til að aðstoða eða ýta undir ítarlegri úrvinnslu nemenda á viðfangsefnunum. Þetta má einmitt sjá í samræðum kennara við Lærke og Morten hér á undan. Nemendur höfðu auk þess mikinn áhuga á að ræða verkefnin nánar þegar þeir höfðu lokið við að vinna þau.

Þátttakendur á vinnustofu Mikaels á námstefnu Flatar fengu einnig að spreyta sig á því að finna út hve oft væri hægt að bursta tennurnar með tannkremi úr einni tannkremstúbu. Niðurstöðurnar urðu mismunandi eftir hópum m.a. vegna þess að forsendur á magni tannkrems fyrir hvert skipti tannburstunar voru ekki þær sömu og mátti heyra á sumum þátttakendum að nú ætti sko að spara tannkremið með því að minnka skammtinn! Að lokum voru niðurstöðurnar að sjálfsögðu prófaðar með því að tæma úr tannkremstúbunum.



MYND 1 Nemendur horfa á umhverfi sitt með stærðfræðigleraugum. **MYND 2** Myndrit Mortens í Excel.
MYND 3 Veggspjald Lærke.

Einn af kostum þess að gefa nemendum tækifæri til að glíma við stærðfræðileg líkön er að allir geta tekið þátt og unnið út frá eigin forsendum og áhugasviði. Nemendur Mikaels og Mortens sýndu góða samvinnu og voru duglegir að biðja um aðstoð og álit kennara. Að íhuga, prófa, rökstyðja, ræða um og vinna úr upplýsingum á skipulagðan hátt var ekki aðeins nauðsynlegur heldur einnig eðlilegur hluti af vinnu nemenda. Þannig gátu nemendur rætt saman á faglegan hátt um eitthvað sem skipti máli og kennarinn fékk betri innsýn í getu og viðhorf nemenda til stærðfræði.

Grein þessi er lauslega þýdd úr Matematik Morgener - et udviklingsarbejde eftir Morten Blomhøj og Mikael Skånstrøm. Nánari upplýsingar um umfjöllun þeirra á stærðfræðilegum líkönum og vinnu nemenda má m.a. finna á eftirfarandi vefslóðum, en verkefni sem eru byggð á hugmyndum þeirra er einnig að finna í námsefninu *8-tíu:4*.

- http://www.mikaelskaanstroem.dk/Matematikmorgener.pdf
- http://flotur.ismennt.is/namstefna/Námstefna%202011/Gögn%20af%20námsstefnu%202011/Mikael%20Skånström.pdf
- http://mikaelskaanstroem.dk/

Á döfinni ...

Sem fyrr vekjum við athygli á áhugaverðum viðburðum í heimi stærðfræðinnar. Á vefnum ncm.gu.se/konferenser er að finna lista yfir áhugaverða viðburði.

ICME 12 - þingið

> Seoul, Kóreu, 8. - 15. júlí

ICME (International Congress on Mamatical Education) er alþjóðlegt þing samtakanna ICMI (International Commission on Mathematics Instruction). Þingið er haldið á fjögurra ára fresti.

Þingið er opið öllum sem hafa áhuga á stærðfræðimenntun; þ.e. fræðimönnum, kennurum, háskólanemum og almenningi. Allir geta fundið eitthvað við sitt hæfi á fyrirlestrum, í umræðuhópum og á sýningum.

> Vefur: **icme12.org**

Nóvemberráðstefna Matematikksenteret 2012 - et fag i utvikling

> Noregi, 28. - 29. nóvember

Félagar Flatar hafa fengið boð á ráðstefnuna *Stærðfræði - námsgrein í þróun* í Noregi. Hún verður við *Matematikksenteret* sem er norskt setur fyrir stærðfræðikennslu. Það er meðal þeirra kröftugustu á Norðurlöndum og ráðstefnan er norræn, með bæði erlendum fyrirlesurum og framlagi frá norskum kennurum. Hægt er líka að bjóða fram erindi.

Hlutverk setursins er að leiða og samhæfa þróun nýrra og betri vinnubragða og aðstæðna fyrir stærðfræðinám í leikskóla, grunnskóla, framhaldsskóla, fullorðinsfræðslu og kennaramenntun.

> Vefur: **matematikksenteret.no**

Námstefna Flatar 2012

> Hótel Selfossi, 28. - 29. sept.

Dagskrá námstefnunnar er óðum að taka á sig mynd og sem fyrr sækja áhugaverðir fyrirlesarar okkur heim og deila reynslu sinni og þekkingu með Flatarfólki og öðrum áhugasömum.

Allir að taka helgina frá!

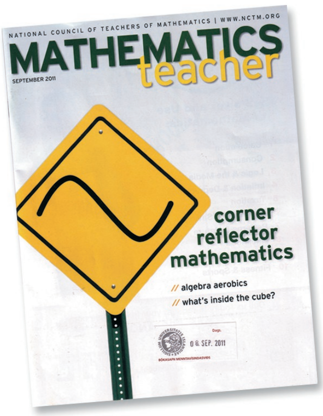
> Vefur: **flotur.ismennt.is**

Áhugaverð stærðfræðitímarit

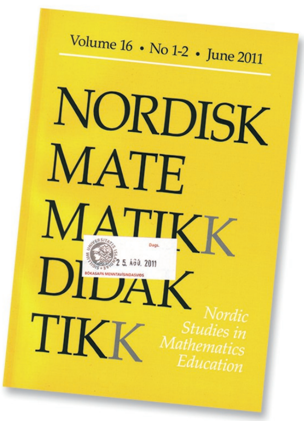
Kennurum er nauðsynlegt að viðhalda og bæta við þekkingu sína í stærðfræði og kennslufræði hennar. Töluvert framboð er af góðum stærðfræðitímaritum ætluðum kennurum.

Bókasafn Menntavísindasviðs HÍ kaupir fjölmörg áhugaverð stærðfræðitímarit. Í tímaritunum Mathematics teachers, Nordisk Matematikk Didaktikk, Tangenten og Teaching children mathematics er margt áhugaverðra greina.

Á vefslóðinni **tdnet.com/NULI** er að finna öll tímarit (A-Ö) sem Menntavísindasvið HÍ og Landsbóka - Háskólabókasafn kaupa í séraðgangi (einungis opin á háskólanetinu). Tímarit í rafrænum landsaðgangi (Hvar.is) eru opin öllum á Íslandi.

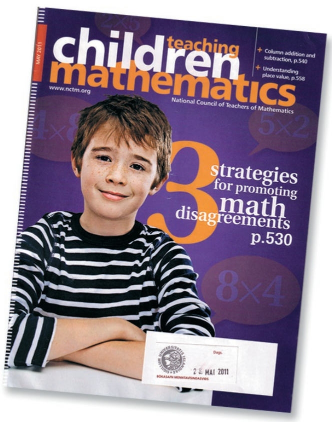


Titill Mathematics teacher **Útgefandi** Association of Teachers of Mathematics, Derby, England **Keypt** 1980 - 2011 **Rafrænt** í Landsaðgangi á hvar.is og í Gegni frá 2002



Titill Nordisk matematikkdidaktikk **Útgefandi** Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborg **Keypt frá** 1993

Titill Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning **Útgefandi** Caspar, Landås **Keypt frá** 1990



Titill Teaching children mathematics **Útgefandi** National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA **Keypt frá** 1994

NÁMSTEFNA, GLERAUGU OG NETLEIKIR

Vorið 2011 var gerð skoðanakönnun meðal félagsmanna Flatar um námstefnuna sem haldin hefur verið undanfarin ár. Niðurstöðurnar sýndu ótvírætt að félagsmenn vildu að námstefnan væri áfram á haustin og það á Selfossi. Einnig var spurt um hvað þætti mest spennandi á svona námstefnum. Tvennt stóð uppúr í þessu tilliti. Annars vegar heimsókn erlendra sérfræðinga og hins vegar vinnustofur um kennsluaðferðir. Þetta var allt haft til hliðsjónar þegar námstefnan var skipulögð.

Námstefnan var haldin seinna en vanalega þar sem Hótel Selfoss var bókað fyrstu helgina í október auk þess sem Menntavika Menntavísindasviðs var haldin á sama tíma. Næstu helgar á eftir rákust á haustfrí skólanna þannig að færa þurfti hana til fyrstu helgarinnar í nóvember. Erlendir gestir voru tveir að þessu sinni, þeir Mikael Skånström frá Danmörku og Bharath Sriraman frá Bandaríkjunum.

Mikael Skånström var aðalfyrirlesari námstefnunnar en hann er þekktur fyrir „stærðfræðigleraugun" sín þar sem kennarar eru hvattir til að fá nemendur til að líta á heiminn með stærðfræðisýn. Mikael heldur því fram að rífa megi stóran hluta úr stærðfræðibókum og henda. Í staðin eigi að skoða hversdagsleg fyrirbrigði úr umhverfinu með stærðfræðigleraugum. Mikael var einnig með tvær vinnustofur um líkanasmíð í stærðfræði (mathematical modeling) þar sem þátttakendur áttu að skoða eitthvað úr umhverfi sínu.

Bharath Sriraman, Guðbjörg Pálsdóttir og Ósk Dagsdóttir voru með vinnustofu um mikilvægi þess að kennarar gefi nemendum tækifæri og frelsi til að skapa og njóta gáfna sinna.

CCP var með mjög áhugaverðan fyrirlestur um Eve Online. Pétur Óskarson fjallaði um samfélagið í Eve og um það hvernig þessi sýndarheimur endurspeglaði vel raunverulegan heim. Til að mynda hafa háskólanemendur í hagfræði framkvæmt tilraunir með hagfræðilíkön í leiknum. Svo var einnig fjallað um stærðfræðina á bak við tölvugrafík leiksins.

Ingólfur Gíslason og Valgarð Jakobsson voru með þrjár vinnustofur. Ingólfur var með vinnustofu í samvinnunámi þar sem unnin voru verkefni eftir (og í anda) Malcolm Swan. Ingólfur og Valgarð voru með vinnustofu í GeoGebru og kynntu verkefni þar sem nemendur kynnast fallhugtakinu með líkanasmíð í tölvum.

Að lokum kynnti Valgarð spilið mínibrids sem notað er við stærðfræðikennslu á miðstigi víða í Evrópu. Mínibrids er einfölduð útgáfa af hefðbundnum brids þar sem samvinna er höfð í fyrirrúmi.

Sigrún Lilja Guðbjörnsdóttir kynnti kenningarramma PISA og var með vinnustofu þar sem þátttakendur fengu að spreyta sig á hagnýtum verkefnum.

Ingileif Ástvaldsdóttir var með vinnustofu í útikennslu. Þátttakendur fengu kynningu á námsefninu *Undir berum himni* og kennslufræði þess. Námsefnið samanstendur af kennarahandbókum með verkefnum fyrir nemendur 1.-7. bekkjar grunnskóla. Síðan var farið út þar sem þátttakendur fengu að spreyta sig á verkefnum sjálfir og veltu vöngum yfir því hvaða stærðfræði var að finna í verkefnunum sem unnin voru.

Að lokum skal telja umræðustofu undir stjórn Meyvants Þórólfssonar um breytingar á **námsmati í aðalnámskrá grunnskóla** og hvaða áhrif það hefur á stærðfræðikennslu. Þessu tengt má minnast á að á síðasta aðalfundi Flatar var stofnaður vinnuhópur undir stjórn Jónínu Völu Kristinsdóttur sem er að skoða stærðfræðihluta hinnar nýju aðalnámskrár.

Á laugardagskvöld var svo sameiginlegur kvöldverður þar sem slegið var á létta strengi. Eftir fundinn var okkur boðið á dansleik þar sem tjúttað var frameftir. Það var samdóma álit stjórnar að þátttakendur hafi verið ánægðir með námstefnuna síðasta haust og það styrkir okkur í því að halda þessu starfi áfram.

Námstefna Flatar 2012 verður haldin helgina 28.-29. september næstkomandi á Hótel Selfossi. Takið helgina frá!

- Valgarð Jakobsson

Ný stjórn Flatar á námstefnunni *Imke Schirmacher* ritari, *Valgarð Már Jakobsson* formaður, *Ásta Ólafsdóttir* gjaldkeri, *Kristján Einarsson* vefumsjónarmaður og *Erla Þórey Ólafsdóttir* meðstjórnandi.

áhugaverðir stærðfræðivefir
matematikk.org

eftir
NÖNNU Þ. MÖLLER
grunnsk.kennaranema

MATEMATIKK.ORG er norskur stærðfræðivefur sem er samvinnuverkefni nokkurra háskóla í Noregi. Á þessum vef er að finna marga stærðfræðileiki og -verkefni sem og upplýsingar og hugmyndir fyrir kennara til að nýta í stærðfræðikennslu sinni. Vefsíðan er ekki síður fyrir framhaldsskóla en grunnskóla.

Á forsíðunni er að finna tengla inn á verkefni fyrir 1.-10. bekk og líka fyrir 11. -13. bekk sem er fyrir framhaldsskólanemendur. Einnig er tengill inn á „Lærere – foresatte“ sem þýðir „kennarar og forráðamenn“ og er þar margt áhugavert og upplýsandi að finna. Ef valinn er tengillinn 1.-10. bekkur er hægt að velja um marga stærðfræðileiki. Allir leikirnir eru á ensku. Sem dæmi má nefna leik þar sem frumþátta á tölur („Sigma Prime“). Einnig má nefna einskonar „tetris“ leik þar sem unnið er með margföldunartöfluna („Gangetesteren“) og annan í svipuðum dúr með reikniaðgerðirnar fjórar („Regneregn“), almenn brot („Brøkreser“), raða tölum á talnalínu („Flower Power“) og marga fleiri.

Leikirnir á þessari síðu gefa nemendum ekki þá tilfinningu að þeir séu að læra stærðfræði því þeir eru skemmtilegir og geta verið spennandi. Í mörgum þeirra er hægt að velja fyrir hvaða árgang þeir henta og þar með er hægt að stjórna þyngdarstiginu. Á vefsíðunni er einnig að finna ýmis veggspjöld með stærðfræðireglum og útskýringum undir „Plakater“ neðst á valmyndinni til hægri. Mögulegt er að prenta þau út og hengja upp í skólastofunni.

Ef valinn er tengillinn 11.-13. bekkur er að finna ýmis verkefni og upplýsingar. Þar er boðið upp á sjálfspróf úr hinum ýmsu námsþáttum, s.s. algebru, diffurjöfnum, rúmfræði o.fl.

(„Matteknekker'n“). Þessi sjálfspróf henta einnig vel nýstúdentum sem íhuga háskólanám og vilja sjá hvar þeir standa í stærðfræði. Þar er einnig að finna æviágrip marga þekktra stærðfræðinga sem áhugavert er að kynna sér („Biografier“). Fyrir þá sem vilja kynna sér

einhvern þátt stærðfræðinnar sérstaklega er þar að finna margar greinar um allt milli himins og jarðar sem viðkemur stærðfræði („Matematiske Tekster“). Tvo síðastnefndu tenglana væri sniðugt að kynna nemendum í sambandi við þemavinnu í stærðfræði. Allir textar eru á norsku en þar sem að íslenskir unglingar læra dönsku ættu þeir að geta lesið þennan texta. Tillögur að þemavinnu má sjá undir „Tema sider“ á valmyndinni til hægri.

Svo er það tengillinn fyrir kennara og foreldra sem geymir eftirfarandi:

1. **„Spill“** - hér eru leiðbeiningar með leikjunum sem eru á síðunni.
2. **„Treningsleir“** - hér er gagnagrunnur með ýmsum verkefnum. Kennari velur fyrir hvaða bekk, þyngdarstig og svo hvað á að þjálfa og vefsíðan finnur veiðeigandi verkefni.
3. **„Karriereguiden“** - hér er hægt að fá leiðbeiningar um nám og starf. Af hverju lærum við stærðfræði? Mörg störf krefjast stærðfræðikunnáttu og hér eru mörg þeirra listuð upp.
4. **„Mia og Marius“** - Mia og Marius eru systkini sem leysa stærðfræðiverkefni á ferðalagi sínu um heiminn. Hér er að finna sögur um þau og verkefni.
5. **„Tekstnötter“** - þetta eru stærðfræðiþrautir og lausnir við þeim.
6. **„Undervisningsopplegg“** - hér er að finna hugmyndir að kennsluáætlunum og þemaverkefnum.
7. **„Matematikkvansker“** - hér er að finna upplýsingar um og ráð við stærðfræðiörðugleikum.
8. **„Foreldrekurs“** - hér eru upplýsingar fyrir foreldrana bæði til að rifja upp stærðfræði og leita ráða við hvernig þeir geti aðstoðað börn sín í stærðfræðinámi.

Ég hef ekki gert grein fyrir öllu sem finna má á vefsíðunni matematikk.org og hvet því lesendur til að skoða hana sjálfir. Mér finnst auðvelt að skilja síðuna þrátt fyrir að hún sé á norsku og ætti það því ekki aftra neinum í leit sinni.

Heimildir

Matematikk.org (2012). Det nasjonale nettstedet for matematikk. Sótt 26. jan. 2012 á http://www.matematikk.org

Nokkrar af hinum fjölmörgu sönnunum á reglu Pýþagórasar

Sannanir á reglu Pýþagórasar eru margar. Þær eru oft myndrænar og því vel til þess fallnar að vera fyrstu sannanir sem nemendum eru kynntar.

Í gegnum söguna hafa stærðfræðingar leikið sér að því að sanna reglu Pýþagórasar á einn eða annan hátt. Fyrir áhugasama má geta þess að árið 1968 var gefin út bókin *Pythagorean Proposition* eftir Elisha Scott Loomis sem inniheldur 367 **sannanir á setningu Pýþagórasar.**

Pýþagóras frá Samos

Pýþagóras (u.þ.b. 570-490 f. Kr.) er einn þekktasti heimspekingur Forngrikkja og er honum gjarnan lýst sem fyrsta stærðfræðingnum sem einungis einbeitti sér að stærðfræði en lét heimspekina vera.

Því hafði verið spáð fyrir föður Pýþagórasar að hann myndi eignast son sem skara myndi framúr öllum vegna vitsmuna sinna og andlegs atgervis. Sá faðirinn því til þess að sonur hans fengi bestu menntun sem völ var á. Spádómurinn kom fljótlega í ljós því strax á unga aldri var Pýþagóras farinn að vekja athygli og aðdáun hjá almenningi sem og heimspekingum fyrir hæfileika sína.

Pýþagóras ferðaðist víða á sínum yngri árum og viðaði að sér þekkingu hvaðanæva að. Hans helstu lærimeistarar voru allir mestu heimspekingar sem uppi voru á sama tíma og hann. Um fertugt settist Pýþagóras að í borginni Krótónu á Suður-Ítalíu. Þar stofnaði hann heimspekiskóla og bræðralag þar sem lögð var áhersla á trúariðkun, dulspeki og vísindi. Á vísindasviðinu stunduðu menn talnafræði, rúmfræði, tónlist og stjarnfræði. Þeir sem tilheyrðu bræðralaginu nefndust Pýþagóringar og athyglisvert er að konur höfðu aðgang að þessum félagsskap sem þótti óvenjulegt á þessum tíma. Til að komast í þennan eftirsótta félagsskap þurftu menn að standast strangar reglur og langt tímabil aðlögunar.

Eftir fimm ára þagnartímabil gátu lærisveinar Pýþagórasar fyrst fengið að kynnast fræðum og rannsóknum bræðralagsins.

Lífsreglur Pýþagóringa voru einfaldar og einkenndust af hreinum lífsmáta jafnt andlegum sem líkamlegum þar sem mikil áhersla var lögð á hollustu og þagmælsku. Pýþagóras var strangur húsbóndi, alvörugefinn og gerði miklar kröfur til lærisveina sinna. Hann naut gífurlegrar virðingar og var óskoraður leiðtogi hópsins. Allar kennisetningar voru alfarið kenndar við hann sjálfan jafnvel að honum látnum. En vegna mikilvægis þagnarinnar rituðu Pýþagóringar ekki niður kennisetningar meistara síns. Það var talið guðlast að ljóstra upp leyndarmálum bræðralagsins.

Sökum hins mikla söguljóma sem einkennir Pýþagóras er ekki vitað með vissu hvað í raun og veru eru hans eigin uppgötvanir þar sem tilhneiging samtíma- og eftirmanna hans var að eigna honum öll fræðin.

Það er jafnvel á huldu hvort hann eða lærisveinar hans eigi eitthvað í stærðfræðireglunni sem kennd er við hann sjálfan. Hún fjallar um hliðar í rétthyrndum þríhyrningi, þ.e. þríhyrningi með eitt horn 90°. Hliðin sem er á móti rétta horninu í slíkum þríhyrningi er lengsta hliðin og kallast hún langhlið, oftast táknuð með bókstafnum *c*. Hinar hliðarnar eru kallaðar skammhliðar og eru táknaðar með bókstöfunum *a* og *b*. Setning Pýþagórasar segir að um hliðarlengdir rétthyrnds þríhyrnings gildi $a^2 + b^2 = c^2$. Þetta er engan veginn ljóst og telst þessi regla mikið afrek hjá hinum fornu Grikkjum. Sérstaklega í ljósi þess að þeir þekktu hvorki algebru né annað táknmál stærðfræðinnar sem við þekkjum í dag. Sönnunin var því sett fram á formi teikninga (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 55-65).

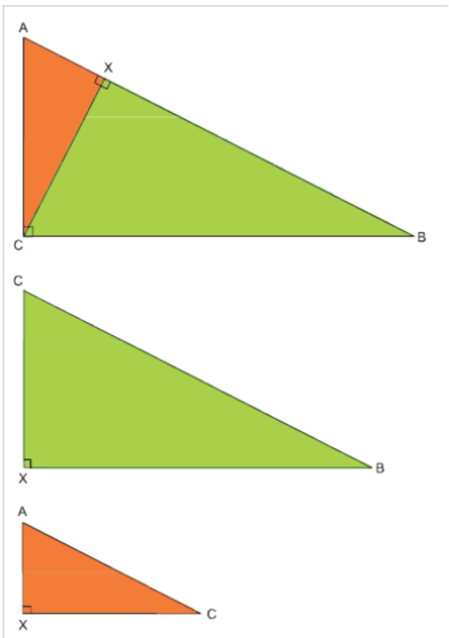
Hér á eftir eru nokkrar sannanir á reglu Pýþagórasar og er sú fyrsta kannski sú algengasta, en hún byggist á einslögun.

Sönnun á setningu Pýþagórasar með einslögun

Þessi sönnun er einföld sönnun á setningu Pýþagórasar. Talið er að Bhaskara Achārya (1114-1185), sem var indverskur stærðfræði- og stjörnufræðingur eða “lærimeistari Bhaskara”, hafi sett fram þessa sönnun. Þar sem Forngrikkir notuðu ekki algebru geta þeir ekki hafa sett fram sönnunina á þann hátt sem hér er gert. Hins vegar er Bhaskara þekktastur fyrir að hafa innleitt stærðfræðitáknin + og -. Hann notaði einnig bókstafi til að tákna hina óþekktu stærð eins og gert er í nútímaalgebru (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 110).

Setning: Látum *c* vera langhlið í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðarnar *a* og *b*. Þá gildir setning Pýþagórasar sem er: $a^2 + b^2 = c^2$.

Sönnun: Látum þríhyrninginn *ABC* tákna rétthyrndan þríhyrning. Frá horninu *C* er dregin hornrétt lína á hliðina *AB*. Köllum rétta hornið sem þar myndast *X*. Við það myndast tveir nýir rétthyrndir þríhyrningar *ACX* og *CBX*. Þessir þríhyrningar eru allir einslaga þar sem tvö horn þeirra eru eins. Þríhyrningarnir eru allir rétthyrndir, þríhyrningur *ABC* deilir horninu *B* með þríhyrningnum *CXB* og þríhyrningurinn *ACX* deilir horninu *A* með þríhyrningum *ABC*. Því gildir að hlutföll milli lengda einslægra hliða eru þau sömu.



Látum $BC = a$, $AC = b$ og $AB = c$.

Því gildir $\frac{a}{c} = \frac{BX}{a}$ og $\frac{b}{c} = \frac{AX}{b}$.

Þá er hægt að skrifa

$$a^2 = c \cdot BX \quad \text{og} \quad b^2 = c \cdot AX.$$

Ef lagt er saman a^2 og b^2 fæst

$$a^2 + b^2 = c \cdot BX + c \cdot AX = c(BX + AX).$$

En þar sem $BX + AX = c$ getum við skrifað

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sönnun lokið.

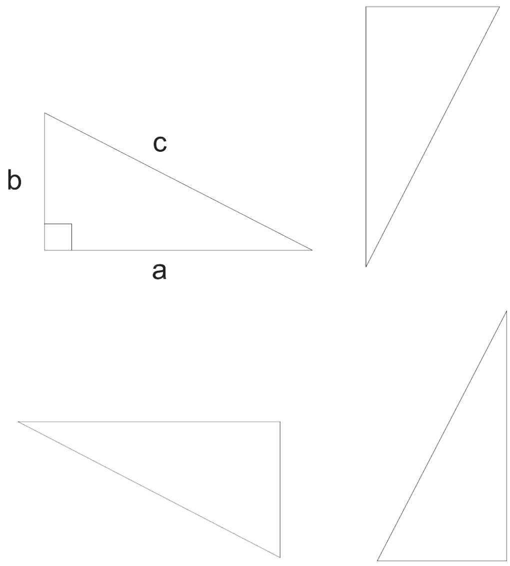
Önnur sönnun Bhaskara á setningu Pýþagórasar

Hinn indverski Bhaskara, sem virðist hafa haft mikinn áhuga á sönnunum á reglunni, sannaði setningu Pýþagórasar með því að leggja saman flatarmál á tvennskonar hátt.

Setning: Látum *c* vera langhlið í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðarnar *a* og *b*. Þá gildir setning Pýþagórasar sem er: $a^2 + b^2 = c^2$.

Sönnun: Summa flatarmáls fjögurra rétthyrndra þríhyrninga og flatarmál svæðis sem afmarkast af $(a - b)^2$, þar sem *a* og *b* eru skammhliðarnar og *c* er langhliðin, jafngildir

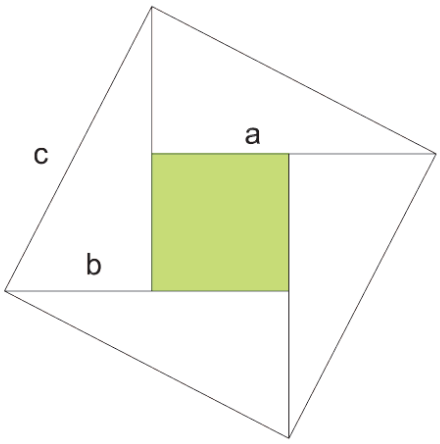
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Mynd 1 (efri t.v.) **Mynd 2** (efri t.h.)
Mynd 3 (neðri t.v.) **Mynd 4** (neðri t.h.)

Hér höfum við fjögur eintök af sama rétthyrnda þríhyrningnum. Á mynd 2 hefur honum verið snúið um 90° réttsælis, á mynd 3 um 180° og á mynd 4 um 270°. Flatarmál hvers þríhyrnings er $\frac{ab}{2}$. Flatarmál allra þríhyrninganna samanlagt er $\frac{4ab}{2}$ eða $2ab$.

Setjum þríhyrningana saman þannig að þeir mynda ferning þar sem hlið c snýr út og er lengd hliðanna á ferningnum. Leggjast þá hliðar a hornrétt á hliðar b. Er þá flatarmál ferningsins c^2.



Mynd 5

Ferningurinn hefur ferhyrnda holu inn í sér með hliðarlengd $(a – b)$. Flatarmál þessa fernings er $(a – b)^2$. Flatarmál allra þríhyrninganna er $2ab$.

Þá er $(a – b)^2 + 2ab$ með sama flatamál og c^2 eða

$$(a-b)^2 + 2ab = c^2$$

Ef við leysum upp svigann fáum við að:

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2.$$

Ef við styttum þá fáum við að:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Við höfum því sýnt að summa flatarmáls fjögurra rétthyrndra þríhyrninga og stærðar sem afmarkast af $(a – b)^2$, þar sem a og b eru skammhliðarnar og c er langhliðin, jafngildir $a^2 + b^2 = c^2$.
Sönnun lokið.

Sönnun á setningu Pýþagórasar með flutningum

Evklíð (ca. 325 – 265 f.Kr.) er talinn hafa lagt grunninn að því tímaskeiði sem nefnt hefur verið gullöld forngrískrar stærðfræði. Það gerði hann m.a. með því að safna stærðfræðisetningum forvera sinna og setja þær fram í bók með skipulögðum hætti. Þessi bók heitir *Frumatriðin* og greinist í 13 bækur þar sem forngrísk stærðfræði kristallast í 465 stærðfræðisetningum (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 259).

Sönnun, hliðstæð þeirri sem hér verður sýnd, birtist í bók I en þar er stuðst við svokallaða „vindmylluteikningu". Telja flestir fræðimenn að hún sé sönnun Evklíðs á setningu Pýþagórasar en það er þó ekki vitað með vissu (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 637).
Sönnunin byggir á hliðrun og snúningum og er þannig sýnt fram á að $a^2 + b^2 = c^2$ þ.e. að samanlagt flatarmál ferninganna *AFGC* og *BCHK* sé það sama og flatarmál ferningsins *ABDE*.

Setning: Látum c vera langhlið í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðarnar a og b. *Þá gildir setning Pýþagórasar sem er:* $a^2 + b^2 = c^2$.

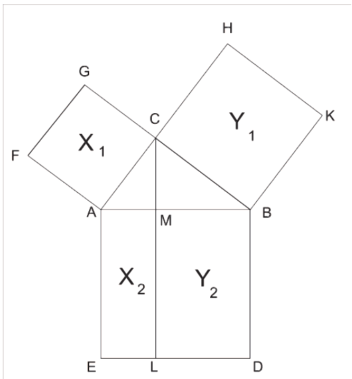
Sönnun: Ferningurinn X_1 hefur sama flatarmál og ferhyrningurinn X_2 og ferningurinn Y_1 hefur sama flatarmál og ferhyrningurinn Y_2.

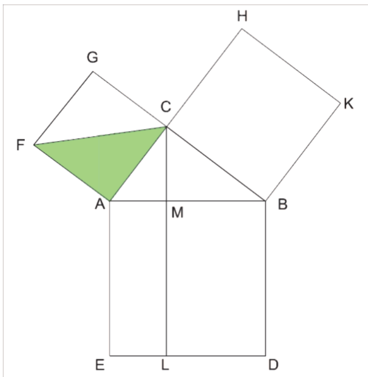
Sýnum fram á að ferningurinn X_1 hafi sama flatarmál og ferhyrningurinn X_2 og að ferningurinn Y_1 hafi sama flatarmál og ferhyrningurinn X_2.

Aþenuskólinn Freska eftir ítalska málarann Raffaello sem hann málaði á vegg einn í Páfagarði árin 1510-11. Pýþagóras situr í vinstra horninu við dyrnar ásamt lærisveinum.

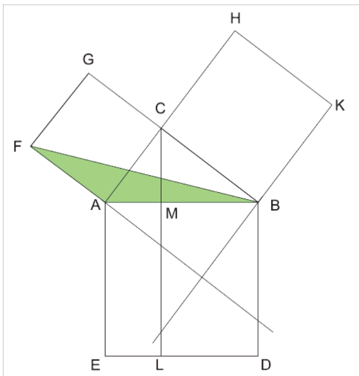
Hliðar rétthyrnds þríhyrnings eru grunnlínur ferninganna. Lóðlína frá punkti *C* niður á línu *ED* skiptir ferningi *ABDE* í tvo hluta þ.e. X_2 og Y_2 .

Helmingur flatarmáls ferningsins *AFGC* er Δ AFC .



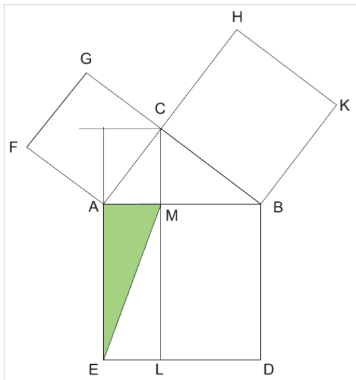


Δ *AFC* hefur sama flatarmál og Δ *AFB* því þeir hafa sameiginlega grunnlínu *AF* og hæðin á hana er sú sama hvort sem er frá punkti *C* eða *B*.



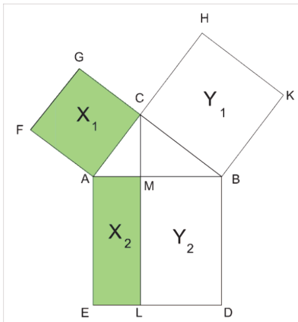
Snúum Δ *AFB* réttsælis um $90°$ í punktinum *A*.

Þá verður hann Δ *ACE*.



Δ *ACE* hefur sama flatarmál og Δ *AEM* því þeir hafa sameiginlega grunnlínu *AE* og hæðin á hana er sú sama hvort sem er frá punkti *C* eða *M*.

Þar sem Δ *AFC* hefur sama flatarmál og Δ *AEM* þá hefur ferningurinn *AFGC* sama flatarmál og ferhyrningurinn *AMLE* því þeir eru hvor um sig 2*x* stærri en þríhyrningarnir.



Við höfum sýnt að ferningurinn X_1 hefur sama flatarmál og rétthyrningurinn X_2 . Á sama hátt má sýna fram á að ferningurinn Y_1 hafi sama flatarmál og ferhyrningurinn Y_2 Við höfum því sýnt að $a^2 + b^2 = c^2$.

Sönnun á setningu Pýþagórasar með tveimur ferningum

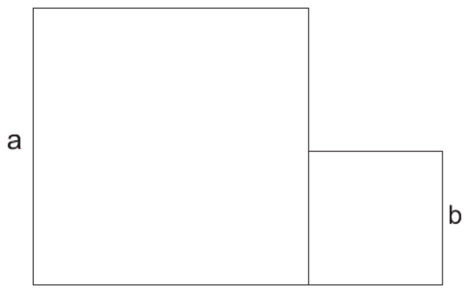
Í þessari sönnun er tveimur samliggjandi ferningum skipt upp þannig að þeir feli í sér tvo jafn stóra rétthyrnda þríhyrninga ásamt óreglulegu svæði. Með því að snúa þessum þríhyrningum er sýnt fram á að $a^2 + b^2 = c^2$.

Setning: Látum *c* vera langhlið í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðarnar *a* og *b*. Þá gildir setning Pýþagórasar sem er: $a^2 + b^2 = c^2$.

Sönnun: Rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðarnar *a* og *b* hefur langhliðina *c*. Summan af flatarmáli tveggja samliggjandi ferninga er c^2 ef annar ferningurinn hefur hliðarlengdina *a* og hinn hefur hliðarlengdina *b*. Þ.e.a.s.

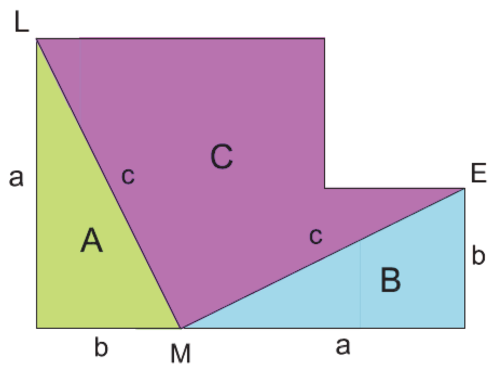
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sýnum að summan af flatarmáli tveggja samliggjandi ferninga sé c^2 ef annar ferningurinn hefur hliðarlengdina *a* og hinn hefur hliðarlengdina *b*, þ.e.a.s. $a^2 + b^2 = c^2$.



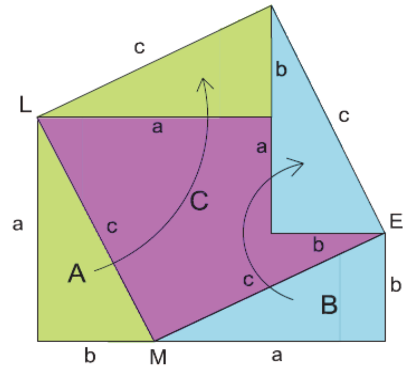
Mynd 1

Grunnlína ferninganna er $a + b$. Víxlum hlutföllunum þannig að fyrst kemur lengd *b* og síðan lengd *a* því $a + b = b + a$. Köllum punktinn *M* þar sem *a* og *b* mætast (sjá mynd 2). Drögum beina línu úr $\angle L$ yfir í punktinn *M*. Þá fáum við rétthyrndan þríhyrning með hliðarlengdirnar *a, b* og *c*. Köllum þríhyrninginn *A*. Drögum beina línu frá $\angle E$ yfir í punktinn *M*. Þá fáum við annan rétthyrndan þríhyrning með hliðarlengdirnar *a, b* og *c*. Köllum þríhyrninginn *B*. Eftir stendur óreglulegt svæði. Köllum svæðið *C*.



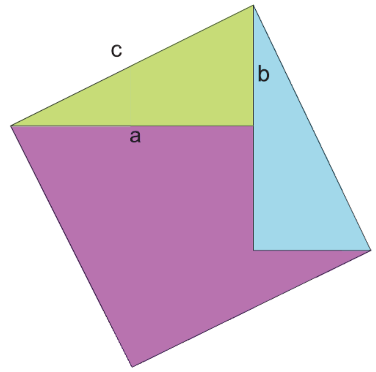
Mynd 2

Snúum ΔA rangsælis um $90°$ í punktinum *L*. Snúum ΔB réttsælis um $90°$ í punktinum *E*.



Mynd 3

Þríhyrningarnir *A* og *B* hafa nú snúist en óreglulega svæðið *C* er óbreytt. Flatarmál nýja ferningsins er það sama og flatarmál ferninganna tveggja sem höfðu annarsvegar hliðarlengdina *a* og hinsvegar hliðarlengdina *b*. Nýi ferningurinn hefur hliðarlengdina *c* og flatarmálið c^2

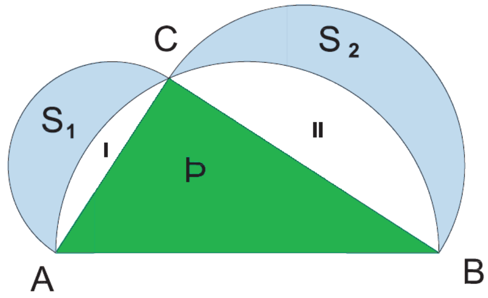


Mynd 4

Við höfum því sýnt að summan af flatarmáli tveggja samliggjandi ferninga sé c^2 ef annar ferningurinn hefur hliðarlengdina *a* og hinn hefur hliðarlengdina *b*, þ.e.a.s.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sönnun á setningu Pýþa-górasar með Sigð Hippókratesar



Á tímum Hippókratesar var rúmfræðin sönnuð með teikningum þar sem einu hjálpartækin voru ókvörðuð reglustika og hringfari. Þegar Hippókrates sannaði regluna um sigðirnar var hann alls ekki að sanna setningu Pýþagórasar, heldur að sýna fram á ferningu sigða en það var eitt af þremur vandamálum sem vöktu sérstaka athygli stærðfræðinga þessa tíma. Hin tvö voru þrískipting horns og tvöföldun tenings (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 259).

Í gegnum aldirnar reyndu margir stærðfræðingar að leysa þessi vandamál. Það var hinsvegar á 19. öld að Gauss og Lindermann tókst að sanna að þessi vandamál hefðu enga lausn. Vandamálið liggur í óræðum tölum. Ef leysa á þessi verkefni verður hornið eða hliðar tenings að vera algebrulegar stærðir (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 512).

Sigð er svæði sem afmarkast af hringbogum tveggja hringja. Þetta eru stundum nefnt hálfmánar eða jafnvel hálftungl. Sigð er hins vegar fallegt orð og er það sú nafngift sem Jón Þorvarðarson kýs að nota í bók sinni *Og ég skal hreyfa jörðina.* Á ensku kallast sönnunin *lune of Hippocrates*. Hér verður sönnunin notuð til að sanna setningu Pýþagórasar (sbr. Jón Þorvarðarson (2005), bls. 140).

Setning: Samkvæmt setningu Hippokratesar er flatarmál rétthyrnds þríhyrnings jafnt flatarmáli samanlagðra sigða hans. Þar af leiðir að $AB^2 = AC^2 + BC^2$ eða $c^2 = a^2 + b^2$.

Sönnun: Teiknum hálfhring með ferilhorni sem spannar hálfhringinn. Þar sem ferilhorn er jafn stórt og helmingur bogans sem það spannar er þríhyrningurinn sem hér myndast því rétthyrndur. Teiknum þá tvo hálfhringi sem hafa skammhliðar þríhyrningsins að þvermáli. Hálfhringirnir mynda sigðir sem afmarkast af hringjunum að frádregnu svæðinu milli upphaflega hálfhringsins og þríhyrningsins.

Köllum sigðirnar S_1 og S_2 og svæðin þarna á milli I og II. Köllum þríhyrninginn Þ.

Setning Hippókratesar segir að $S_1 + S_2 = Þ$.

Því er $(S_1 + I) + (S_2 + II) = Þ + I + II$.

Þ.e. $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Sé deilt í gegn með $\frac{1}{2}\pi$ fæst:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Þar af leiðir:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4}.$$

Sé margfaldað í gegn með fjórum fæst:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Lokaorð

Þessar sannanir á reglu Pýþagórasar eru myndrænar og auðvelt er að heillast af fegurð þeirra. Hér kemur sköpunarkraftur stærðfræðinnar berlega í ljós.

Þessi grein er afrakstur ritgerðar sem unnin var á lesnámskeiði í stærðfræði í Háskólanum í Reykjavík vorið 2008 og var dr. Einar Steingrímsson leiðbeinandi.

Heimild: Jón Þorvarðarson, (2005) Og ég skal hreyfa jörðina, Reykjavík, STÆ ehf

Á eftirfarandi slóðum er hægt að nálgast margar af þeim sönnunum sem finna má í bókinni *Pythagorean Proposition* eftir Elisha Scott Loomis:

- cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
- xmarks.com/site/www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html

Elín Guðmundardóttir
Margrét S. Björnsdóttir
Sigrún Lilja Guðbjörnsdóttir

áhugaverðir stærðfræði*vefir*

matematikksenteret.no

Með upplýsingatækninni hefur aðgengi stærðfræðikennara og annarra áhugamanna um stærðfræði og stærðfræðikennslu að stærðfræðitengdu efni aukist mikið. Margir hafa sett upp vefsetur þar sem miðlað er gagnlegu efni af ýmsu tagi. Erfitt getur verið að fylgjast með og velja sér efni til að kynna sér nánar. Í Noregi eru tvö stór vefsetur sem sérsniðin eru fyrir stærðfræðikennara, -nemendur og -foreldra. Hér, sem og framar í blaðinu, fáum við kynningu á þessum vefjum sem auðvelda ætti lesendum að átta sig á innihaldi þeirra og vonandi vekja áhuga á að kynna sér þá nánar, kynna sér fleiri vefi og kannski senda línu til ritnefndar *Flatarmála* um áhugaverðar vefsíður.

eftir
UNNI G. KRISTJÁNSDÓTTUR
kennara í Holtaskóla í Reykjanesbæ

Ég, eins og flestir kennarar, nota tölvuna daglega í starfi og leik. Í gær og í dag hef ég farið inn á samtals 42 heimasíður í leit að upplýsingum, fréttum, til að svala forvitni um nýjar vörur og kanna veður og færð. Heimasíðurnar eru misjafnar að gæðum en þær sem almenningur notar mikið eins og vedur.is og veffréttasíðurnar eru mjög einfaldar í notkun, skýrar, auðlesnar og veita góðar upplýsingar. Í þessari umfjöllun segi ég frá því sem ég varð áskynja við að skoða heimasíðu *Matematikksentret* í Noregi.

Á vefsíðunni er mikið og vel skipulagt skriflegt efni. Það getur verið erfitt að átta sig á samhengi hlutanna á síðunni, til dæmis hvað heyrir undir miðstöðina og hlutverk hennar í ýmsum samvinnuverkefnum.

Tilgangur og stefna

Matematikksentret er opinber þróunar- og þekkingarmiðstöð fyrir stærðfræðinám og -kennslu í Noregi. Hún heyrir undir Menntamálaskrifstofuna og Menntamálaráðuneytið, en er rekin af háskólanum í Þrándheimi sem er sérhæfður í tækni- og raungreinum. Hlutverk miðstöðvarinnar er að vinna að þróunarverkefnum, gæðamálum, nýjungum, rannsóknum, upplýsingaöflun og miðlun á sviði stærðfræðimenntunar í leikskólum og grunnskólum landsins. Markhópur miðstöðvarinnar eru skólastjórar, stærðfræðikennarar, leikskólakennarar og eigendur skóla auk kennaranema, en miðstöðin hefur einnig skyldur við opinbera aðila varðandi rannsóknir og mat á einstökum þáttum stærðfræðimenntunar og rannsókna í Noregi.

Starfsmenn og starfsemi

Það starfa 22 sérfræðingar hjá *Matematikksentret* og einnig hefur miðstöðin byggt upp net sérfræðilegra stærðfræðikennara um allan Noreg. Námskeið og leiðbeiningar eru snar þáttur í starfi miðstöðvarinnar og eru námskeiðin gjarnan sérsniðin eftir óskum og þörfum einstakra hópa og sérfræðingar á viðkomandi sviði sjá um að kenna og leiðbeina. Kennarar og nemendur geta komið í miðstöðina og nýtt sér sérhæft umhverfi, námsgögn og leiðbeinendur þar auk þess sem skólar og leikskólar geta fengið sérfræðinga frá miðstöðinni til sín. Þá tekur *Matematikksentret* þátt í að skipuleggja þróunar- og endurmenntunarverkefni í samvinnu við sveitarfélögin og aðra sérhæfða aðila.

Miðstöðin heldur utan um margskonar stærðfræðibjargir og skemmtileg verkefni. Nefna má aðstoð við unga og gamla sem eiga erfitt með stærðfræði. Auk þess er boðið upp á kennslu í að nota margskonar stafræna möguleika tengda stærðfræði, svo sem forrit og próf. Einnig er hægt að tengjast og fá upplýsingar um skemmtileg verkefni eins og fjölskyldustærðfræðinámskeið, lengri og minni útgáfa og stærðfræðiklúbba fyrir börn og unglinga. ReaLise er verkefni til að auka áhuga stúlkna á raungreinanámi sem miðstöðin vinnur að í samvinnu við grunn- og framhaldsskóla í Ósló og Bergen.

Matematikksentret heldur ráðstefnu árlega og af skýrslum sem eru til frá 2004 til 2011 má sjá að um er að ræða 2ja daga þematengda ráðstefnu þar sem fjallað er um það nýjasta á sviði stærðfræðinnar í heiminum á ákveðnu sviði ásamt því að beina sjónum að einstökum verkefnum og rannsóknum innanlands og utan.

Kengúrukeppnin

Kengúrukeppnin fer fram á hverju ári en í henni leiða saman hesta sína nemendur í 4.-5. bekk, 6.-8. bekk og 9.-10. bekk. Keppnin er alþjóðleg, haldin í mars og í henni leysa nemendur 18 - 24 verkefni. Á heimasíðunni er aðgangur að keppnisþrautunum aftur í tímann.

Forvitni-Pési ársins

Ásamt Rannsóknarráði Noregs og fleirum stendur *Matematikksentret* fyrir samkeppni sem kallast „Årets Nysgjerrigper“ sem útleggst á íslensku Forvitni-Pési ársins og nemendum og kennurum í 1.-7. bekk býðst að taka þátt í. Keppnin hefur verið við lýði í yfir 20 ár og er fjármögnuð af norska rannsóknarráðinu. Öll verkefnin fá endurgjöf með leiðbeiningum og hægt er að fá styrk til tækja- og efniskaupa frá ráðinu. Eitt verkefni á hverju sviði fær vegleg verðlaun. Árið 2010 komu verðlaunin í hlut 1. bekkjar í Hillestad skole i Holmestrand fyrir verkefnið „Missa stúlkur fleiri tennur en strákar í 1. bekk?“

Fyrir einstaka kennara

Miðstöðin styður við gerð kennsluáætlana og er að þróa samræmd próf fyrir 4., 7. og 10. bekk í stærðfræði. Á heimasíðunni eru tenglar á umfjöllun um stærðfræði í fjölmiðlum og er boðið upp á áskrift að fréttum af því nýjasta sem er að gerast.

Faggreinatengdur reikningur og stærðfræði í leikskólum

Tvennt er það sem vakti sérstaklega athygli mína. Annað er endurmenntunarnámskeið fyrir kennara og kallast „reikningur í öllum faggreinum“ og umfjöllun um stærðfræði í leikskólunum og verkefni fyrir þá. Á heimasíðunni er faggreinatengdur reikningur sundurliðaður í undirsíður sem innihalda námsefni og glærukynningar fyrir endurmenntunarnámskeið í stærðfræði, norsku, trúarbrögðum, raungreinum, ensku, samfélagsfræði, listum og handverki, tónlist, heimilis- og heilsufræði og hreyfingu. Innan greinanna er efninu skipt niður á 1.-4. bekk, 5.-7. bekk og 8. -10. bekk. Til að skýra málið tek ég dæmi af samfélagsfræðinni sem er skipt í landafræði, samfélagsfræði og sögu. Sett eru fram markmið og efnisatriði þar sem stærðfræðin er dregin fram.

Tölur:

- Hluti, hlutföll og prósentur
- Útreikningar á fólksfjölda, þéttbýli og fólksfjöldaþróun
- Fjárhagsáætlanir og bókhald
- Kosningatölur og úthlutun þingsæta

Rúmfræði:

- Notkun hnitakerfis á landakorti
- Hnötturinn
- Að rata eftir himintunglum
- Tímabelti og tímamunur á jörðinni
- Lengdar- og breiddargráður

Mælingar:

- Notkun tímalínu til að staðsetja atburði
- Mælikvarðar landakorta
- Lengdir og vegalengdir á landakortum
- Útreikningar á svæðum
- Peningar og gengi gjaldmiðla
- Tölfræði og líkindareikningur
- Grafísk kynning sögulegra atburða
- Söfnun og flokkun gagna
- Gagnrýnin túlkun gagna
- Neysla og kynjamunur
- Samanburður landa og menningar

Þjóðhagfræði:

- Útreikningur á fólksfjölda og þróun hans
- Framsetning efnahagsútreikninga
- Þróun á kaupmætti
- Efnahagslegur vöxtur

Efnahagur:

- Sparnaður og lántökur
- Skipulagning peningamála
- Einkafjármál
- Lífskjör
- Laun og aðstæður á vinnumarkaði
- Stofnun og rekstur fyrirtækja
- Bókhald

Undir liðnum *Leikskólar* koma fram hugmyndir um markmið og leiðir í kennslu, lítilsháttar kynning á námsefni í stærðfræði fyrir leikskólabörn og tengill á stærðfræðiráðstefnu fyrir leikskólakennara. Á vefsíðunni eru tenglar á einkar áhugavert námsefni og kennsluleiðbeiningar um stærðfræðikennslu leikskólabarna þar sem finna má hugmyndir að verkefnum og sögur af börnum þegar þau vinna verkefnin og velta tölum og formum fyrir sér (http://www.matematikksenteret.no/content/1544/Hefter).

Í lokin vek ég athygli ég á myndböndum sem ásamt öðru uppleggi á síðunni geta gefið góðar hugmyndir að kennslu. Gallinn er að þau eru ekki þýdd og því ekki hægt að nota þau beint (http://www.matematikksenteret.no/content/1547/Ressurser).

Umræða

Heimasíða *Matematikksentret* í Noregi geymir margvíslegt efni og hugmyndir sem vert er að skoða. Þær má nýta á margvíslegan hátt svo sem til að skipuleggja stærðfræðiverkefni innan skólans eða sveitarfélagsins, til að bæta kennsluskipulagið, til að skapa vakningu fyrir stærðfræðinámi meðal foreldra og áhugahópa barna og unglinga og til að komast í tengsl við kollega í Noregi. Heimasíðan er vel uppbyggð en efnismikil svo nauðsynlegt er að gefa sér góðan tíma til að skoða þau fjölmörgu verkefni og hugmyndir sem þar er að finna.

Flötur

SAMTÖK STÆRÐFRÆÐIKENNARA

Ritstjóraspjall 2

Nokkrir punktar um hrós og greind 4
Ingólfur Gíslason

Stærðfræði - kennsla ungra barna 6
Þóra Rósa Geirsdóttir

Söguhornið - Arkímedes 10
Kristín Bjarnadóttir

Stærðfræðin er meira en bara tölur 12
Þuríður Ástvaldsdóttir

Dagur stærðfræðinnar í Lágafellsskóla 17
Imke Schirmacher

Stærðfræði í morgunsárið 18
Laufey Einarsdóttir

Á döfinni / Áhugaverð stærðfræðitímarit 21

Námstefna Flatar 2011 22
Valgarð M. Jakobsson

Áhugaverðir stærðfræðivefir 23
Matematikk.org
Nanna Þ. Möller

Pýþagóras 24
Elín Guðmundardóttir
Margrét S. Björnsdóttir
Sigrún Lilja Guðbjörnsdóttir

Áhugaverðir stærðfræðivefir 30
Matematikksenteret.no
Unnur Kristjánsdóttir