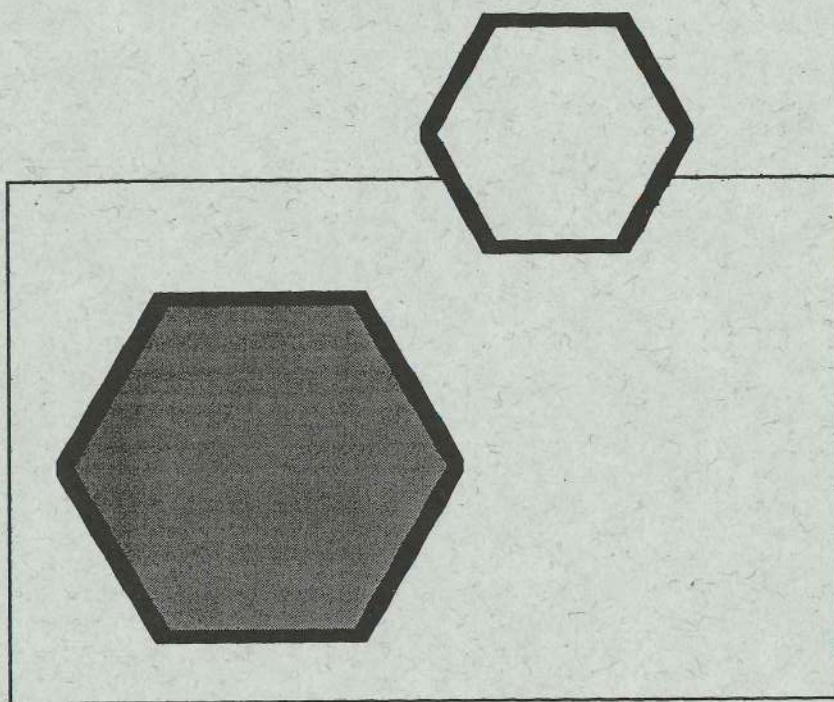


FLATAR máí



1. tbl. 3. árg. desember 1995

Málgagn Flatar,
samtaka stærðfræðikennara

Spjall

Efni þessa tölublaðs er tileinkað vasareiknum og notkun þeirra í stærðfræðinámi. Miklar tæknilegar breytingar hafa gengið yfir síðan fyrstu reiknivélarnar komu á markaðinn. Í dag eru vasareiknar í höndum flestra nemenda, sumir mjög fullkomnir. En hvernig eru þessi tæki nýtt í kennslunni? Og hvernig er hægt að nýta þau á markvissan hátt? Við þessum spurningum er ef til vill ekkert einfalt svar en í þeim greinum sem koma hér á eftir er reynt að varpa nokkru ljósi á það frá ólíkum sjónarhornum.

Sveinn Ingimarsson

FLATAR mál

Útgefandi:

Flötur – samtök stærðfræðikennara, Pósthólf 181, 172 Seltjarnarnesi

Ritstjórar og ábyrgðarmenn:

Sólrún Harðardóttir og Sveinn Ingimarsson

Stjórn Flatar:

Anna Kristjánsdóttir formaður, Soffía Ingvarsdóttir varaformaður,

Elías Sólmundsson gjaldkeri, Helga Björnsdóttir ritari, Meyvant

Þórólfsson meðstjórnandi, Erna Guðmundsdóttir og Margrét

Björnsdóttir í varastjórn.

Útlit: Sólrún Harðardóttir

Prófarkalesari: Hanna Kristín Stefánsdóttir

Ljósmyndari: Guðbjartur Kristófersson

1. tölublað er gefið út í 500 eintökum

Hlutverk vasareikna í reikningsnámi

Anna Kristjánsdóttir

Fimm sinnum níu eru fjörtíu og fimm, skrifa fimm og geymi fjóra. Fimm sinnum sjö eru þrjátíu og fimm, plús fjórir, sama sem þrjátíu og níu, skrifa níu og geymi þrjá. Fimm sinnum tveir er tveir sinnum fimm, er jafnt og tíu, plús þrír, jafnt og þrettán, skrifa þrettán. Fjórum sinnum níu eru þrjátíu og sex, skrifa sex og geymi þrjá, skrifa einum frammar en hitt. Fjórum sinnum sjö eru tuttugu og átta, plús þrír, eru þrjátíu og einn, skrifa einn og geymi þrjá. Fjórum sinnum tveir eru tvisvar sinnum fjórir, eru átta, plús þrír, eru ellefu, skrifa ellefu. Fimm er fimm, níu plús sex eru fimmtán, skrifa fimm og geymi einn. Einn plús þrír plús einn er fimm. Einn plús einn er tveir og einn er einn. Niðurstaðan er að fjörtíu og fimm sinnum tvö hundruð sjöttíu og níu eru sama sem tólf þúsund fimm hundruð fimmtíu og fimm.

$$\begin{array}{r} 279 \\ \cdot 45 \\ \hline 12555 \end{array}$$

Kannastu við þetta?
Er þetta eina leiðin til að leysa dæmið?
Er þetta besta leiðin til að leysa dæmið?
Er þetta leið sem gefur góðan undirbúning fyrir daglegt líf og frekara nám?
Er þetta auðskiljanleg leið?
Getur nemandi sjálfur fundið þessa leið?

Algengt hefur verið að höfundar kennslubóka og kennarar hafi lagt mikla áherslu á að kenna uppsetningar sem þessar en þær má kalla algoritma. Algoritmi er forskrift sem færir okkur á ótvíráðan hátt skref fyrir skref að lausn. Slíkir skrifaðir algoritmar hafa ekki alltaf verið til. Þeir eru ekki nema nokkurra hundruða ára gamlir í Evrópu. Evrópubúar lögðu af reikning á reiknigrindur eða abakus á endurreisnartímanum. Reyndar höfðu átök milli abakussins og skrifaðra algoritma þá staðið yfir í nokkur hundruð ár en skrifuðu

algotimarnir sigruðu samfara því að indóevrópska sætiskerfið náði yfirtökum.



Við höfum sem sagt búið við einhvers konar skrifaða algoritma fyrir úrlausnir reikningsdæma í stað þess að nota abakus í u.þ.b. fimm hundruð ár. Reyndar voru þeir komnir fram fyrr. Og kunnátta í slíkum algoritnum var eina leiðin til þess að menn gætu leyst viðfangsefni sem þeir réðu ekki við í huganum. Það skipti því máli að læra algoritmana og það mótaði reikningsnámið þegar fræðsla almennings í reikningi varð lögbundin (hér á landi árið 1880). Sumir skildu þá og voru jafnvel á undan kennaranum eða bjuggu til sínar eigin leiðir. Aðrir lærðu þá án skilnings og afleiðingar þess eru hvarvetna sýnilegar í dapurlegum hugmyndum eins og 'd' þeirri að stærðfræði sé röð af óskiljanlegum tæknibrellum, eins konar töfrum, sem maður læri að framkvæma og skilji svo kannske einhvern tíma síðar, ef maður er nógu klár. Trúin segir líka að það verði að kenna nemendum algoritmana skref

fyrir skref og þeir að leggja á minnið og síðan að þjálfar þar til af verður órjúfanlegur hluti af undirmeðvitund. Þannig eigum við mörg lifandi dæmi um að fólk getur framkvæmt reikninga en hefur ekki hugmynd um til hvers þeir eru né heldur að það geti séð á skýran hátt hvort það hafi reiknað rétt eða ekki. Þetta á við um talnareikning en ekki síður um algebru.

Stundum rugla menn saman reikniadgerð, til að mynda margföldun, og algoritma til þess að leysa margföldunardæmi. Þetta kom glögglega í ljós þegar Íslendingar tóku um 1965 upp þýddan danskan bóka flokk á barnastigi og í þeim bókum var að finna hefðbundinn danskan algoritma til að leysa margföldunardæmi. Sá algoritmi sem við höfðum einkum notað mun vera af engilsaxneskum toga og það varð til þess að mörgum kennurum á unglingastigi þótti nauðsynlegt að láta nemendur, sem lært höfðu að margfalda samkvæmt danska algoritmanum, læra nú upp á nýtt og ná tókum á hinum.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 23 \\ \hline 108 \\ + 72 \\ \hline 828 \end{array}$$

Engilsaxneski
algoritminn

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 36 \\ \sqrt{720} \\ \sqrt{+ 108} \\ \hline 828 \end{array}$$

Danski
algoritminn

Oft mátti heyra að verið væri að kenna þessum nemendum margföldun, sem auðvitað var alls ekki rétt. Það var verið að kenna þeim aðferð nýja kennarans þeirra við að leysa margföldunardæmi. Til hvernar reikniadgerðar svarar aragrúi algoritma og þótt þeir séu e.t.v. misauðveldir að átta sig á hvíla þeir allir á sama grunni. Margföldunaralgoritmar hvíla flestir á þeim grunni að liða tölur sundur í einingar, tugi, hundruð eða enn hærra og margfalda síðan liðastærðirnar, allt eins og gert er þegar unnið er með breytistærðir í algebru. Þessu er raðað á blað á mismunandi hátt og mismikið skrifað en grundvöllurinn er sá sami og það er hann sem skiptir máli að skilja.

$$(200 + 70 + 9)(40 + 5)$$

$$(x + 2y + z)(3x + y)$$

Flatarmál 3 (1)

Núttíminn og tæknin.

Enn á ný stöndum við frammi fyrir breytingum og nú mun meiri en á endurreisnar tímanum. Hvarvetna eru nú í umhverfi barna hlutir sem við getum notað til að leysa þau viðfangsefni sem skrifuðu algoritmanir einir dugðu á. Og við getum meira að segja leyst ýmislegt sem við lærðum aldrei að fást við með þeim. Og hvernig bregðast menn við? Á það er komin talsverð reynsla því að almenningur hefur átt greiðan aðgang að vasareiknum um nær 20 ára skeið.

Vorið 1979 lagði undirrituð spurningalista fyrir kennara á miðstigi og unglingastigi. Þar var leitað eftir reynslu, hugmyndum og skoðunum þeirra á ýmsum þáttum stærðfræðikennslunnar. Meðal þess, sem spurt var um, voru vasareiknar, en þeir voru þá komnir fram á sjónarsviðið og höfðu verið í námsefni síðasta árs grunnskóla í þrjú ár. **Yfirvöld menntamála lögðu hvergi bann við notkun þeirra í kennslu og hafa reyndar aldrei gert.** Hér er ekki rúm til að gera grein fyrir svörum kennara unglingastigsins en lítum á nokkur svör kennara á miðstigi. Tekið skal fram að þetta voru reyndir kennarar og höfðu allir reynslu af að kenna mismunandi námsefni á þessu stigi, sumir þrjú mismunandi bóka flokka. Á þessum árum var orðið vasareiknir ekki orðið fast í sessi og því valið að tala um reiknivél. Lítum á þrjár spurningar:

1 Hefurðu leyft nemendum að nota reiknivélar?

Já	14%
Nei	85%
Ósvarað	1%

2 Hve margir nemenda þinna höfðu aðgang að reiknivél í vetur?

Allir	0%
Flestir	9%
Fáir	45%
Enginn	23%
Ósvarað	23%

3 Hefurðu orðið var(vör) við að nemendur noti þær í heimavinnu án þess að ætlast sé til þess?

Já	56%
Nei	41%
Ósvarað	3%

Á þessum tíma fjölgaði ljósritunarvélum ört í skólum og liprara varð að framleiða æfingadæmi til að þjálfa skrifuðu algoritmana en það töldu ýmsir kennarar afar mikilvægt. Staðan er því í stuttu máli sú að í fimmtán ár hafa kennarar margra (e.t.v. ætti að segja flestra) skóla bannað notkun vasareikna á miðstigi, nemendur hafa fengið umtalsvert magn uppsettra æfingadæma með sér heim og talsverður hópur nemenda hefur notað vasareikna á heimadæmin sín án þess að ætlast væri til þess. Og ætla má reyndar að sá hópur hafi vaxið verulega síðan 1979.

Á unglíngastiginu hefur staðan verið nokkuð önnur. Notkun vasareikna við þau dæmi, sem áður hefðu verið reiknuð á blaði, kom inn í námsefni næst síðasta ársins haustið 1980 og stuttu síðar í efni fyrsta árs unglíngastigsins. Og lengst af síðan hefur notkun vasareikna verið algeng á þessu skólástigi.

Ástæða er til að spyrja hver áhrif þess hafi verið að leggja algert bann við vasareiknum í kennslu í skólum á miðstigi, samfara því að velja heimadæmi sem ætluð eru til að þjálfa skrifaða algoritma og þeirri staðreynd að nemendur hafa í verulegum mæli notað vasareikna til að leysa þessi dæmi eða fara yfir þau. Einnig er ástæða til að spyrja hver áhrif það hafi haft að banna vasareikna á miðstigi en opna nemendum síðan hömlulitla notkun þeirra á unglíngastigi. Þetta hefur verið veruleiki fjölmargra skólanemenda undanfarinn rúman áratug.

Víða gætir tvískinnungs. Á miðstigi hefur flóknari talnadæmum fækkað í þjálfun nemenda vegna þess að menn viðurkenna að kunnátta í að reikna þau á blaði verði ekki mjög gagnleg. En vegna þess að vasareiknar eru ekki leyfðir veldur þetta því að nemendur fást aldrei eða afar lítið við samsett dæmi með stórum tölum á miðstigi. Þetta er ástæðulaust. Bæði geta nemendur vel tekið á dæmum með háum tölum og einnig hafa þeir gaman af því að glíma við slíkt. Hér eru nemendur því rændir möguleikanum á að átta sig á stórum stærðum, meta stærðgildi þeirra, framkvæma reikninga með þeim og túlka niðurstöður.

Hvað er vítað um vasareiknanotkun?

Rannsóknir á áhrifum þess að nota vasareikna markvisst í námi eru fjölmargar og hófust þegar um miðjan áttunda áratuginn. Vert er að líta nánar á niðurstöður og einnig að greina frá einu þekktasta námskrárverkefninu þar

sem vasareiknar hafa verið teknir alvarlega en það nefndist calculator-aware number almennt kallað CAN.

Í árbók bandarísku stærðfræðikennara-samtakanna *National Council of Teachers of Mathematics*, sem nefnist *Calculators in Mathematics Education* og kom út 1992, er samantekin sú reynsla sem fengin er af rannsóknum og þróunarverkefnum á þessu sviði. Þar segir m.a.: Þegar nemandi ákveður hvernig hann ætli að framkvæma ákveðna reikniáðgerð byggir hann oft í huga sér röð skrefa og og rennir síðan yfir þau í huganum áður en hann slær inn tölurnar. Slík hugsun gefur einstaklingnum kost á að velja fyrir sér og kanna hvaða ávinningur sé af því að nota vasareikni borið saman við aðrar leiðir. Spurningin vaknar hvort heppilegt sé að reikna í huganum, áætla svárið, reikna á blaði, nota vasareikni, ræða um viðfangsefnið við einhvern eða nota tölvu. Til þess að ná góðu valdi á notkun vasareiknis er hugsun af þessu tagi mjög mikilvæg. Með því að nota vasareikna er hægt að gefa betri gaum að merkingu þess sem fengist er við. Hugareikningur og skynsamleg áætlun stærða fá mun veigameiri sess en áður. Nemendur eru hvattir til að búa til sína eigin algoritma við einfaldan reikning og að nota vasareikna þegar eitthvert vit er í að nota þá. (Wheatley og Shumway, 1992).

Við lausnir áður óþekktara viðfangsefna, þrauta, er þrautseigja mjög mikilvæg. Það er margþekkt að nemendur í hefðbundinni stærðfræðikennslu fara að trúá því að stærðfræðidæmi eigi að vera hægt að leysa á mjög stuttum tíma, annars sé ástæða til að gefast upp. Þetta er ekki rétt en eitthvað verður til þess að nemendur öðlast þessa trú og hún verður aftur til þess að nemendur öðlast ekki nauðsynlega reynslu í að glíma við viðameiri viðfangsefni sem geta reynst þeim góður undirbúningur fyrir starf og nám. Rannsóknir hafa sýnt að þegar nemendur glíma við viðfangsefni með vasareikni eykst þrautseigja þeirra og þeir vinna lengur að úrlausnum. Vasareiknirinn virðist skipta verulegu máli í þessu samhengi. (Wheatley og Shumway, 1992).

CAN rannsóknarverkefnið stóð yfir í Englandi og Wales 1985-1989 og var styrkt úr opinberum sjóðum þar í landi. Markmið þess var að gera námskrá fyrir yngri bekki þar sem fullt tillit væri tekið til áhrifa nýrrar tækni og skyldi áherslu einkum beint að mikilvægi vasareikna í reikningsnáminu. Þetta var unnið

sem þróunarverkefni í samstarfi við skóla. Stjórnandi CAN var Hilary Shuard. Hún sagði að er hafist hefði verið handa við prófanir í yngstu bekkjunum hefði verið mælt til þess við kennarana að þeir héldu áfram „good primary practice“ þar sem um væri að ræða gnægð af hlutbundnum viðfangsefnum, reikningsdæmi tengdust hagnýtum aðstæðum, börnin væru hvött til þess að rannsaka stærðfræðileg viðfangsefni og haldið væri áfram að efla markvissa umræðu um stærðfræðiverkefni og úrlausnir. Að auki var talað um aukna áherslu á hugareikning og að börnin deildu hvert með öðru þeim leiðum sem þau myndu til að leysa verkefni.

Ef kennarar höfðu áður notað útgefna kennslubækur voru þeir beðnir um að sleppa þeim þar sem allar kennslubækurnar voru grundvallaðar á hefðbundnum skriflegum algritum. Þessar bækur hentuðu því engan veginn samfara CAN. En þetta átti aðeins við um reikningskennsluna í bókunum. Kennurum var ráðlagt að nota útgefið efni áfram varðandi mælingar, aðra þætti rúmfræði, myndræna framsetningu o.fl. Einnig var tekið fram að reikningsþátturinn skyldi ekki nema meira en helmingi tímans en þeir þættir, sem nefndir voru hér á undan, skyldu koma til jafns á móti. (Shuard, 1992).

Um árangur segir hún að þeir kennarar, sem tóku þátt í rannsókninni hafi, vegna þess að þeir þurftu ekki lengur að kenna hefðbundna algritma, getað gefið því betri gaum að leggja fyrir börnin þrautir til að glíma við, hlusta eftir lausnaleit þeirra og bregðast við þeim á raunhæfari hátt. Fram kom að þeir fóru að tala við börnin um stærðfræði og þær umræður voru mjög frábrugðnar hinum hefðbundnu „spurningar og svör“ umræðum sem þeir höfðu beitt áður. Þeir leiddu nemendur ekki lengur að þessu eina rétta svari heldur treystu nemendum til að vinna sjálfstæðar og fóru fram á það við hvern og einn að hann skýrði út hvernig hann hefði hugsað sína lausn. Þetta er enn frekar rökstutt með greinargerðum þessara kennara. (Shuard, 1992).

Þess má geta að um árábil hefur bókinn Primary Mathematics Today eftir Shuard og Williams verið lesin á kjarnanámskeiði í stærðfræði við Kennaraháskóla Íslands en í 4. útgáfu hennar eru vasareiknar felldir eðlilega inn í umfjöllun um stærðfræðináms og kennslu.

Já, en ...

A: „Mér hefur farið svo aftur í hugareikningi síðan ég byrjaði að nota vasareikna.“

B: „Er það rétt, reiknaðirðu mikið í huganum meðan þú reiknaðir dæmin á blað? “

A: „Já, heilmikið.“

Samtöl af þessum toga hefi ég átt í tugatali ef ekki hundradatali undanfarin ár. Þau hafa orðið mér tilefni til nokkurrar íhugunar. Hvaða hugareikningur er það sem fólk er að vísa í að tengist reikningi dæma á blaði? Ef lesandi fer nú aftur yfir upphaf greinarinnar má sjá að þar er ekkert annað að finna en að kalla fram margföldunarstaðreyndir og einstöku samlagningarstaðreyndir og allt er þetta út frá reikningi með eins stafs tölur. Er það þetta sem fólk á við með hugareikningi? Hefur það aldrei komist í kynni við gleðina af góðum hugareikningi sem felur í sér fjölbreytni, margvíslegar tengingar, næmni á samhengi, sundurliðun talna til að auðvelda reikning með háar tölur og margt fleira sem telja mætti upp? Og niðurstaða mín hefur orðið ákveðnari og ákveðnari eftir því sem samtölunum fjölga. Reikningurinn á blaði hefur oft orðið til þess að drepa þann hugareikning sem börn bera með sér inn í skólann og viðhalda stundum samhliða skólanum. Það var örugglega ekki ætlan neins en líklega hafa of fáir gáð að því í kennslu sinni hvaða skaða kennsla algritanna getur valdið ef ekki er gætt að því að viðhalda hugsun barnanna og efla hana.

„Vasareiknar eru ógnun við kunnáttu manna í almennum brotum.“ Þetta er líka staðhæfing sem heyrst oft. Reyndar hafa um talsvert skeið verið til vasareiknar, sem reikna með almennum brotum en það er samt aukaatriði hér. Ekki er fjarri lagi að bak við staðhæfinguna liggja sams konar ástæður og hér á undan, sem sé að tugabrotatáknun vasareiknanna dugi til að nemendur ráði ekki lengur við einföld almenn brot, hvorki með tölum eða breytistærðum, eftir að algebran kemur til sögunnar. En þegar litið er á að þorri þessara nemenda fékk ekki að nota vasareikna í skólanum fyrstu þrjú til fjögur árin, sem þeir voru að læra almenn brot, hlýtur athyglin að beinast að þeim grunni. Hafi sá grunnur verið lagður á hlutbundinn hátt með ýmsum athugunum og tengingu brotshugtaksins við fjölmörg atriði í daglegu umhverfi er ekki mikil hætta á að hann hverfi. Og reyndar er ástæða til að á unglíngastiginu

geti skilningur aukist til muna ef gefinn er markviss gaumur að því hve hlutföll eru snar þáttur í daglegu lífi. En hafi undirstaðan verið mögur og einvörðungu tengd skriflegum algoritnum á blaði þá hrynur hún hvort sem vasareiknar koma til sögunnar eða ekki. Dæmi um slíkt langar mig að nefna:

Vorið 1973 lagði undirrituð könnun fyrir nemendur við lok 12 ára bekkjar og 1. bekkjar á unglíngastigi. Báðir höfðu hóparnir haft hefðbundið námsefni í 12 ára bekk og leyst mikið magn dæma með almennum brotum. Þessi dæmi voru almennt skrifleg á blaði. Eldri hópurinn hafði ekki fengist sérstaklega við brot undanfarið skólaár en var aftur á móti ári eldri og þroskaðri.

Fyrir hópana var lagt dæmið: $1/4 + 1/8$

Í yngri hópnum leystu 53% nemenda dæmið rétt. Í eldri hópnum leystu 17% nemenda dæmið rétt.

Þarf þá ekki bara að rifja meira og oftar upp? Nei, það dugar ekki til því að einhvern tíma útskrifast nemendur úr skóla og skólinn nær ekki til þeirra lengur. Það verður að vinna öðru vísi í skólanum en gert hafði verið með þessum nemendum.

Það er ekki hægt að tala um vasareikna í tómarúmi

Það er ekki nóg að tala um það sem á hverjum tíma kemur nýtt inn, vega það og meta. Það verður einnig, og ekki síður, að líta á það sem verið hefur, vega það og meta.

Vasareiknar leysa fjölmargt af hólmi. En hvað leysa þeir af hólmi? Og hvað leysa þeir ekki af hólmi? Vera má að það hjálpi þeim, sem eru að fóta sig í þessari umræðu, að íhuga hvað sé mikilvægt í reikningsnámi. Lítum á nokkur atriði til að byrja með:

- 1 Nemandi þarf að skilja um hvað viðfangsefnið er sem hann er að leysa.
- 2 Nemandi þarf að skilja hvað hann er að gera í lausnarferlinu.
- 3 Nemandi þarf að geta áttað sig á því hvort það, sem hann er að gera, stenst eða ekki og hvers vegna.

Þegar við notum vasareikna er gott að hafa þessi atriði í huga. En það er reyndar gott að hafa þau í huga við allar aðstæður í stærðfræðináminu. Þannig eru margir nemendur

sem skilja ekki um hvað viðfangsefnið $(x+2)(x+3)$ er og heldur ekki viðfangsefnið $4 : 1/2$. Og það eru margir nemendur sem læra utan að lausnarferli en geta ekki sagt til um hvað er að gerast í hverju skrefi. Og að lokum eru margir nemendur sem hafa ekki hugmynd um hvort lausnirnar þeirra er nærri lagi og hafa heldur ekki öðlast burði til að gá að því (Anna Kristjánsdóttir, 1994).

Fyrir kemur að sagt er: Nemendur verða fyrst að læra að setja dæmi upp á blað og skilja þau áður en þeir geta farið að nota vasareikna af skilningi. Spyrja má á móti: Er það svo? Er verið að veita skilning á aðgerðinni með því að kenna skriflega algoritmann? Það getur staðist en gerir það ekki alltaf. Og eins má spyrja hvort þessi leið sé sú eina til þess að grundvalla notkun vasareiknanna á skilningi. Það er hins vegar ekki rétt.

En hvers vegna segir fólk þetta? Ætla má með nokkurri vissu að það sé einfaldlega vegna þess að það fór sjálft þessa leið. Það lærði að reikna meðan vasareiknar voru ekki til eða of dýrir til að vera almennt innan seilingar. Og þegar þeir bárust fóru mjög margir (samkvæmt athugunum hér á landi undanfarin sex ár) að nota þá við flest verkefni sem áður voru reiknuð á blaði. M.a. kom fram í rannsókn meðal 11–14 ára nemenda vorið 1992 að um tíundi hver nemandi sá aldrei reiknað á blaði heima hjá sér. Vasareiknarnir eru einfaldlega fljótvirkari og ekkert síður innan seilingar en blað og blýantur. Og þar að auki var unnt að leyfa sér að endurreikna dæmi til að tryggja að þau væru rétt.

En lífið er ekki lengur þannig að við kynnumst vasareiknum fyrst á fullorðinsaldri og það verður aldrei aftur þannig. Umhverfi barna og unglínga er ekki það sama og var áður, hvorki takmarkanir né möguleikar. Skólinn verður að bregðast við því. Annars býr hann nemendur ekki undir líf og starf í þjóðfélagi okkar. Hér er um að ræða ögrandi og mikilvægt viðfangsefni.

Ekki verður komist hjá að mennta kennara sérstaklega

Aðstaða ^{††} að sinna þessum málum er óviðunandi í kennaramenntun, einkum í grunnnámi, en einnig þyrfti að gera átak í endurmenntun og í leiðsögn við skóla. Að vísu er fjallað nokkuð um þessi mál í KHÍ en tími til að sinna því er allt of lítill og kostur á

að tengja það vettvangsnámi mjög takmarkaður. Ekki er vitað um hvort aðrar kennaramenntastofnanir sinna þessum málum.

Kennarar og kennaranemar endurspegla þjóðina í heild og búa jafnt yfir öryggi sem ótta gagnvart stærðfræði. Víðtækar rannsóknir eru til á stærðfræðióttu og hvaða afleiðingar öryggisleysi kennara hefur í för með sér fyrir kennsluna og nemendur. Þar kemur m.a. fram að öryggislaus kennari yfirfærir oft eigin vanmátt yfir á nemendur, vantrestir þeim til sjálfstæðra vinnubragða, hemur þá í leit þeirra að skilningi og bregst ekki við gjöfulustu spurningum þeirra. Án þess að vilja gera skaða miðlar hann hægt og sígandi í orðum eða gerðum mynd af námsgreininni sem á ekki við nein rök að styðjast. Skilaboðin eru skýr: Þú getur ekki leyst viðfangsefni í stærðfræði nema búíð sé að kenna þér aðferð til þess. Þú verður að læra að leysa þau með rétttri aðferð. Þú nærð aldrei neinum árangri nema þú þaulæfir aðferðina sem ég sýni þér. Æfingin skapar meistarann.

Eina setningin þeirra síðustu fjögurra hér á undan, sem stenst, er sú síðasta. En sú æfing, sem skapar meistara, er ekki sú æfing sem lýst er þar á undan. Hún er allt önnur, fjölþættari og dýpri og grundvallast á virðingu fyrir hugsun einstaklinga og styrkingu á henni.

Skóli er lærdómsstaður. Spakur maður sagði snemma á þessari öld að kennari miðlaði miklu fleiru en því sem hann teldi sig vera að kenna. Við getum líklega öll minnst slíkra tilvika, annað hvort sem nemendur eða kennarar. Og eitt af því sem við miðlum þannig aukreitis er afstaða okkar til náms, til nýrra hluta, til þess að glíma við það sem við höfum ekki kynnst fyrr. Og unga kynslóðin í skólunum þarf einmitt á leiðsögn að halda við þetta. Hún þarf ekki á lítt ígrunduðum dómum að halda né heldur órökstuddum bönnum. Hún þarf að sjá í verki kennara sem taka á nýjum og ögrandi viðfangsefnum af áhuga, íhygli, vandvirkni og löngun til að skilja nýjar aðstæður. Hún þarf að sjá í verki kunnáttu til að endurmeta það sem er, óttaleysi við að draga úr því sem hefur takmarkað gildi og hæfni til að varðveita meginatriði. Líklega er fátt mikilvægara í kennarastarfinu á þeim öru breytingatímum sem við lifum nú – og munum halda áfram að búa við. En kennarastéttin lyftir þessu ekki ein án stuðnings. Það þarf vel skipulagt og sameinað átak á þessu sviði.

Námsefni - hvaða áhrif hefur það?

Athugull lesandi kann að hafa tekið eftir því sem kennurum í CAN rannsókninni var ráðlagt, sem sé að nota ekki samfara notkun vasareiknanna hefðbundnar kennslubækur vegna þess að þær væru í fullri mótsögn við það sem var verið að gera. Þetta á einnig við hér á landi. Einn þáttur í því að gera átak á sviði reikningskennslunnar er nátengdur námsefni. Ekki svo að skilja að ekki sé hægt að kenna reikning án útgefina bóka en það virðist vaxa svo mörgum kennurum í augum að taka verður tillit til þess.

Nú eru liðin rúm fimm ár síðan undirrituð lagði fram formlega tillögu um að hafinn yrði vandaður undirbúningur að því að reikningsþáttur barnanámsefnisins í stærðfræði yrði endurskoðaður frá grunni. Rökin fyrir mikilvægi slíkrar vinnu voru sú staðreynd að reiknimöguleikar almennings eru nú allt aðrir en þeir hafa verið, það er farið að koma greinilega fram í breyttum reiknivenjum og gefa þarf gaum að því hvernig eðlilegt sé að kenna að reikna við slíkar aðstæður.

Tekið var fram í tillögunni að erfitt yrði að finna kunnáttufólk til þess að vinna þetta verk af framsýni, varfærni og glöggum skilningi en Íslendingar hafa fyrr sýnt að þegar þeir eiga ekki nóg af menntuðu fólki, þá ganga þeir í að ráða bót á því og það er hægt að gera. Umræða manna, og umræðuleysi, bendir til að fáir hafi skoðað þær breytingar sem vasareiknar hafa í för með sér í almennum reikningi manna. Og líklega eru þeir enn færri sem bera gott skynbragð á þá möguleika sem vasareiknar gefa til að dýpka skilning nemenda á tölum og talnaaðgerðum. Hins vegar er engin ástæða til að ætla að fólk ráði ekki við að lesa niðurstöður rannsókna, setja sig inn í möguleika, íhuga, prófa, draga ályktanir og þoka breytingum áfram. Þær breytingar sem þurfa að eiga sér stað verða ekki unnar með flumbrugangi undir yfirskriftinni „þetta er ekkert mál“. Þetta er nefnilega alvörumál og ekki einfalt. En brýnt er það.

Tillagan hefur enn ekki fengið afgreiðslu. Þess í stað virðist hafa verið tekin ákvörðun um að beina sjónum að vasareiknum á annan hátt. Gefin hafa verið út hefti fyrir yngri nemendur þar sem þeim eru kynntir vasareiknar og jafnframt er að finna leiðbeiningar til kennara. Í þessum heftum eru vasareiknar nær því ekkert notaðir til að læra að reikna og

má víða spyrja hver tilgangur sé með vasareikninum í verkefnum annar en sá að kynna hlutinn. Öllu verra er þó að efnið slær ryki í augu þeim sem lífið til þekkja og gefur vísbendingar um að vasareiknar muni engu hagga um það hvernig við getum lært að reikna og munum gera það. Vandinn er nefnilega alls ekki sá að nemendur þurfi tilsögn í að ýta á takka. Það kunna börn miklu betur en hinir fullorðnu. Vandinn er allt annar og snýst ekki um börnin heldur hina fullorðnu. Það er þörf á að horfa mjög gagnrýnum augum á það hvernig við kennum að reikna og tilraunir til að horfa fram hjá því vandamáli munu óhjákvæmilega koma niður á uppvaxandi kynslóðum.

Í bókinni Vasareiknar sem kom út árið 1990 eru gefin mörg góð dæmi um vinnubrögð tengd notkun vasareikna. En halda þarf lengra. Hvað þarf þá að koma fram í námsefni sem er í takti við þá tíma sem við lifum á. Hvað er það sem skiptir máli? Það skiptir máli að hjálpa nemendum til að verða (eða viðhalda því að vera) glöggir á tölur, talnaðgerðir og talnasambönd. Þetta getum við kallað góðan talnaskilning og talað um að bera gott skynbragð á tölur og framsetningu á tölulegu formi. Til þess að ná þessu þarf stöðugt að gefa því gaum hvernig nemendur skilja raunveruleg viðfangsefni og að skapa þeim aðstæður til að glíma við þær á eigin forsendum og með þeim leiðum sem þeir sjá færar hverju sinni. Ótímabær kennsla í niðurnjörvuðum aðferðum, áður en nemandinn hefur gert sér grein fyrir því hvað viðfangsefnið snýst um, hefur gegnum tíðina kippt fótunum undan mörgum efnilegum reikningsmanninum. Það að taka tillit til skilnings nemenda og virða forsendur þeirra tefur ekki nám, heldur flýtir fyrir því af mörgum sökum. Í fyrsta lagi ber nemandi með sér í hugsuninni viðfangsefnið sem hann hefur skilið og þau verða honum oft tilefni til þess að skapa sér ný samsvarandi viðfangsefni. Hann heldur þannig við kunnáttu sinni án mikillar umhugsunar og hún er hluti af eðlilegum hugsunarforða hans í daglegu lífi. Í öðru lagi heldur nemandi því sjálfsöryggi sem fylgir þeim sem veit hvað hann er að gera og er því ekki markvisst eða ómeðvitað að forðast viðfangsefni af ákveðinni gerð og stunda ómeðvitað niðurrif á þeirri kunnáttu sem einhvern tíma var til staðar. Og í þriðja lagi er nemandi sem fær að taka þátt í að

byggja upp hæfni sína til að glíma við skiljanleg viðfangsefni færari um að bregðast við sér áður óþekktum viðfangsefnum en það eru einmitt þau sem lífið færir okkur oft og mikilvægt er að vera læs á þau.

Það er erfitt að segja þung orð

Undirrituð hefur stundað rannsóknir á þessu sviði, skrifað um það og kennt í nær tvo áratugi. Á ferðinni er stórmál sem allt of fáir virðast hafa gert sér grein fyrir af nokkurri dýpt. Þessi grein hefur verið lengi í skrifum. Ekki vegna þess að mig hafi skort umræðuefni á þessu sviði eða sé ekki viss um það hvað ætti að segja. Þar er af nægu að taka, út frá eigin starfi á þessum vettvangi, verkum nemenda minna og erlendum skrifum.

Nei, það sem hefur vafist fyrir mér er spurningin um það hvernig skynsamlegast sé að taka á málinu. Hvernig er hægt að segja á skiljanlegan máta við lesendur Flatarmála, og helst miklu fleiri, að hér sé mjög alvarlegt mál á ferðinni? Það hefur verið reynt að segja þetta um langt skeið á hæverskan, hvetjandi máta en það hefur ekki dugað til. Vandinn minn hefur verið að finna leið til að segja það sem þarf án þess að fyrta eða særa kennara sem telja sig vera að gera nemendum sínum gagn og búa þá undir að geta nýtt sér reikning vel í daglegu lífi og framhaldsnámi? Að segja þetta á styðjandi hátt, en fjalla samt af fullum þunga um alvöru málsins, er ekki einfalt. Hvort það hefur tekist dæmir hver og einn en vonandi láta þessi orð engan ósnertan.

- * Wheatley, G. H. and Shumway, R. (1992) The Potential for Calculators to Transform Elementary School Mathematics. In *Calculators in Mathematics Education* edited by James T Fey and Christian R Hirsch. National Council for Teachers of Mathematics.
- * Shuard, H (1992) CAN: Calculator Use in Primary Grades in England and Wales. In *Calculators in Mathematics Education* edited by James T Fey and Christian R Hirsch. National Council for Teachers of Mathematics.
- * Anna Kristjánsdóttir (1994) Kennari - er þetta rétt hjá mér? *Morgunblaðið* 12. apríl 1994.

Anna er prófessor við Kennaraháskóla Íslands og formaður Flatar.

Að sundra tölum og allt það...

um hugareikning og blaðreikning

Stuart Plunkett skrifaði grein fyrir tímaritið Mathematics in Schools í maí 1979. Grein þessi birtist einnig í bókinni *DEVELOPING MATHEMATICAL THINKING* þar sem er að finna safn ýmissa góðra greina. Þó að langt sé um liðið frá því að greinin birtist fyrst á hún enn fullt erindi. Heiti hennar er *Decomposition and all that rot*. Þar er fjallað um hversu fjölbreyttar aðferðir fólk notar til að reikna en í skólum er venjulega aðeins ein leið kennd. Greint er eðli skrifaðra reikninga og einnig er talað um notkun þeirra. Útreikningar á blaði eru í raun fátíðir. Einnig er greint frá eðli hugsaðra útreikninga. Gerð er tilraun til að flokka útreikninga eftir því hversu flóknir þeir eru og síðan er gerð tillaga um hvernig gott væri að ráðast í að reikna dæmin í þessum mismunandi flokkum. Hugareikningurinn er hafður í hávegum og mjög er litið til hans í tengslum við skrifuðu útreikningana. Þær aðferðir sem fólk beitir í hugareikningi byggja á skilningi og rökhugsun fremur en í hinum hefðbundnu skrifuðu útreikningum. Anna Kristjánsdóttir hefur þýtt þá kafla greinarinnar sem fjalla um eðli skrifaðra og hugsaðra algoritma. Þýðing þessi birtist hér á eftir.

Eðli skrifaðra algoritma

$$\begin{array}{r} 234 \\ +38 \\ \hline 272 \end{array}$$

1. Þeir eru *skrifaðir* svo að útreikningurinn er varanlegur og hægt að leiðrétta hann.
2. Þeir eru *staðlaðir* þannig að hægt er að koma því þannig fyrir að allir geri það sama.
3. Þeir eru *samþjappaðir* þannig að í hverju skrefi gerist margt, t.d. beiting á tengireglu og dreifireglu.
4. Þeir eru *fljótvirkir*. Til dæmis er við samlagningu byrjað á því að leggja saman einingar í stað tuga o.s.frv. til þess að þurfa ekki að breyta síðar.
5. Þeir geta verið nánast *sjálfvirkir*. Það er hægt að kenna þá og láta framkvæma þá án þess

Flatarmál 3 (1)

að viðkomandi skilji nokkurn skapaðan hlut í því sem hann er að gera.

6. Þeir eru *táknrænir*. Reikningurinn er einvörðungu tengdur umröðun tákna og án tengsla við raunveruleikann eða hliðstæð viðfangsefni. Lokasvarið kemur í ljós án þess að sá sem reiknar sé sérstaklega var við að komið sé að lokum.
7. Þeir eru *algildir* á þann hátt að þeir virka fyrir hvaða tölur sem er, háar eða lágar, heilar tölur eða tugabrot, með fáum eða mörgum aukastöfum. E.t.v. er þetta stærsti kostur þeirra og hvílir alfarið á eðli sérhvers sætiskerfis.
8. Þeir eru *greinandi* og gera þá kröfu til þess sem reiknar að tölurnar séu liðaðar sundur í einingar, tugi o.s.frv. við útreikninginn.
9. Ekki er auðvelt að „innbyrða“ þá og þeir eru ekki í góðu samræmi við hugsun manna um tölur.
10. Þeir *ýta undir vitræna leti* eða frestun á skilningi. Ekki er líklegt að sá sem reiknar velji sér leið innan lausnarferlisins og lítil umhugsun á sér stað um það hvers vegna það er gert sem gert er.

Eðli hugsaðra algoritma

1. Þeir eru *fljótandi* og oft erfitt að ná taki á þeim.
2. Þeir eru *breytilegir*. Jones skráði í rannsókn sinni meðal 80 barna á síðasta áratug 16 mismunandi algoritma til lausnar á dæminu 83-26. Af þeim voru 3 þekktir, staðlaðir, skriflegir algoritmar.
3. Þeir eru *sveigjanlegir* og geta lagað sig að þeim tölum sem verið er að reikna með.

$$\begin{array}{r} 244 \\ 254 \\ 264 \\ 272 \end{array}$$

- Sem dæmi má nefna: 83–79, 83–51 og 83–7.
4. Þeir eru *virkir* í þeim skilningi að sá, sem reiknar í huganum, er oftast, ef ekki alltaf, vel meðvitaður um það sem hann er að gera, hvaða leiðir hann velur og hversu réttir útreikningarnir eru.
 5. Þeir eru venjulega *heildstæðir* þannig að fengist er við tölurnar í heild fremur en að þær séu liðaðar sundur í tugi og einingar, t.d. má nefna $4 \cdot 35 = 2 \cdot 70 = 140$.
 6. Þeir eru oft *uppbyggjandi* þannig að markvisst sé unnið frá spurningu að svári eins og í: $37 + 28$ sem verður 37, 47, 57, 67, 65.
 7. Þeir *henta ekki til að skrá niður*. Engu að síður er hægt að skrá hlutaniðurstöður þeirra.
 8. Þeir *gera kröfu til skilnings alla leiðina* í útreikningunum. Nær öruggt má telja að barn sem fær rétta lausn í viðfangsefni sem það reiknar í huganum hafi skilið til fulls hvað það var að gera. Notkun hugareiknings eflir skilning. Hins vegar getur hugareikningur ekki gert kleift að reikna áður en barnið hefur skilið viðfangsefnið og hvað er á seyði.
 9. Þeir eru oft *myndrænir*. Oft tengjast þeir mynd af talnaröð eða talnaborði sem hvílir á sætiskerfi.

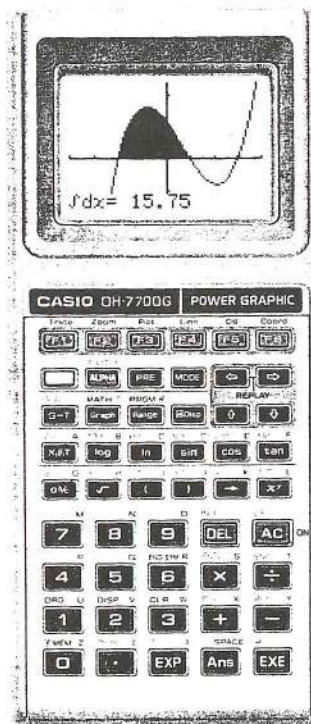
10. Íðulega *veita þeir fljótt vissa hugmynd um svárið* sem leitað er að. Þetta stafar að hluta til af því að reiknað er fyrst út úr stærstu hlutum talnanna.
11. Þeir eru *takmarkaðir* á þann veg að ekki er unnt að nota þá við erfið viðfangsefni eins og t.d. 269·23. Engu að síður henta þeir vel við talsvert fleiri viðfangsefni en mætti halda við að líta á reikningsdæmi nemenda á barnastigi.

Áhersla á hugareikning eykst þegar vasareiknar eru notaðir. Það eru þó nokkuð miklir möguleikar á að ýta á rangan takka og því er mikilvægt að nemendur geti metið hvort útkoman er fjarri lagi. Ennfremur eru mörg dæmi sem betur verða leyst í huganum en með vasareikni eða á blaði. Kerfisbundin kennsla í hugareikningi ætti að verða einn þáttur í námskrá og hann ætti að fá jafnmikið vægi og reikningur á blaði. Það verður að kenna börnum að skoða verkefni áður en lagt er til atlögu við þau. Margar leiðir eru færar en ein er jafnan greiðari en hinar. Bent skal á að tilgangur margra hinna svokölluðu vasareiknaverkefna er beinlínis að efla hugareikning.

Sólrún Harðardóttir tók saman.

CASIO®

CASIO OH-7700G POWER GRAPHIC
Grafískur reiknir til að leggja á myndvarpa.



Heimilistæki hf.

Reiknitæki í Réttarholtri á árum áður

Gunnar Ásgeirsson

Á 7. og 8. áratugunum urðu miklar breytingar á stærðfræðikennslu. Hér á eftir verður rífað upp hvernig þessar breytingar gengu fyrir sig í Réttarholtsskóla. Sjálfsagt hefur þetta verið með svipuðum hætti í flestum grunnskólum landsins þessi ár þó að aðstæður hafi verið nokkuð mismunandi eftir skólum. Ekki verður um tæmandi frásögn að ræða heldur aðeins drepíð á nokkra þætti í þessari sögu allri. Full ástæða er til að saga stærðfræðikennslunnar þessi ár verði skráð, og þá vonandi fyrr en síðar.

Þeir sem hafa verið við kennslu síðan 1960 eða lengur hafa upplifað miklar breytingar í kennsluháttum og kennsluáðferðum. Fram til 1960 eða þar um bil hafði skólakerfið og kennsluhættir verið í mjög föstum skorðum. Kynslóð eftir kynslóð hafði hlotið sömu uppfræðsluna og skapaði það vissa festu. Allir gátu fylgst með og skilið hvað skólarnir voru að gera og rætt um það af eigin reynslu þó langt væri um liðið frá því þeir luku sinni skólagöngu. En hræringar eftirstriðsáranna fóru að síast inn í skólakerfið í lok 6. áratugarins og á þeim 7. fóru breytingar að sjá dagsins ljós. Segja má að á árunum 1967 og 1968 hafi þetta umrót náð hámarki, a.m.k. erlendis. Landinn fór heldur hægar í sakirnar.

Það blésu ferskir vindar um stærðfræðikennsluna á þessum árum. Hæst bar þar tilkoma mengjafræðinnar sem opnaði nýja sýn til kennsluáðferða. Mörgum þótti mengjafræðin of byltingarkennd og koma of geyst inn í myndina en flestir tóku öllum breytingum fagnandi. Svo fór þó að mengjafræðin hefur látið undan síga og er nú lítið áberandi í kennslunni.

En tilkoma tölvunnar var það sem flestir bundu miklar vonir við. Á þessum árum, 1960–1970, var farið að hilla undir útbreiðslu þessa undratækis og rafeindatæknin gerði mögulegt að minnka umfang þeirra en jafnframt auka rekstraröryggi og vinnsluhraða. Undanfari einkatölvunnar var rafeindareiknivél. Það var undraverður munur á vinnslugetu gömlu vélrænu

reiknivélanna og rafeindareiknivélanna sem auk hinna hefðbundnu reikniáðgerða gátu framkvæmt ýmsa útreikninga með föstum rásum eins og t.d. að draga ferningsrót. Á 8. áratugnum varð síðan algjör bylting í þessum málum. Bylting er ef til vill ekki rétta orðið því að þróunin er enn í fullum gangi og sér ekki fyrir endann á henni. Hvernig þessi nýja tækni hélt innreið sína í skólakerfið og þá sérstaklega í stærðfræðikennsluna er, eins og áður sagði, óskráð saga og hún verður heldur ekki skráð hér og nú, aðeins reynt að segja lauslega frá því hvernig hlutirnir gengu fyrir sig í Réttarholtsskóla.

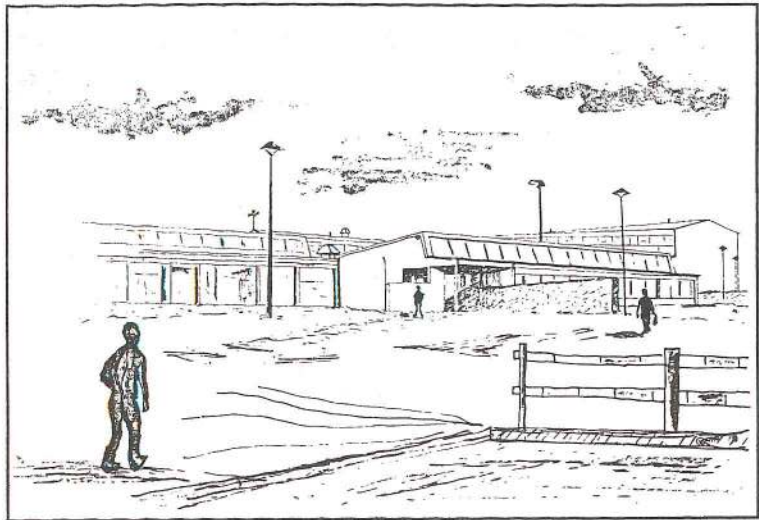
Skólar eru í eðli sínu íhaldssamar stofnanir. Þar verður að ríkja festa og öguð vinnubrögð til að árangur náist. Þeir þurfa því svigrúm til að breyta starfs- og kennsluháttum sínum. Það gefur augaleið að í svona örri þróun hafa þeir tilhneigingu til að dragast aftur úr og verða á eftir tímanum. Þetta á vissulega við um íslenska skólakerfið í dag. Það er á eftir tímanum.

Ég hef verið við kennslu frá 1959 og fylli því þann flokk kennara sem hefur gengið í gegnum allar þær tilraunir og breytingar sem gerðar hafa verið í grunnskólanum á þessu tímabili allt til dagsins í dag. Og allan tímann hef ég verið á sömu torfunni eða í Réttarholtsskóla. Þar á bæ var reynt að halda í við þróunina og studdi þar hvað annað, áhugasamir kennarar og framsýnir stjórnendur. Ekki síst á þetta við um stærðfræðina. Ég get fullyrt að ekkert námskeið fyrir grunnskólakennara í stærðfræði eða tengdum greinum hafi verið haldið á árunum 1960–1980 án þátttöku kennara frá Réttarholtsskóla. Þátttaka skólans í þróunarstarfi var og umtalsverð á þessu sviði. T.d. tók einn af kennurum skólans, Pálmi Jónsson, þá yfirkennari, þátt í að tilraunakenna nýtt námsefni í stærðfræði, en Pálmi varð síðar námstjóri í stærðfræði um tíma.

Á miðju þessu umrótatímabili, nánar tiltekið frá 1969 til 1973, tók ég mér frí frá kennslu og vann sem skrifstofumaður á

Orkustofnun. Á þeirri stofnun var vel fylgst með því sem var að gerast í tölvuheiminum. Þar var í fylkingarbrjósti, að öllum öðrum ólöstuðum, Glúmur Björnsson. Hann var skrifstofustjóri OS og yfirmaður minn þessi ár sem ég starfaði þar. Hann hafði mikinn áhuga á tölvum og öllu sem þeim viðkom enda mikill stærðfræðingur og töluglöggur maður. Það komst enginn, sem með honum starfaði, hjá því að smitast af þessum áhuga. Hann ræddi oft um það við mig að nauðsynlegt væri að kenna notkun reiknivéla í skólum alveg eins og vélritun. Og reiknivélakennslan væri best komin í tengslum við stærðfræði. Glúmur var ekki með öllu ókunnur skólakerfinu því að hann var um árabíl prófdómari í stærðfræði á unglingsprófi.

Þegar ég sneri aftur að kennslunni haustið 1973 fór ég strax að huga að því hvernig og hvar notkun reiknivéla gæti komið inn í námið. Vélrænar reiknivélar voru þá algengastar en rafeindavélar að byrja að ryðja sér til rúms. Enn var spölur í vasareiknana eins og við þekkjum þá í dag. Ekki var gert ráð fyrir notkun reiknivéla í námsefninu í stærðfræði og því ekki gott að koma þeim við í kennslunni. Það varð því nokkur bið á að hrinda hugmyndum um notkun þeirra í framkvæmd. Til að byrja með var reynt að vekja áhuga nemenda á reiknivélum með sýnikennslu og var þátttaka upp og ofan. Alltaf var þó einhver hópur nemenda sem sótti þessa tíma. Eitt sinn safnaði ég saman heilum flota af mismunandi reiknivélum og hélt sýningu fyrir nemendur skólans. Vildi ég með því sýna að margar gerðir reiknivéla væru til og hversu mismunandi möguleika þær byðu upp á. Vakti sýningin mikla athygli og var vel sótt. Verst var þó að í safninu voru vélar sem ég kundi ekkert á og hef sjálfsagt sett nokkuð ofan við það í augum nemenda. Ég man ekki hvort það var 1975 eða 1976 sem við eignuðumst fyrstu tölvuna. Það var Canon 167P og þótti undrataeki þegar hún kom á markaðinn (um 1972) en var fljót að úreldest og fékkst því fyrir gott verð. Forritunarmálið var sérstakt fyrir þessar vélar og var forritið slegið inn á lykilorðinu. En einnig var hægt að nota sérstök gataspjöld og hlaða forritið inn í tölvuna með þeim hætti. Með þessari tölvu



var hægt að kenna tæknina við forritun og undirstöðuatriðin. Sérstök áhersla var lögð á undirbúningsvinnu til dæmis með gerð flæðiritana. En sem fyrr var erfitt að finna þessari kennslu stað og rými og varð því minna úr þessu öllu en vonir stóðu til. Ekki var hægt að tengja þessa tölvu við prentara og takmarkaði það mjög notkunarmöguleika hennar.

En vasareiknarnir sóttu á. Í fyrstu voru þeir dýrir og í fárra eigu en það breyttist. Námsefni og kennslubækur miðuðu lengi vel ekki við notkun þeirra en 1976 kom út bókin *Verkefni í verslunarreikningi* eftir Önnu Kristjánsdóttur og Rúnar Þorvaldsson þar sem gert var ráð fyrir notkun vasareikna, og 1979 er fyrst talað um þá sem leyfilegt hjálpartæki á samræmdu prófi í stærðfræði. Upp úr því verða vasareiknarnir ómissandi hjálpartæki við stærðfræðikennslu. Til að byrja með þótti nemendum mjög spennandi að mega nota vasareikna og var þá oft gaman að láta þá bera saman hvernig var að reikna dæmi með gamla laginu og síðan með vasareikni svo að þeir myndu muninn. Nú er ljóminn farinn af þessu og öllu tekið sem sjálfsögðum hlut. Ég hef oft reynt að vekja upp gömlu stemninguna og bregða á leik því að með aðstoð vasareiknisins er vissulega hægt að skoða margt skemmtilegt í stærðfræðinni sem var bæði of tímafrekt og erfitt fyrir daga vasareikna. Í stórum hópi er það stundum til trafala hve margar tegundir af vasareiknum eru í umferð. Það liggur við að engir tveir nemendur séu með sams konar reikni og þarf að hafa það í huga þegar lagt er upp með einhver slík verkefni.

Tölvur eru nú komnar í flesta skóla og tölvukennsla orðin sérstök námsgrein alveg óháð stærðfræðinni. Við fengum fyrstu

tölvurnar haustið 1986 og hófum strax kennslu í greininni sem haldist hefur óslitið síðan.

Tölvur eru víða notaðar í stærðfræðikennslu og eru fjölmörg kennsluforrit á markaðnum. Réttarholtsskóli hefur komið svolítið við þá sögu. Árið 1990 kom út hjá Námsgagnastofnun „Verkefnablöð með forritinu GRAF“. Þessi blöð voru samin og prófuð í samvinnu Réttarholtsskóla og Reiknistofnunar HÍ.

Það var gaman að taka þátt í þessari þróun allri og ekki frítt við að því fylgi örflítt tregi

að rifja þetta upp. Þegar svona miklar breytingar ganga yfir fer ekki hjá því að eitt og annað sé reynt sem ekki gengur upp. Sennilega hefði mátt standa öðruvísi að ýmsu í þessu umróti öllu þegar málin eru skoðuð í ljósi reynslunar. Það er alltaf auðvelt að vera vitur eftir á. En það er ekki síður gaman að fylgjast með því sem er að gerast í dag á þessu sviði, að ekki sé talað um að reyna að sjá fram í tímann og hugsa um hvernig þetta getur orðið í framtíðinni.

Gunnar Ásgeirsson er kennari í Réttarholtsskóla.

Námsagi

Þankabrot í formi ósvaraðra spurninga

Halldór Páll Halldórsson

Námsagi! Í eyrum sumra hljómar þetta sem hin ljúfasta tónlist, aðrir skynja orðið sem hið mesta sarg. Oft hefur verið haft á orði að stærðfræðin sé til þess fallin og í raun sé það eitt af hennar markmiðum að þjálfar nemendur í námsaga. Í því sambandi er rætt um yfirfærslugildi stærðfræðinnar, sérlega hvað vinnubrögð varðar, og sýnist sitt hverjum. „Íslenskur agi“ er svo annar stór umræðugrundvöllur sem tengist að sjálfsögðu mismunandi hljómlægri (og huglægri) skynjun manna á orðinu. Hvað er námsagi og hvernig snertir hann stærðfræðinám (eða hvernig snertir stærðfræðinám námsaga)? Samkvæmt orðabók Menningarsjóðs er agi: „Tamning við reglusemi“. Ætla má því að námsagi sé slíkur agi við nám. Hafa nemendur okkar góðan námsaga? Hef ég sjálfur sem kennari góðan „vinnuaga“, þ.e. á sjálfum mér? Gengi í námi helst nánast alfarið í hendur við ástundun. Það eru engin ný sannindi. Ástundun krefst skipulagningar og skipulag er ekki til neins nema eftir því sé farið. Til þess að fara eftir skipulagi þarf sjálfsaga. Oft gætir feimni hjá kennurum í að gera kröfur til nemenda um góða skipulagningu og námsaga. Á Íslandi komast mjög margir nemendur í grunn- og framhaldsskólum upp með það að sinna námi sínu utan hefðbundinna kennslustunda mjög lítið. Þetta vita kennarar og spyrja hvað valdi.

Margt kemur til álita; er kannski þjóðfélagsaðstæðum um að kenna? Eru foreldrar alltaf að vinna og hafa ekki tíma til að sinna börnunum? Kennir skólinn markvisst námstækni? Hafa kennarar enga orku í að fylgja því eftir að nemendur læri heima því þeir kenna svo mikið? Eða er innbyggt í þjóðarsálina að fresta öllu til morguns? Það er margt sem réttlætir slakan námsaga – eða er ekki svo? Eða ætti kennarinn að horfa í eigin barm? Hvað get ég gert til að gera kennsluna skemmtilegri, fjölbreyttari og myndrænni? Skortir viðbótartíma? Svári hver fyrir sig.

En hvað með vinnubrögð og námsaga nemandans? Gæti verið að þar sé rót vandans? Má hugsast að of lítil áhersla sé lögð á aga við vinnu í íslenska skólakerfinu? Vantar ekki á stundvísi í mætingum og verkefnaskilum? Eru nemendur ekki látnir skila verkefnum? Er snyrtimennsku og góðri meðferð námsbóka og gagna ekki ábótavant? Er...?

Lesandi góður. Vonandi skil ég þig eftir í lausu lofti, svífandi eitt spurningarmerki. Svífðu rólega til jarðar, leitaðu að góðum lendingarstað og lentu mjúklega.

Höfundur er framhaldsskólakennari og deildarstjóri í stærðfræði og eðlisfræði við Fjölbraitarskóla Suðurlands á Selfossi.

Notkun vasareikna í stærðfræðinámi í Menntaskólanum í Reykjavík

Yngvi Pétursson

Undanfarin ár hafa vasareiknar fylgt þróun tölvutækninnar þannig að þeir eru orðnir fullkomnari, sérstaklega með tilkomu grafískra vasareikna, og verð þeirra lækkar stöðugt. Nemendur hafa til skamms tíma ekki fengið neinar sérstakar ráðleggingar um hvers konar vasareikna þeir eigi að kaupa og því hafa þeir verið með feikilega fjölbreytta flóru af vasareiknum en í mörgum tilvikum verið fákunnandi á gripina. Af þessum ástæðum var ákveðið haustið 1993 að marka stefnu um notkun og kennslu á vasareikna í stærðfræðinámi í MR. Hvers konar vasareikna var æskilegast að nota og hvers konar vasareikna var unnt að gera kröfu um að nemendur öfluðu sér? Mjög skiptar skoðanir voru um þetta meðal stærðfræðikennara, allt frá því að banna alla vasareikna upp í að krefjast grafískra og forritanlegra vasareikna. Mjög æskilegt þótti að nota grafíska vasareikna því að þeir bjóða upp á spennandi möguleika í stærðfræðikennslu en hins vegar eru þessir gripir enn það dýrir að ekki þótti verjandi að fara fram á að nemendur keyptu þá. Niðurstaðan var því sú að velja vasareikni af einfaldri gerð og krefjast þess að nemendur sem hófu nám 1993–1994 keyptu allir vasareikni af sömu gerð. Jafnframt var ákveðið að þessir nemendur mættu ekki nota aðra vasareikna á jóla- og vorprófum næstu fjögur ár, þ.e. á meðan þeir eru í skólanum. Þessi ákvörðun verður síðan endurskoðuð á hverju ári fyrir hvern nýjan árgang sem innritast í skólann. Var leitað til nokkurra umboða og beðið um tilboð í vasareikna. Fyrir valinu varð einfaldur vasareiknir með þeim

stærðfræðiföllum innbyggðum sem notuð eru á menntaskólastigi. Einnig vinnur hann úr blönduðum brotum og innbyggð eru forrit til að leysa annars stigs jöfnu og jöfnuhneppi með tveimur og þremur breytum. Reynslan af þessu hefur verið mjög góð. Nú er unnt með einföldum hætti að kenna nemendum á vasareiknana strax í 3. bekk (á fyrsta ári) þannig að nemendur kunni með þá að fara. Eftir sem áður er þess krafist að nemendur kunni sína stærðfræði. Þannig er t.d. enn sem fyrr kennt í 3. bekk að leysa annars stigs jöfnur. Nemendur geta notað vasareikni til að sannreyna niðurstöður sínar en ætlast er til að þeir sýni alla útreikninga. Í stærðfræðideildum eru haldin tvenns konar próf í stærðfræði, annað er lesið og hitt er ólesið. Í lesna prófinu eru engir vasareiknar leyfðir og þar höfum við því möguleika á að leggja fyrir dæmi þar sem vasareiknar eru ekki notaðir. Í ólesinni stærðfræði er hins vegar aðeins fyrrnefndur vasareiknir leyfður. Annar kostur við þessa lausn er að hún auðveldar yfirsetumönnum í stærðfræðiprófum að fylgjast með því að aðeins leyfileg tæki séu notuð í prófinu. Þar sem þessi tilraun tókst svo vel skólaárið 1993–1994 var haldið áfram með sama vasareikni 1994–1995. Um nemendur í 5. og 6. bekk (á þriðja og fjórða ári) gildir sú regla um notkun vasareikna í prófum að þeir mega nota óforritanlega vasareikna sem ekki geta geymt texta.

Yngvi er kennari í Menntaskólanum í Reykjavík.

Vasareiknir eða ekki?

Vangaveltur um notkun vasareikna á unglिंगastigi

Sveinn Ingimarsson

Ætti ég að nota vasareikni við þetta dæmi? Kannski verður kennarinn ekki ánægður ef ég nota vasareikninn? En er ég ekki öruggari með að svarið verði rétt ef ég reikna dæmið á vélina?

Hefur þú lesandi góður einhvern tíma staðið á lengdar og fylgst með nemanda í stærðfræðitíma sem gæti hafa velt þessum spurningum fyrir sér? Hér verða ekki gefin ráð um hvernig kennari geti brugðist við slíkum vangaveltum heldur reynt að varpa örlitlu ljósi á hvernig nemendur á unglिंगastigi nota vasareikna í stærðfræðinámi sínu.

Einfaldast væri að segja að nemendur noti vasareikna við allt sem þeir reikna en er það svo? Til að athuga þetta var lögð könnun fyrir nemendur tveggja 9. bekkja. Í öðrum hluta könnunarinnar voru nemendur beðnir að reikna án vasareiknis en í hinum hlutanum áttu þeir að segja til um hvort þeir notuðu vasareikni við verkefningu eða ekki.

Verkefningin voru af ýmsum toga: misflókin margföldunardæmi, samsett dæmi þar sem þurfti að hugsa til forgangs aðgerða, hrein samlagning, frádráttur þar sem ýmist þurfti að taka til láns eða ekki, deilingardæmi þar sem deilt var með eins stafs tölu eða tíu, tugabrot voru margfölduð með 10, 100 og 0,1, prósentureikningur kom einnig fyrir. Hluti dæmanna voru „orðadæmi“. Eitt dæmanna gekk út á að finna tölu sem margfölduð með 37 gefur tölu á bilinu 500-600. Skemmst er að segja frá því að í öðrum bekknum myndaðist stemming fyrir því að nota vasareikni sem allra minnst og þrátt fyrir að kennari legði ríka áherslu á að nota vasareikni eins og þeir væru vanir. Nemendur áttu alls ekki að reyna að sleppa að nota hann. Samt kom í ljós að meirihluti notaði vasareikni til að finna töluna til að margfalda 37 með. Það er, notaði vasareikninn til að leita að raunhæfri lausn.

Í hinum bekknum voru svörin með nokkuð öðru móti. Þar notuðu flestir nemendur vasareikni við allflest verkefningu enda handtækt að grípa til hans þótt ekki ætti að reikna annað en einfaldan frádrátt eða margföldun. Þó kom í ljós munur ef finna átti mismun tveggja talna eftir því hvort taka þurfti til láns eða ekki. Ef

taka þurfti til láns notuðu allir vasareikni en annars aðeins lítill hluti nemenda.

Til að fá meiri samanburð fengu nemendur örfá dæmi sem þeir áttu að reikna án vasareikna. Voru þau sambærileg við hin þar sem nemendur merktu við hvort þeir notuðu vasareikni eða ekki. Þar kom í ljós að nemendum gekk vel að margfalda saman tvær fjögurra stafa tölur og eins að finna tölu sem margfölduð með 17 gæfi útkomu á bilinu 300-400. Nemendur kunnu greinilega algoritmann að margfalda saman tvær tölur með því að setja upp á blað enda hafa þeir fengið þjálfun í slíkum dæmareikningi til margra ára. Samt var greinilegt að þeim er vasareiknirinn nærtækur og reiknuðu jafnvel einföldustu dæmi á vasareikninn en fengu svo jafnvel út rangt svar. Þá er rétt að spyrja: Hvers vegna reiknuðu nemendur dæmin ekki rétt jafnvel þó að þeir hefðu reikniáhöld við hendina? Er það kannski vegna þess að ofuráhersla hefur verið lögð á að finna rétta svarið á kostnað þess að verða fær um að meta hvort svar geti staðist? Svari hver fyrir sig.

Þrátt fyrir að þessi könnun sé ekki á nokkurn hátt vísindaleg gefur hún eilítlar vísbendingar. Að nemendum er vasareiknirinn nærtækur en þeim finnst e.t.v ekki rétt að nota hann. Þeir telja að ætlast sé til þess að þeir geti reiknað án hans. Þeim finnst það bera vott um góða kunnáttu í stærðfræði að geta reiknað í huganum, þ.e. án vasareiknis. Þeir eru að finna rétta svarið fremur en að finna leiðina að svarinu. Þó kemur í ljós að einmitt þannig er nemendum eðlilegt að nota vasareikninn og gera það ef viðfangsefningin bjóða upp á slíkt.

Þetta stutta spjall er fyrst og fremst hugsað til að vekja til umhugsunar. Hvernig er best að nemendur noti vasareikna? Við hvers konar viðfangsefni? Á kennarinn að ráða hvenær nemendur nota vasareikni eða ekki? Á það að standa í námskrá? Spurningarnar eru margar en svörin verða ekki til fyrr en skólamenn fara að hugsa hvernig vasareiknar eiga að koma inn í nám í stærðfræði. Það er viðfangsefni sem er aðkallandi.

Bannaðir börnum!

Sólrún Harðardóttir

Fyrstu viðbrögð margra við því að ungir nemendur noti vasareikna geta verið neikvæð. Oft stafa þessi viðbrögð af lítilli ígrundun.

Nemendur hætta ekki að hugsa þó að þeir noti vasareikni, þeir þurfa nefnilega að ákveða hvernig þeir ætla að nota hann. Lausnarferlið verður í brennidepli. Allt veltur á skilningnum.

Nemendur verða að skilja grundvallarhugtök að baki reikniáðgerðunum, annars hefðu þeir ekki forsendur til þess að nota vasareikninn. Þó má hugsa sér að nemendur myndu geta leyst uppsett dæmi með vasareikni án þess að skilja nokkurn hlut í því sem þeir eru að gera. Það má líka spyrja sig hversu mikið börn skilja í þeim uppsettu algoritnum sem þeim eru kenndir í skólum.

Bein þjálfun og ofuráhersla á skrifaða útreikninga minnkar. Sumir álíta að vegna þessa verði faldheiti og plúsheiti börnunum ekki eins kunnugleg og því verði þau ekki eins sleip í reikningi. Markviss kennsla í hugareikningi og líka í reikningi á blaði þó að í minni mæli sé, auk alls konar hlutbundinnar vinnu, ætti að vera næg reynsla til þess að nemendur fái tilfinningu fyrir þessum atriðum.

Margir telja að fólk hætti að reikna í huganum og komi til með að slá allt inn í vasareikninn. Við sjáum þetta víða í kringum okkur í þjóðfélaginu. Spyrja mætti hvernig stærðfræðimenntun þetta fólk hefur gengið í gegnum. Ef lögð er virkileg rækt við hugareikning þá má búast við að fólk hugsaði sig tvisvar um áður en það leitaði á náðir vasareiknisins því oft tekur styttri tíma að leysa dæmi í huganum heldur en að slá tölurnar inn í vasareikninn.

En hvernig verkefni eru það sem bjóða má ungum

nemendum?

Í fyrsta tölublaði annars árgangs Flatarmála skrifa þær María Aðalsteinsdóttir og Vala Stefánsdóttir ágæta grein þar sem þær lýsa verkefni sem þær lögðu fyrir í æfingakennslu meðal 6 ára barna.

Rannsóknir hafa sýnt að börn eru mjög fljót að átta sig á því hvernig nota á vasareikna. Það þarf ekki að eyða miklum tíma í að kenna þeim á tækið sjálft. Flest hafa líka kynnst vasareiknum heima hjá sér. Tölustafir vasareiknisins eru ekki framandi. Slíka tölustafi má sjá víða í kringum okkur, á búðarkössum, vogum, úrum og klukkum svo dæmi séu tekin. Það er frekar eðli vasareiknisins sem þarf að leggja áherslu á í upphafi. Nemendur bera jafnan svo mikið traust til þessa tækis að þeir trú á því jafnvel betur en sjálfum sér. Þeir verða jafnframt að gera sér grein fyrir að vasareiknar eru hentug tæki í mörgum tilvikum og það er ekkert svindl að nota vasareikna sér til aðstoðar. Þegar vasareiknar héldu innreið sína í skólana var talsvert um að verkefni gengju einmitt út að kenna nemendum að nota þá. Ímyndunaraflíð náði fyrst í stað ekki lengra. Fljótlega fóru þó skólamenn að sjá að vasareiknar voru í sjálfu sér öflugt kennslutæki. Hægt var að vinna með þá á frjóan og skemmtilegan hátt í stærðfræðináminu. Þó undarlegt megi virðast er talsvert til af jafnvel nýlegum verkefnum sem ganga út á að æfa nemendur í að slá inn í vasareikninn.

Meðal yngstu nemendanna má nota

vasareikna í þeim tilgangi að hjálpa þeim að þekkja tölustafina, lesa þá og einnig að telja. Til þess að æfa sig í að telja er mögulegt að nota fastann. Þá er 1 sleginn inn og síðan er ýtt tvisvar á + og síðan á =. Þá birtist 2. Til að



halda talningunni áfram er ýtt á = aftur og aftur. Sömu aðferð má beita þegar verið er að vinna með margföldunartöfluna en þá er settur annar stafur en 1 í byrjun t.d. 2 ef skoða á tvisvar-sinnum-töfluna, 3 ef skoða á þrisvar-sinnum-töfluna o.s.frv. (sbr. grein Maríu og Völu í 1. tölublaði 2. árgangs).

Til að æfa grunnaðgerðirnar fjórar mætti fara í ýmsa leiki þar sem segja á til um hvað kemur út áður en ýtt er á = takkann. Nemendur fá skjóta endurgjöf og má ætla að þeir reyni kappsamlega að leggja þessi atriði á minnið. Hægt er að setja slíka leiki fram á ýmsa vegu. Í bókinni *Vasareiknar* eru nokkrar leiðir kynntar.

Blanda mætti rökhugsun inn í leikina. Tveir leikmenn skiptast á um að slá inn einhverja tölu frá 1 til 9 og síðan styðja þeir á +. Sá sem verður fyrri til að fá 31 eða meira tapar. Sá vinnur sem fær út 30. Annað verkefni sem reynir á rökhugsun gengur út á að reyna að fá út tölu, t.d. 17 með því að nota einn tölustaf, t.d. 5 og grunnaðgerðirnar.

Vasareiknar geta hjálpað nemendum að skilja uppbyggingu sætiskerfisins. Hvað geta þeir gert til þess að losna við tölustafinn 7 úr tölunni 34709? Hvað gerist ef tveir tugir eru lagðir við töluna 65? Hvað gerist ef tveir tugir eru lagðir við 95?

Þannig mætti lengi halda áfram. Góð vasareiknanotkun í stærðfræðinámi einkennist af því að vasareiknirinn er markvisst notaður sem kennslutæki eða þá að hann er notaður í eðlilegu samhengi. Verkefni þar sem miklir reikningar eru forsenda þess að greina regluleika eru dæmigerð vasareiknaverkefni. Þá kemur vasareiknirinn í veg fyrir að nemandinn týni sér í útreikningum og missi þá þráðinn og sjónar á því sem skiptir máli.

Verkefni þar sem nemendur giska á og fá síðan staðfestingu með því að reikna með vasareikninum eru einnig dæmigerð vasareiknaverkefni. Ef um er að ræða vönduð verkefni eru þau ekki mjög augljós heldur þarf að vinna vel að lausn og venjulegast finnst hún ekki í fyrstu tilraun. Um leið og nemandi hefur giskað einu sinni hefur hann eitthvað til að ganga út frá við frekari vinnu. Hann giskar betur næst. Stundum fá börn það verkefni að reikna einhver tiltölulega einföld dæmi og fara svo yfir með vasareikni. Slík vinnubrögð sýna ekki raunverulega notkun á vasareiknum. Nemendur skilja ekki tilganginn með að eyða tíma í að reikna á blaði ef vasareiknir er við höndina. Vinnubrögðin

leiða til þeirrar tilfinningar að eitthvað sé svikult við það að nota vasareikni. Það er heldur ekki eðlilegt að láta nemendur nota vasareikna við dæmi sem eru frekar fallin til hugareiknings. Slík verkefni sjást því miður alltof oft í skólum.

Þegar talað er um að nota vasareikna í eðlilegu samhengi er átt við að þeir séu notaðir við viðfangsefni þar sem talsverðir útreikningar koma fyrir. Þetta eru ekki samhengislaus dæmi heldur viðfangsefni þar sem áherslan er á lausnarferlið. Vinna með vasareikna á þennan hátt endurspeglar notkun fullorðinna á vasareiknum.

Í kennslu minni í Grandaskóla fékk ég einu sinni þessa spurningu: „Hvað gerir þessi takki?“ Um var að ræða kvaðratrótarhnappinn. Í stað þess að segja: „Þú lærir það seinna“, sagði ég: „Vittu hvort þú og Sigrún getið fundið það út í sameiningu.“ Ég var nú reyndar á báðum áttum með hvort ég væri nú kannski að búast við of miklu af þessum 9 ára nemendum mínum. Helga fór í sætið sitt og ég sá að þær hvolfdu sér yfir vasareikninn og fóru strax að prófa einhverjar tölur. „Þetta er nú algjör vitleysa...“ „Nei, bíddu, nú kom almennileg tala!“ Þær höfðu stutt á 4 á undan kvaðratrótarmerkinu. „Prófum 44... nei, það virkar ekki.“ Ég greip þessa setningu á lofti og spurði þær hvað hefði ekki virkað. „44“ var svarið. „Nú hvað eigið þið við með að 44 virki ekki?“ „Þá kemur bara einhver vitleysa, engin almennileg tala.“ Ég stakk upp á að þær skrifuðu niður þær tölur sem „virkuðu“. Næst kom ég að þeim þar sem þær voru komnar með nokkrar tölur á blað: 1-4-9-16- Þær höfðu greinilega farið skipulega að. Ég leit á vasareikninn þeirra, þær voru að slá inn 23. „Núna er langtum lengra á milli“ sagði Sigrún. Þær höfðu skipst á að nota vasareikninn. Sigrún hafði fundið töluna 16 og nú var það Helga sem leitaði næstu tölu. Ég þóttist sjá að Sigrún var ekki alveg sátt við að Helga fengi að slá inn svona mikið. Talan 25 bættist í röðina. Allt í einu sá ég að Helga var búin að uppgötva eitthvað. Hún ljómaði: „Heyrðu, sjáðu Sigrún,... hérna var það einn, hérna tveir, hérna þrír, fjórir og svo núna fimm. SÓLRÚN, SÓLRÚN.“ Þetta urðu þær að segja mér. Næstu tölu fundu þær án þess að nota vasareikninn.

Sólrún er verkefnisstjóri á gagnasmiðju Kennaraháskóla Íslands.

Vasareiknar

Hjálpartæki í yngstu bekkjum grunnskólans Matthildur Guðmundsdóttir

Námsvísar

Allflestir grunnskólar Reykjavíkur senda námsvísa heim með nemendum. Í námsvísunum fyrir 1. – 4. bekk er víða getið um notkun vasareikna og í sumum tilfellum veit ég að vasareiknar eru notaðir þó þeirra sé ekki getið. Því miður eru vasareikar ekki meðal námsgagna í öllum skólum.

Námskeið

Á undanförunum 6 árum hefur aukist mjög umræða um notkun vasareikna í kjölfar námskeiða sem haldin hafa verið á vegum endurmenntunardeildar KHÍ. Haldin hafa verið sumarnámskeið og einnig á veturna í samvinnu við Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur-umdæmis. Öllum þessum námskeiðum hefur Anna Kristjánsdóttir prófessor stjórnað eða verið til ráðgjafar. Eflaust hafa námskeið einnig verið haldin í fleiri umdæmum en þar sem ég hef ekki fylgst nægilega vel með því get ég þeirra ekki hér.

Mér er kunnugt um að í framhaldi af námskeiðum báðu kennarar um að keyptir væru vasareiknar í skólana og skipulögðu verkefni með nemendum sínum þar sem notkun vasareikna gaf tækifæri til að beita hugareikningi, vinna með fjölbreyttar tölur (heilar tölur og brot) og háar tölur urðu ekkert til að óttast í stærðfræði ungra barna.

Skiptar skoðanir

Það virðist vera að kennarar í hverjum árgangi ákveði hvort nota skuli vasareikna eða ekki því að í námsvísunum frá sumum skólum er t.d. getið um vasareikna í einum eða tveimur árgöngum í 1. – 4. bekk en ekki í öðrum og engin regla sjáanleg um að einhver ákveðin árgangur verði fyrir valinu frekar en annar. Það gat verið í 1. og 4. bekk en ekki í 2. og 3. bekk í sama skólanum. Það lítur út fyrir að innan margra skóla hafi ekki verið mótað heildarskipulag hvað varðar notkun vasareikna. Skoðanir eru skiptar því að sumir eru hræddir við að nemendur læri ekki stærðfræði

ef vægi hefðbundinna útreikninga á blaði sé minnkað, láta mun nærri að sú vinna sé 60–70 af hundraði. Tími þarf að vera til hugleiðinga, hugareiknings og lausna margvíslegra þrauta, rökstuðnings og umræða svo eitthvað sé nefnt af öðrum mikilvægum þáttum.

Ráðstefna í Svíþjóð

Á fjölmennri ráðstefnu sem bar nafnið "Stærðfræði án landamæra" og var haldin fyrir ári síðan í Gautaborg, voru fluttir fyrirlestrar um notkun vasareikna. Þar kom m.a. fram:

- * Byggja þarf upp möguleika nemenda til að nota vasareikna
- * Vasareikna er gott að nota við hugareikning
- * Sýna þarf fram á kerfisbundna möguleika vasareikna og mikilvægustu eiginleika
- * Beina þarf virkni nemenda og hugmyndaflugi að möguleikum vasareiknisins
- * Vasareiknar eru hjálpartæki við þrautalausnir
- * Ungir nemendur kynnast einföldum gerðum vasareikna svo þeir verði betur undir búnir að nota flóknari tæki á eldri stigum

Alþjóðleg notkun vasareikna Vasareiknar gefa nýja og spennandi möguleika í stærðfræðinámi. Margir óttuðust að auðvelt aðgengi að vasareiknum myndi skaða stærðfræðilega þekkingu grunnskólansnemenda, einkum færni þeirra til útreikninga. Í riti bandarískra stærðfræðikennara (Arithmetic Teacher) frá mars '94 er sagt frá því að miklar rannsóknir staðfesti að notkun vasareikna bæti frekar en hindri nám nemenda (Humbreee og Dessert '92). Óttinn ætti því að vera ástæðulaus en í þess stað þarf að fara fram endurskoðun á námskrá í stærðfræði þar sem tekið er tillit til tækni nútímans og endurskoðað hvort sú leikni sem talin var nauðsynleg fyrir 20–30 árum verður ómissandi á 21. öldinni?

Hörft til baka og til framtíðar
 Nú fyrir jólin var í áður nefndu riti bandarísku stærðfræðikennaranna vakin athygli á að í 20 ár hafi verið mælt með notkun vasareikna við stærðfræðinám. Til að byrja með skyldi ekki fara neðar en í 8. bekk en fyrir 15 árum áttu þeir að verða hjálpargagn fyrir alla aldursflokka og gefnar voru út kennslubækur þar sem sérstakar síður voru í lok hvers kafla til úrvinnslu með vasareikna. Fleiri bækur voru gefnar út og vasareiknaverkefnum fjölgaði til muna. Fyrir 5 árum var loks farið að endurskipuleggja bækur með þeim hætti að sérstökum vasareiknaverkefnum var fækkað og viðfangsefnum bókanna breytt með tilliti til þess að vasareiknar eru sjálfsgöð hjálpartæki sem nota má án þess að verkefni séu sérstaklega merkt sem slík. Aukin áhersla er lögð á hugareikning, ályktanir, námundun, þrautalausnir og frelsi nemenda til að finna eigin leiðir til lausna á fjölbreyttum viðfangsefnum. Greinarhöfundum finnst samt ekki

nóg gert og í lok greinar varpa þær Barbara J. Reys og Nancy L. Smith fram spurningum sem þær leggja áherslu á að þurfi að svara:
 1. Eiga nemendur að læra og þjálfá skráningu á stöðluðum reglubundnum aðferðum til að leysa viðfangsefni í stærðfræði?
 2. Ef svo er, hverjar þá, hvenær og í hvaða þyngdarflokki?

Lokaorð

Það er löngu tímabært að kennarar og foreldrar leyfi notkun vasareikna án aldurstakmarkana en sjái jafnframt til þess að þeir séu notaðir af ábyrgð þar sem vasareiknar verða ekki bara skemmtilegt leikfang eða sparitæki, heldur nauðsynlegt hjálpargagn eins og saumavélin við fatasauminn og tölvan við vélritunina.

Matthildur Guðmundsdóttir er kennslufulltrúi á Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur.

CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN

Citizen reiknivélar



Eigum fyrirliggjandi mikið úrval af hinum vönduðu Citizen reiknivélum.

Hvort sem þig vantar vasareiknivél fyrir skólann eða borðreiknivél fyrir skrifstofuna þá finnur þú það sem þú þarft hjá okkur!



NÝHERJI

SKAFTAHLÍÐ 24 - Sími 569 7700
Alltaf skrefi á undan

CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN CITIZEN

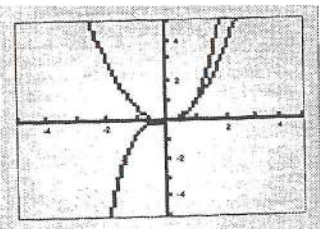
Athugun ferla með grafískum vasareikni

Sveinn Ingimarsson

Notkun grafískra vasareikna gefur nemendum tækifæri til að sjá betur tengsl milli algebru og grafískrar útfærslu. Slík vinna gefur möguleika á nýju sjónarhorni sem byggir á myndrænni framsetningu grafísku reiknanna. Einn þáttur sem þarf að huga að er val á kvörðum x-áss og y-áss þegar vasareiknirinn er látinn teikna gröf. Stundum koma eiginleikar grafa ekki fram ef valinn er stór kvarði við teikningu grafsins. Þannig virðist Dow Jones vísitalan reika til frá degi til dags vegna fréttu fjölmiðla. En ef litið er yfir lengra tímabil þá eiga breytingar á vísitölunni sér hagfræðilegar forsendur. Hér verða tekin dæmi um gröf sem virðast við fyrstu sýn ósköp venjuleg en ef betur er að gáð kemur í ljós að þau búa yfir duldu eiginleikum. Nemendur sem vinna verkefni þar sem fengist er við val á kvörðum kynnast mikilvægi þess að velja heppilega kvarða, þeir skilja betur áhrif þess ef breytt er um kvarða fyrir tiltekið graf og þeir gera sér grein fyrir hvernig leysa má vandamál sem upp kunna að koma við að teikna ferla.

Að finna flatarmál milli ferla

Eitt viðfangsefni í stærðfræði er að finna flatarmál milli ferla. Ef skoðaðir eru ferlar fallanna $y = x^2$ og $y = x^3$ kemur í ljós að á bilinu frá 0 til 1 falla ferlarnir nærri saman. Nemendur geta því auðveldlega dregið ranga ályktun þegar þeir nota grafískan vasareikni



Mynd 1

ef kvarðinn, sem birtist í glugganum, er af óheppilegri stærð. Ef valin er stærðin $(-5, 5) \times (-5, 5)$ þá virðast ferlarnir falla alveg saman á bilinu frá 0 og upp í 1 (sjá mynd). Þá eru töluverðar líkur á að nemendur álykti að á bilinu falli ferlarnir alveg saman. Til að komast fyrir þennan vanda er hægt að stækka bilið upp og þá sést að punkturinn $(0, 0)$ er eini sameiginlegi punktur þessara ferla.

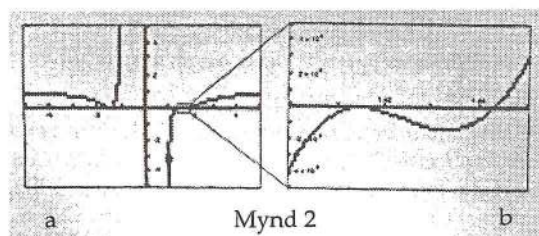
Flatarmálið milli ferlanna er auðvitað hægt að reikna en með því að nota grafískan vasareikni má sýna fram á muninn milli þess að teikna gröfin á vasareikni og sjá hvernig föllin haga sér nærri $(0, 0)$ myndrænt og þess að reikna flatarmálið út í höndunum án þess nokkur tíma að sjá hvernig föllin líta út.

Könnun á ræðu falli

Til þess að kanna

$$\text{fallið } f(x) = \frac{x^7 - 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 12}{x^7}$$

er ákjósanlegt að teikna það. Mynd 2a ber ekki með sér að fallið hagi sér undarlega. En ef póstítífa rót fallsins er könnuð nánar (sjá mynd 2b) kemur samt í ljós að það er ekki einungis ein póstítíf rót heldur tvær sem falla saman á mynd a. Til þess að fá fram mynd b þarf að stækka upp svæðið næst póstítífu rótunum. Ekki gengur að hafa sama kvarða á báðum ásnum, þá hverfur ferillinn saman við x-ásinn.



Mynd 2

Betra er að stækka myndina í áföngum.

Ástæða þess að póstítífu ræturnar falla nærri saman sést ef fallið er skoðað á þáttuðu formi:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 2)^2(x^3 - 3)}{x^7}$$

Rætur þessa falls eru: $2^{1/2}$, $-2^{1/2}$ og $3^{1/3}$ en tvær af þessum rótum liggja mjög nærri hvor annarri þ.e. $2^{1/2}$ og $3^{1/3}$.

Þessi tvö dæmi sýna nauðsyn þess að nemendur geti kannað þá ferla sem þeir fást við. Að velja mismunandi kvarða á ásana er oft nauðsynlegt til að koma auga á dulda eiginleika sem föllin búa yfir.

Sveinn er kennari í Hagaskóla.

Pýðing á grein Jon L. Higgins:

Vasareiknar og almenn skynsemi

Meyvant Þórólfsson

Inngangur

Notkun vasareikna kemur ekki í staðinn fyrir þörfina á að kunna grundvallaratriði í reikningi. Vasareiknar breyta heldur ekki þörfinni á að geta reiknað í huganum eða á blaði með kerfisbundinni framsetningu. Athuganir hafa sýnt að hægt er að þjálfá hjá nemendum vinnubrögð sem miða að því að þeir beiti eigin skynsemi við notkun vasareikna og nota þá ekki þegar hentugra er að reikna á annan hátt. Eftirfarandi verkefni úr bók amerísku stærðfræðikennara-samtakanna NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, sýnir glöggð hvernig þjálfun í hugareikningi og notkun vasareikna geta farið vel saman.

Útbúinn er spilastokkur þar sem hvert kort hefur að geyma verð á einhverjum hlut og afslátt í prósentum (t.d. 1095 kr., 15%). Tveir spila og hefur hvor sinn vasareikninn hjá sér. Annar leikmaður snýr við spili þannig að verð og afsláttur birtast. Síðan hafa báðir ákveðinn tíma til að áætla afsláttarverð og skrifa niður á blað. Þeir nota vasareikna til að finna nákvæmt afsláttarverð og sá sem áætlaði næst rétta svarinu fær stig. Spil upp í tíu stig tekur u.þ.b. tíu mínútur (bls. 97).

Þjálfun í slumpreikningi er mjög mikilvæg samfara aukinni notkun vasareikna. Með þeim hætti verður nemendum samt að líta allar niðurstöður sínar gagnrýnum augum. Nemandi sem fær niðurstöðuna 676,8 þegar hann margfaldar 9,4 · 7,2 hefur gleymt að slá á kommuna í 7,2. Það er grundvallarskylda kennara að innræta hjá nemendum að beita eigin skynsemi í stað þess að treysta eingöngu á gervigreind vélanna.

Hér fer á eftir nokkuð stytta pýðing á greininni *Calculators and Common Sense* eftir Jon L. Higgins, lektor við kennaradeild Ríkisháskólans í Ohio í Bandaríkjunum. Inntakið í grein Higgins er að hið raunverulega álitamál er ekki hvort vasareiknar skuli notaðir í stærðfræðinámi heldur hvernig þeir skuli notaðir.

Flatarmál 3 (1)

Grein Jon Higgins

Með útkomu rits NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, í mars 1989 fylgdist ég með viðbrögðum fjölmiðla við þessu mikilvæga plaggi. Í nánast öllum blöðum sem fjölluðu um málið var meginathygli vakin á því að NCTM lögðu til að vasareiknar væru notaðir í stærðfræðikennslu. Þvílík vonbrigði! Félagar í NCTM vissu vel að í mars 1989 þóttu þetta engin tíðindi. Öllu bagalegri var sú staðreynd að grundvallarboðskapur ritsins fékk litla umfjöllun.

Vasareiknar verða líklega alltaf áhuga-verðara umræðuefni en sértækar hugmyndir eins og rammanámskrá í stærðfræði. Kominn er tími til að beina umræðunni um vasareikna inn á skynsamlegar brautir í stað þess að óska þess að hún leggist niður. Þrátt fyrir hina miklu umfjöllun sem deilur og rökræður um notkun vasareikna hafa fengið tel ég að við séum að sóa tíma og orku í einskis nýtar umræður. Hið raunverulega álitamál er ekki hvort vasareiknar skuli notaðir í stærðfræðikennslu heldur hvernig vasareiknar skuli notaðir í stærðfræðikennslu. Við gleymum þessum mismunandi nálgunum þegar við lýsum yfir að notkun vasareikna sé nauðsynleg.

Í mörgum tilvikum eru andstæðingar notkunar vasareikna og þeir sem eru hlynntir notkun þeirra að tala sitt hvort málið. Þessir tveir gagnaðilar virðast ekki gera sér grein fyrir að þeir eru að tala um ólíkar leiðir við notkun vasareikna. Útkoman verðu einatt sú sama: báðir aðilar geta bent á viðeigandi „hræðslusögur“ máli sínu til stuðnings. Nýlega heimsótti ég bekk sem fyrsta árs nemandi mínir höfðu verið að athuga. Einn þeirra býsnaðist yfir því að nemandur gætu ekki fundið 10% af tölu án vasareiknis. Frábært dæmi fyrir andstæðinga vasareikna! Ef reiknivélar eru notaðar í staðinn fyrir

mannlega hugsun þá hrakar mannhuganum örugglega. Það er mannlegt að reyna að forðast erfið heilabrot og í hraða nútímans geta slík úrræði verið mikilvæg í hinni hörðu lífsbaráttu. Engu að síður gengur ekki upp að forðast hugsun í námi. Notkun vasareikna til að komast hjá því að hugsa er út í hött. Að slá dæmi úr námsbók inn í vasareikni og þrýsta svo á jafnaðarmerkishnappinn er vænleg leið til að komast hjá því að hugsa. Kennarar sem láta sér ekki detta í hug aðrar leiðir til að nota vasareikna ættu að hætta notkun þeirra í stærðfræðikennslu strax.

En vitanlega má nota vasareikna á annan hátt. Einn nemi minn sagðist aldrei hafa náð að kenna um hugtakið "pí" fyrir en hún fór að nota vasareikna. Nemendur hennar höfðu mælt ummál og þvermál í gríð og erg, en þegar komið var að því að deila festust þeir í þeirri vinnu og hugmyndin um hlutfallið gleymdist. Ef vasareiknar eru notaðir sparast tíminn sem fer í að deila svo að nemendur geta hugsað um mikilvægari hluti. Spennandi könnunarverkefni í þessum efnum gæti verið að sýna nemendum þversnið af misstórum sívölum hlutum – t.d. lyfjaglösum, pappaglösum eða ruslakörfum og biðja þá svo að spá fyrir um stærð kvótans sem kæmi út ef ummál hvers hlutar væri deilt með þvermálinu. Flest börn og margir fullorðnir myndu samþykkja að ruslakarfan gæfi hærri útkomu úr deilingunni en lyfjaglasíð. Að mæla ummál og þvermál og nota svo vasareikna til að deila, gerir nemendum strax kleift að sjá að munur er ekki sjáanlegur fyrir en við fyrsta eða annan aukastaf. Hér hefur notkun vasareikna beint orku og athygli frá reikningi að hugmyndinni sem liggur að baki viðfangsefninu. En vasareiknanotkunin hefur ekki komið í stað hugsunar.

Hugleiðum aðeins það að reikna 10 prósent. „Að taka prósentu“ virðist vera eins og hver önnur reikniaðgerð og ef maður notar vasareikni með prósentuhnappi er eins og ný reikniaðgerð sé á ferðinni. En er það „að taka prósentu“ tengt öðrum aðgerðum? Ef 50 prósent eru helmingur af einhverju og 33 1/3 prósent þriðjungur, hvað þá með 20 prósent eða 10 prósent? Eru þau einnig tengd deilingu? Sé vasareiknir notaðir til að svara slíkum spurningum þá held ég því fram að hann sé ekki notaður í stað hugsunar. Hann er notaður til að beina athyglinni frá reikniaðgerðum til hugmyndanna sem liggja þar að baki.

En hvernig nær maður þessum breyttu áherslum? Framangreind dæmi, ásamt mörgum öðrum sem lesendur gætu prófað, eiga eitt sameiginlegt. Í þeim eru vasareiknar notaðir til að rannsaka. Lykillinn að rannsóknnum í skólastofunni er að gefa sér nauðsynlegan tíma. Og tíma má einmitt spara með notkun vasareikna, tíma til að leita, til að koma með tilgátur, til að prófa – eða með öðrum orðum: tíma til að hugsa. Ef vasareiknar eru notaðir til að rannsaka og hvetja til rökhusunar, þá og aðeins þá er þörf fyrir þá í stærðfræðinámi. En ef vasareiknar eru notaðir til að forðast hugsun um stærðfræðileg vandamál og þrautir þá ætti vitanlega að banna þá. Kannski ætti NCTM að gefa út leyfisbréf til að fá að nota vasareikna í kennslu; þeim kennurum sem gætu ekki gefið dæmi um stærðfræðirannsóknir með vasareiknum ætti að banna notkun þeirra.

Loks vil ég nefna að mig hefur allengi grunað að eitt það sem greinir góðan kennara frá miðlungsgóðum kennara er að góður kennari tekur aldrei neitt sem sjálfsagðan hlut! Við höfum tilhneigingu til að halda að nemendur séu dómbærir á það hvenær notkun vasareikna sé við hæfi og hvenær ekki. Sú trú er nánast örugglega byggð á fölskum forsendum. Við þurfum greinilega að kenna nemendum hvenær hugareikningur og blaðreikningur eiga frekar við en notkun vasareikna. Við þurfum að eiga greinargóðar viðræður við nemendur okkar um vænlegustu leiðir til að nota vasareikna. Að kunna að nota vasareikni felur einnig í sér þekkingu á því hvenær er við hæfi að nota hann.

„Ætti að nota vasareikna í öllu stærðfræðinámi?“. Ég held að þessi spurning missi marks og eigi ekki við. Spurningin: „Hvernig á að nota vasareikna í stærðfræðikennslu?“ er hins vegar viðeigandi. Þegar maður hugsar um þessa spurningu segir almenn skynsemi manni að notkun vasareikna eigi stundum við og stundum ekki. Kominn er tími til að beita almennri skynsemi í stað þess að gefa út allsherjarfyrirskipun um notkun vasareikna eða allsherjarbann við notkun þeirra.

Jon L. Higgins

Meyvant Þórólfsson, kennari í Vogaskóla og stjórnarmaður í Fleti, þýddi úr marshefti tímaritsins Arithmetic Teacher 1990.

FLATAR ^{mál}

1. tbl. 3. árg.

Anna Kristjánsdóttir Hlutverk vasareikna í reikningsnámi	1
Að sundra tölum og allt það... um hugareikning og blaðreikning	8
Gunnar Ásgeirsson Reiknitæki í Réttarholti á árum áður	11
Halldór Páll Halldórsson Námsagi	12
Yngvi Pétursson Notkun vasareikna í stærðfræðinámi í Menntaskólanum í Reykjavík	13
Sveinn Ingimarsson Vasareiknar eða ekki?	14
Sólrún Harðardóttir Bannaðir börnum!	15
Matthildur Guðmundsdóttir Vasareiknar Hjálpartæki í yngstu bekkjum grunnskólans	17
Sveinn Ingimarsson Athugun ferla með grafískum vasareikni	19
Vasareiknar og almenn skynsemi Grein Jon L. Higgins í þýðingu Meyvants Þórólfssonar	20