# FLATARMÁL

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆÐIKENNARA
1. TBL., 18. ÁRG.



2011

**Flatarmál** 1. tbl., 18. árg.
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara


**Útgefandi**
Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

**Stjórn Flatar**
Rannveig Þorvaldsdóttir *formaður*
Öldutúnsskóla
Þóra Guðrún Einarsdóttir *gjaldkeri*
Heiðarskóla
Laufey Einarsdóttir *ritari*
Korpuskóla
Valgarð Már Jakobsson *vefumsjón*
Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ
Rannveig A. Guðmundsdóttir *meðstjórnandi*
Breiðagerðisskóla
Kristján Sigurðsson *ritstjóri Flatarmála*

**Ritnefnd Flatarmála**
Kristján Sigurðsson *ritstjóri*
Þórgunnur Óttarsdóttir, Brekkubæjarskóla

**Prófarkalestur**
Birna Hugrún Bjarnardóttir
Laufey Skúladóttir

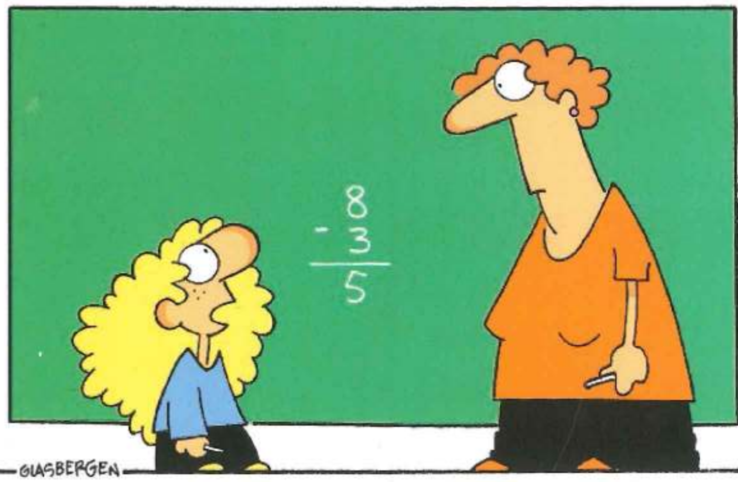
**Umbrot og myndvinnsla**
Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

**Prentun**
Prentsmiðjan Oddi ehf.

**Veffang / netfang**
flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

**Til höfunda greina í Flatarmálum**

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.




**„Hver hefur rétt til þess að taka þrjá frá átta? Af hverju ætti átta að vera lítillækkuð niður í lægra gildið fimm til þess eins að fullnægja þráhyggju einhvers gagnvart stærðfræði?“**

# *Heil og sæl öllsömul!*

Þetta tölublað Flatarmála er helgað stærðfræði og spilum og er margt áhugaverðra greina í blaðinu að þessu sinni sem endranær. Margir hafa áhuga á spilum og leikjum og njóta sín t.d. í glímu við tölur og mynstur og læra þar stærðfræði sem oft er erfiðara að nema í „hefðbundinni stærðfræðikennslu“. Vonandi njótið þið blaðsins eins vel og ég naut þess að vinna að því kæru lesendur. Ég er nýr ritstjóri Flatarmála og þetta er fyrsta tölublaðið sem ég ritstýri. Það hefði ég aldrei getað nema með góðra manna hjálp svo sem greinahöfunda og yfirlesara greinanna. Án þess að draga neinn sérstaklega út úr vil ég þó minnast á Þórgunni Óttarsdóttur sem starfar með mér í ritnefnd. Hún leiddi mig í gegnum starf ritstjórans skref fyrir skref af reynslu sinni og þekkingu. Blaðið hefði ekki komið út nema með hennar hjálp.

Eins og fram kemur á heimasíðu Flatar er Flatarmál vettvangur fyrir fræðigreinar, viðtöl, reynslusögur kennara úr skólastofunni og kynningar á viðfangsefnum og vinnubrögðum í stærðfræðinámi og -kennslu. Ritnefnd leggur áherslu á að Flatarmál höfði til félagsmanna af öllum skólastigum og því er mikilvægt að félagsmenn og aðrir áhugamenn um stærðfræðinám og stærðfræðikennslu birti greinar og pistla í Flatarmálum. Þið eruð eindregið hvött til að hafa samband vegna næsta blaðs sem kemur út á haustmánuðum og koma með ábendingar um efni svo sem greinar, reynslusögur eða annað sem ykkur dettur í hug.

Bestu kveðjur,

fyrir hönd Flatar
*Kristján Sigurðsson* ritstjóri

**Í sérheftinu eru valdar greinar sem kennarar gætu haft áhuga á og not af í kennslu. Greinarnar eru þessar:**

*Maths is good for you: Web-based history of mathematics resources for young mathematicians (and their teachers)* eftir Snezana Lawrence. 21 árg., 2. hefti, 2006, bls. 90–96.

*A quarter century of US 'math wars' and political partisanship,* eftir David Klein. 22. árg., 1. hefti, 2007, bls. 22–33.

*Ancient accounting in the modern mathematics classroom* eftir Kathleen Clark og Eleanor Robson. 23. árgangur, 3. hefti, 2008, bls. 129–142.

*A teaching module on the history of public-key cryptography and RSA*, eftir Uffe Thomas Jankvist. 23. árg., 3. hefti, október 2008, bls. 157–168.

*A puzzle rhyme from 1782*, eftir Kristínu Bjarnadóttur. 24. árg., 1. tbl. 2009, bls. 12–19.

Eins og sjá má fjalla greinarnar um ýmis efni. Greinin eftir Snezana Lawrence fjallar um stærðfræðikennslu byggða á sögulegum grunni. Snezana bendir einnig á heppilegt efni finnanlegt á vefnum fyrir kennslu 11 – 18 ára nemenda. Grein Davids Klein fjallar um það sem nefnt hefur verið „stærðfræðistríðið", átök sem hafa átt sér stað um stærðfræðikennslu í Bandaríkjunum. Kathleen Clark og Eleanor Robson segja frá fornum bókhaldsaðferðum í nútímakennslustofum og Uffe Th. Jankvist hefur unnið upp kennsluefni um dulmálsfræði og sögu hennar.

Síðasta greinin er íslensk. Hún fjallar um gamla íslenska gátu í þremur ferskeytlum um 30 fugla af þremur tegundum, að verðgildi 30 álnir, og viðfangsefnið er að finna verð hverrar tegundar um sig. Efni greinarinnar hefur áður birst í *Tímariti Máls og Menningar, TMM*, nr. 1, 2008, en í ensku útgáfunni er einnig nefnt að líta megi á vísnagerð sem eina mynd stærðfræðiiðkunar.

Þá má geta þess að opinn aðgangur er að þriðja tölublaði tímaritsins frá ársinu 2010, sem er helgað sögu stærðfræðikennslu, og fyrsta tölublaði þessa árs.

## *Vefrit BSHM*

Út er komið sérstakt rafrænt hefti af tímariti félagsins *British Society for the History of Mathematics.*

**Heftið er að finna á:**
http://bit.ly/dXhTIk

## GRÍNAKTUGA STÆRÐFRÆÐI-HORNIÐ

Einu sinni var hópur af **föllum** saman í rútuferðalagi. Rútan stoppaði við fallegan trjálund og föllin fóru út til að teygja úr sér og fá sér frískt loft. Þá stekkur skyndilega stór og grimmur **úlfur** úr felum bak við tré og öskrar á föllin: *Ég er stór og grimmur úlfur og ef þið hunskist ekki héðan ætla ég að diffra ykkur öll!*. Skelfingu lostin þustu föllin inn í rútuna aftur, nema eitt sem stóð bara ósköp rólegt og horfði beint á úlfinn. *Heyrðirðu ekki hvað ég sagði?*, öskraði úlfurinn aftur. *Ég ætla að diffra ykkur öll ef þið farið ekki!* Fallið hugrakka yppti bara öxlum, glotti og sagði: *Þú getur ekki diffrað mig. Ég er nefnilega E í x-ta.*

„Eitt af markmiðum Spilavina er að vekja áhuga almennings á spilum sem og að vekja áhuga kennara á að nota spil í kennslu."

# SPIL&
## STÆRÐFRÆÐI

**Verslunin Spilavinir var stofnuð haustið 2007 af mér og vinkonu minni [illegible]arsdóttur. [illegible]ilum og [illegible]og vinum. [illegible] áhuga al- [illegible]uga kennara**



Ég hef lengi leitað sérstaklega eftir spilum sem hægt er að nota í kennslu og sem reyna á þjálfun. Þá er ég ekki sérstaklega að tala um spil sem eru hönnuð sem kennsluspil heldur einnig að sjá þætti í spilinu sem hægt er að nota í kennslu. Það reynist ekki erfitt þegar kemur að stærðfræði því flest öll spil fela einhverja stærðfræði í sér, bara mismikla. Oftast þarf að reikna út stig eða glíma við líkindareikning. Sum spil reyna á margföldun, hnit, form og speglun svo það er ansi margt sem er hægt að þjálfa með spilum.

Mér finnst stærðfræði skemmtileg. Ég veit ekki hvort mér finnst spil vera meira skemmtileg vegna leiksins eða stærðfræðinnar. Enn þann dag í dag þegar ég sé tölur undir 14 minna þær mig á spilastokkinn. Það hefur með það að gera að ég lærði að reikna um 5 ára gömul með því að spila Kasínu við pabba minn. Í Kasínu þarf að leggja tölur spilanna saman. Þar lærði ég til dæmis allar leiðir til að leggja saman töluna 12 (drottningu) með spilum. Til að halda í við pabba þá varð ég að vera fljót að reikna í huganum en ekki með fingrunum, svo pabbi gæti ekki séð minn næsta leik.

Ég óska sem flestum að fá að upplifa ánægjuna við að spila og að sjá hvað stærðfræði er skemmtileg og hvað hún er mikið meira en bara að reikna dæmi á blaði. Þess vegna er ég mjög opin fyrir því að koma í heimsókn í bekki til að vekja þennan áhuga. Slíkar heimsóknir auðvelda oft kennurum að nota spil í kennslu. Ég sýni og kenni kennurum ýmiss konar spil sem henta t.d. í stærðfræðikennslu. Svo hef ég einnig tekið þátt í kennslu þar sem spil eru notuð.

Sumir skólar eru með spil sem valfag, aðrir eru með spilastundir í hringekju og enn aðrir nota spil sem verðlaun. Ég fer yfir með kennurum hvaða spil henta m.t.t. aldurs og einnig hve langan tíma það tekur að spila hvern leik því sum spil taka einungis 2-20 mínútur en það er sá tímarammi sem ég fer yfirleitt eftir. Einstaka sinnum, hjá eldri nemendum, eru spil notuð sem taka lengri tíma og er þá búið að skipuleggja slíka stund sérstaklega.

Hér eru nokkur spil sem gott er að nota í kennslu fyrir mismunandi aldur en þetta er langt frá því að vera tæmandi listi. Einnig bendi ég á að spil sem manni finnst sjálfum skemmtilegt og er öruggur með að útskýra gengur yfirleitt vel að nota í kennslu.

Að lokum eru auðvitað ýmis spilastokkaspil sem reyna á stærðfræði t.d. fyrrnefnd kasína, rommý o.fl. Þá má heldur ekki gleyma klassískum spilum eins og *Yatzi* með líkindarreikningi og samlagningu (þar er líka hægt að koma prósentum inn) svo er það gamla góða M*onopoly* með peninga, leigu, kaup og sölu (mæli með að setja tímaramma á það spil, það á til að dragast svolítið lengi).

Spilakveðja,
*Svanhildur Eva Stefánsdóttir*
Meðeigandi og -stofnandi Spilavina

# HEILABROT

## Af hálftómum og hálffullum glösum

1. Í nýjasta íþróttadrykknum er innihaldið 99% vatn og 1% steinefni. Ég gleymdi eins lítra flöskunni opinni dágóða stund, og á meðan gufaði eitthvað af vatninu upp. Eftir stóð vökvi sem var 98% vatn. Hve mikið vatn gufaði eiginlega upp?
2. Einhverjum fjölda af bakteríum var komið í ræktun í glasi. Þessi tegund fjölgaði sér hratt með skiptingu: ein baktería skipti sér og varð að tveimur á einnar sekúndu fresti. Eftir eina mínútu varð glasið fullt. Hvenær var glasið hálf fullt?
3. Þú stendur við árbakka með tvær fötur. Önnur fatan er tekur nákvæmlega 3 lítra af vatni, en hin tekur nákvæmlega 5 lítra. Hvernig geturðu náð þér í nákvæmlega 4 lítra af vatni? (Reynið að nota eingöngu stærðfræði – ekki er hægt að merkja föturnar eða sjá hvort þær eru til dæmis hálffullar).
4. Í risastórum poka eru 24 kíló af súkkulaðirúsínum. Geturðu mælt út 9 kíló með jafnvægisvog? (Þetta er stór og öflug jafnvægisvog, hún ræður við hvaða magn sem er).

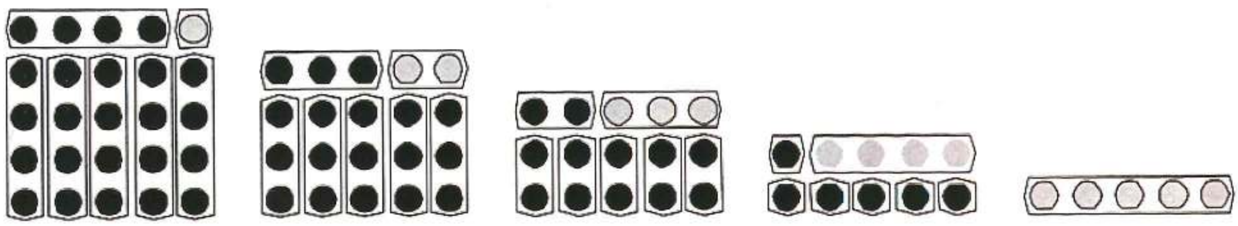
Og að lokum: er eitthvað athugavert við þessa sönnun á því að fullt glas sé einmitt það sama og tómt glas?

Við vitum að hálffullt glas er það sama og hálftómt glas. Það er bara spurning um viðhorf. Svo við skrifum:
$\frac{1}{2} \times$ (fullt glas) = $\frac{1}{2} \times$ (tómt glas)
Nú margföldum við báðar hliðar jöfnunnar með 2, og fáum:
fullt glas = tómt glas.

(Svörin er að finna á bls. 22)

# Hve mikið, hve margir?

## - óþekkti arfurinn



**Mynd 1** Lausn á þraut hliðstæðri gátu Ólafs Daníelssonar um óþekkta arfinn.

**Ófá dæmi hafa verið mönnum dægrastytting í tjöldum hirðingja og höllum fursta á löngum vetrarkvöldum eða þá í hjásetum á sumarnóttum í íslenskum sveitum.**

„... ÉG FER ÚT Í GARÐ OG KEM AÐ APPELSÍNUTRÉ. ÉG TEK EINA APPELSÍNU. SÍÐAN TÍNI ÉG 1/10 HLUTA ÞESS SEM EFTIR ER. ÞÁ KEMUR ANNAR Á EFTIR MÉR OG TÍNIR TVÆR APPELSÍNUR OG SÍÐAN 1/10 HLUTA ÞESS SEM ÞÁ ER EFTIR ...“

**KRISTÍN BJARNADÓTTIR**
REKUR ÞRAUTIR UPP ÚR LIBER ABACI.

Arfsögn af þessu tagi er að finna í *Kennslubók í algebru* eftir Ólaf Daníelsson (3. útgáfa 1951) en hún var útbreidd námsbók á Íslandi um miðja tuttugustu öld. Dæmið er svohljóðandi:

> Indverji lætur börnum sínum eftir í arf allmarga demanta, alla jafn verðmæta. Í erfðaskrá hans var svo mælt fyrir, að elsta barnið skyldi fá 1 demant og 1/7 afgangsins, næstelsta barnið 2 demanta og 1/7 þess er þá var eftir, og þannig skyldi halda áfram að skipta. Við skiptin kom í ljós að börnin fengu jafnt. Hve mörg voru börnin og hve margir demantar? (Ólafur Daníelsson, 1951, bls. 105).

Dæmið hefur fornt og fjarrænt yfirbragð, ævintýralega dulúð. Sjálfsagt er að hvetja stálpuð börn til að fikra sig eftir lausn, beita vitrænni ágiskun. Ljóst er að svörin verða að vera heilar tölur og ágiskanirnar styrkja brotaskilning.

Í framhaldi af fundinni lausn er hægt að spinna breytingar á dæminu, t.d. að börnin fái fyrst 1/7 hluta demantasafnsins og síðan 1, 2, 3 ... demanta eftir því hvar þau eru í systkinaröðinni.

Annað tilbrigði sem spinna má er að þau fái ekki 1/7 hluta heldur t.d. 1/6 hluta, 1/5 hluta eða 1/10 hluta. Svo má vissulega setja upp jöfnu en það er mun líklegra til að höfða vel til nemenda eftir að þeir hafa fengið að prófa sig áfram og lifa sig inn í viðfangsefnið.

Dæmið er ævafornt. Elsta þekkta útgáfa þess er í bókinni *Liber Abaci* frá 1202 eftir Leonardo frá Pisa sem nefndur hefur verið Fibonacci. Dæmi Ólafs Daníelssonar er einmitt samhljóða dæminu í *Liber Abaci* að öðru leyti en því að í *Liber Abaci* er aðeins talað um syni sem erfingja. Þar segir ekki að synirnir fái allir jafnmarga demanta en þegar lausnin, sem lýst er í bókinni, er skoðuð sést að gert er ráð fyrir því.

Vert er að líta á aðrar útgáfur af dæminu. Í skjölum Vatíkansins er til handrit eftir Jacopo de Firenze, *Tractatus algorismi*, skráð í Montpellier í Suður-Frakklandi árið 1307. Í því segir:

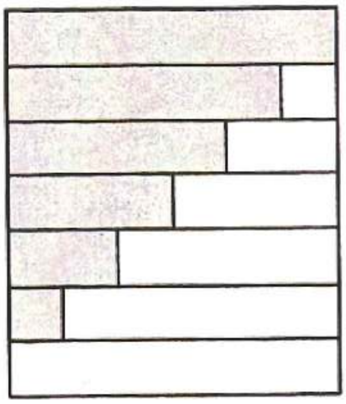
> Ég fer út í garð og kem að appelsínutré. Ég tek eina appelsínu. Síðan tíni ég 1/10 hluta þess sem eftir er. Þá kemur annar á eftir mér og tínir tvær appelsínur og síðan 1/10 hluta þess sem þá er eftir. Þá kemur annar og tínir 3 appelsínur og einn tíundahluta þess sem þá er eftir. Þá kemur annar og tínir 4 og einn tíundahluta þess sem eftir er. Og þannig koma margir. Og sá sem kemur síðastur tínir allt sem eftir er. Og hann finnur hvorki meira né minna en það sem hinir hafa fengið. Hver og einn tíndi jafn mikið og hinir. Og eins margir og mennirnir voru, svo margar voru appelsínurnar sem hver þeirra fékk. Mig langar að vita hve margir mennirnir voru og hve margar appelsínur þeir tíndu hver um sig og hve margar þeir tíndu alls (Høyrup, 2007, bls. 2).

Einnig þetta dæmi gengur upp ef byrjað er á réttri tölu, sem er að sjálfsögðu aðalatriðið. Nú geta menn leikið sér að því að breyta hlutfallinu sem af er tekið og eftir nokkrar tilraunir sjá menn að heildarfjöldinn er alltaf ferningstala eins og segir raunar í dæminu um appelsínurnar. Á **Mynd 1** er lausnin sýnd myndrænt þar sem fyrst er tekinn 1 hlutur og síðan 1/6 hluti þess sem eftir er. Lausnin er 25, sá fyrsti fær 1 og 1/6 hluti af 24, eða 4, svo að hann fær 1 + 4 = 5. Eftir eru 20. Næsti fær 2 og 1/6 hluta af 18, 2 + 3 = 5, o.s.frv. *Liber Abaci* sýnir einnig aðra útgáfu af dæminu um óþekkta arfinn. Þá fær fyrsti sonurinn 1/7 hluta arfsins og síðan einn demant, næsti sonur fær 1/7 hluta þess sem eftir er og tvo demanta og þannig koll af kolli þar til demantarnir eru uppurnir.

Lausn fyrri gátu *Liber Abaci* (og gátu Ólafs) er 36, sex demantar til hvers og eins sex barna. Lausn seinni gátu *Liber Abaci* má sjá á **Mynd 2**, sex synir sem fá sjö demanta hver, alls 42 demantar. Leonardo getur þess einnig að eins mætti gefa fyrst 3 demanta að auki, síðan 6, o.s.frv. Þá þrefaldast lausnin, verður 3·36 í fyrra tilvikinu, en 3·42 í því síðara.

## Maximos Planudes

Maximos Planudes (1260~1305) var málfræðingur og guðfræðingur í Byzantz-ríkinu. Hann ritaði bókina *Reikningur Indverja, kallaður hinn mikli*, seint á 13. öld. Þar skýrir hann lausn gátunnar um óþekkta arfinn svohljóðandi:



**Mynd 2** Lausn seinni gátu Liber Abaci um óþekkta arfinn.

> Þegar ein eining er tekin af hvaða ferningstölu sem er mælist afgangurinn með tveimur tölum margfölduðum saman, önnur er einum minni en hlið ferningsins en hin er einum meiri en hlið sama fernings. Eins og til dæmis ef tekin er ein eining af 36 verður 35 afgangs. Þessi tala mælist með 5 og 7 þar sem fimmfaldir 7 eru 35.
>
> Ef aftur af 35 ég tek burt einn sjöunda hluta, sem eru þá 5 einingar, og 2 einingar að auki, verður afgangurinn, sem er þá 28, mældur aftur af tveimur tölum, annarri tveimur einingum minni en hin umrædda hlið og hinni einni einingu stærri, þar sem ferfaldir 7 eru 28.
>
> Ef aftur af 28 ég tek burt 3 einingar og sjöunda hluta þess, sem er þá 4, er afgangurinn sem er þá 21, mældur af tölu sem er þremur einingum minni en hliðin og annarri sem er einni einingu stærri, af því að þrefaldir 7 eru 21. Og alltaf þannig.

Þótt texti þessi sé stirður og beri svipmót tíma, þegar enn var langt þar til táknmál stærðfræðinnar mótaðist, svarar lýsingin fullkomlega til gátu Ólafs. Vissulega skortir táknmálið en skýringin fjallar um ferningstölur almennt með hliðstæðu í ferningstölunni 36. Sé táknmálið tekið í notkun lítur dæmið út svo:

**Eining er dregin frá ferningstölu:**
$n^2 - 1$ $\qquad 36 - 1 = 35$
**Afgangurinn er margfeldi:**
$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ $\qquad 35 = 5 \cdot 7$
**Fundinn er hlutinn**
$(n^2 - 1) / (n + 1) = (n - 1)$ $\qquad 35/7 = 5$
**Hlutinn dreginn frá:**
$n^2 - 1 - (n - 1) = n^2 - n$ $\qquad 35 - 5 = 30$
**Næst eru 2 dregnir frá:**
$30 - 2 = 28$
**Eftir stendur margfeldi:**
$n^2 - n - 2 = (n - 2)(n + 1)$ $\qquad 28 = 4 \cdot 7$

Þannig er haldið áfram og dæmið um 36 rakið jafnhliða. Segja má að hér sé sett fram aðdáunarverð sönnun án táknmáls.

## Lokaorð

Flestar þrautirnar í *Liber Abaci* eru ævafornar arfsagnir úr indverskum, arabískum og persneskum dæmasöfnum, jafnvel kínverskum, eða þá úr bók Alkvíns (um 800), *Propositiones ad Acuendos Juvenes / Viðfangsefni til að skerpa ungmenni*. Ekki hefur þó tekist að rekja þrautina um óþekkta arfinn lengra til baka en hér hefur verið gert (Høyrup, 2007, bls. 8).

## Heimildir

Høyrup, J. (2007). The „Unknown Heritage". Trace of a forgotten locus of mathematical sophistication. Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter. 3. Række: Preprints og reprints, nr. 1. http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/5302/1/3_2007_1_Jens.pdf, sótt 31. janúar, 2011.

Ólafur Daníelsson (1951). Kennslubók í algebru, 3. útgáfa. Reykjavík: Ísafoldarprentsmiðja, h.f.

# Námstefna Flatar

## Hótel Selfossi 1. - 2. október 2010

**Áttunda námstefna Flatar var haldin á Hótel Selfossi dagana 1. - 2. október. Að venju var námstefnan opin öllum áhugamönnum um stærðfræðikennslu á öllum skólastigum. Námstefnan var auglýst á veggspjaldi sem sent var í alla grunn- og framhaldsskóla landsins og með tölvupósti á leikskólana og meðlimi Flatar. Skráning fór fram með tölvupósti á netfangið** flotur@ismennt.is. **Þátttakendur voru rúmlega 50 manns af öllum skólastigum og komu víðsvegar af landinu.**

Dagskráin var fjölbreytt og margar áhugaverðar vinnustofur í boði. Boðið var upp á erindi fyrir alla en einnig gátu námstefnugestir valið sér vinnustofu eftir áhugasviði. Freyja Hreinsdóttir, dósent á Menntavísindasviði Háskóla Íslands, var með kynningu á GeoGebra fyrir alla námstefnugesti sem fengu til eignar leiðbeininga- og verkefnahefti í GeoGebra. Freyja var einnig með vinnustofur í GeoGebra fyrir öll skólastigin.

Guðbjörg Pálsdóttir, lektor Menntavísindasviði Háskóla Íslands var með vinnustofu fyrir kennara á yngsta stigi um notkun kaplakubba í kennslu og jólaföndur. Ingólfur Gíslason, háskólanemi og stundakennari við Háskóla Íslands var með vinnustofu um stærðfræði og listir. Borghildur Jósúadóttir, kennari í Grundaskóla, var með vinnustofu um skapandi stærðfræði og Ingólfur Gíslason og Martin Kollmar, kennari í Verslunarskóla Íslands, voru með vinnustofu um námsmat. Einnig kynntu Spilavinir ýmis spil sem tengjast stærðfræði og skemmtu þátttakendur sér vel við að prófa hin ýmsu spil.

Stoðkennarinn var með kynningu á vefnum stodkennarinn.is fyrir námstefnugesti. Á föstudagskvöldið komu þátttakendur saman og borðuðu kvöldverð undir veislustjórn Borghildar Jósúadóttur þar sem nafnagáturnar voru á sínum stað.

Að venju lauk námstefnunni með pallborði eftir hádegi á laugardag undir yfirskriftinni: Námsmat - hvað mælir það? Hvernig eru niðurstöður notaðar. Frummælendur í pallborði voru Ingvar Sigurgeirsson, prófessor Menntavísindasviði Háskóla Íslands, Valgarð Már Jakobsson, stærðfræðikennari í Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ og Borghildur Jósúadóttir, kennari í Grundaskóla. Pallborðið var vel sótt af námstefnugestum og að loknum erindum allra frummælenda sköpuðust áhugaverðar umræður.

Aðstaðan á Hótel Selfossi var til fyrirmyndar og þátttakendur voru almennt ánægðir með námstefnuna í heild. Stjórnin hafði gert sér vonir um að þátttakendur yrðu fleiri en skoða þarf með hvaða hætti námstefnan eigi að vera á næsta ári.

# 040211 DAGUR STÆRÐFRÆÐINNAR

Haldið var upp á *Dag stærðfræðinnar* í INGUNNARSKÓLA föstudaginn 4. febrúar. Nemendur á öllum aldursstigum unnu ýmis stærðfræðitengd verkefni.

Í 1. bekk var lögð áhersla á vinnu með grunnformin hringi, ferninga og þríhyrninga og nemendur bjuggu til pappírshunda úr þessum formum. Í 2. - 3. bekk var áherslan á ýmis stærðfræðispil.

Í 4. - 5. bekk var lögð áhersla á hlutbundna vinnu í stærðfræði þar sem nemendur unnu fjögur mismunandi verkefni. Eitt verkefnið var um *mælingar* en þá fengu nemendur allskonar ílát og áttu að byrja á að giska hvað ílátið tæki marga desilítra og lítra og mæla svo hvort ágiskunin væri rétt. Á annarri stöð var unnið með *flatarmál* en þar fengu krakkarnir límband og áttu að líma á gólfið ferning sem væri einn fermetri. Í þriðja verkefninu áttu krakkarnir að rúlla upp dagblaði og byggja upp mismunandi *form* með rúllunum. Í síðasta verkefninu voru nemendur að leika sér með *mynstur* og form.

Nemendur í 6. - 7. bekk létu ekki sitt eftir liggja í stærðfræðinni. Þeim var skipt í hópa og vann hver hópur hugtakakort út frá ýmsum stærðfræðihugtökum svo sem *almennum brotum, formum* og *reikniaðgerðum*.

Á unglingastiginu voru fjölbreytt verkefni í boði svo sem mælingar og útreikningar á yfirborðsflatarmáli ýmissa forma eins og Cheeriospakka og annarra umbúða. Annað verkefni var að reikna út lengd hringvegarins og í framhaldi af því bensíneyðslu bíla sem keyra hringveginn. Einnig áttu nemendur að búa til kúlur úr Zome-einingum og vinna með form og mynstur með því að flísaleggja gólffleti.

Það var einstaklega gaman að vinna þessi hlutbundnu verkefni með nemendum og þó þeim hafi ef til vill fundist þeir bara vera að leika sér þá er alveg víst að verkefnin voru mjög lærdómsrík. Kennarar og nemendur voru ánægðir og glaðir með daginn og fannst verkefnin skemmtileg og góð tilbreyting.

*Kennarar Ingunnarskóla*

# NUMICON

### UPPHAFIÐ

Numicon er enskt stærðfræðikerfi sem er byggt á hugmyndum *Montessori, Stern* og *Cuisenaire*. Rannsóknir á Numicon voru gerðar á árunum 1996-1998 eftir markvissa undirbúningsvinnu. Síðan þá hafa verið gerðar fleiri rannsóknir og Numicon m.a. tekið þátt í viðamiklum verkefnum eins og Every Child´s counts. Námskeiðshaldið hefur aukist frá því að höfundarnir, þau Romey Sawtell, Ruth Atkinson og Tony Wing, voru að ferðast á milli landshluta og staða í Englandi. Í dag starfa margir fyrirlesarar fyrir þá í fjöldamörgum löndum. Þau geta nú einbeitt sér að skrifum og stærri ráðstefnum. Til að mynda þá voru fyrstu þrjú námskeiðin á Íslandi árið 2006 haldin af tveimur af þremur höfundum.

### HUGMYNDIR

Numicon námsgögnin og námsefnið voru gerð með það í huga að nemendur efldu skilning sinn á stærðfræði og byggðu upp góðan grunn. Námsgögnunum var ætlað að hjálpa nemendum að sjá og skilja gildi og tengsl talna sem tölustafir einir og sér gera ekki. Um leið læra nemendur að byggja upp sjónrænar myndir þegar þeir raða og bera saman Numicon formin. Lögð er áhersla á að nemendur átti sig á að tölustafir eru ekki handahófskennd tákn heldur mynda þeir mjög skipulagt kerfi sem er stútfullt af mynstrum. Numicon formin eru líka hönnuð með það í huga að nýta þrjá af megin styrkleikum barna og til að hjálpa þeim að auka talnaskilninginn. Þessir þrír megin styrkleikar eru: lærdómur í leik, eftirtekt og sterk tilfinning fyrir mynstrum.

## Í LEIK & STARFI
## *- ekki bara fyrir þau yngstu*

Þar sem Numicon námsefnið er fjölskynja þá höfðar það til margra. Nemendur læra bæði í gegnum snertingu og á sjónrænan hátt hvernig Numicon mynstrin tengjast hvert öðru. Með því að nota námsgögnin sem eru í boði opnast nýr heimur fyrir nemendum almennt og fyrir þeim sem hafa t.d. átt í erfiðleikum með að skilja tengsl og gildi talna. Hvert Numicon mynstur er augljóst og sýnir bæði stærð og fjölda.

Í kennsluhandbókinni er meðal annars rætt um hugtakaímynd sem fær okkur til að hugsa um hversu mikilvægt það er að sækja hugmyndir víða úr umhverfinu okkar bæði innandyra sem utan. Það minnir okkur líka á hversu nauðsynlegt það er að vinna með öll ný hugtök sem koma fyrir í hverju verkefni og ekki gera fyrirfram ráð fyrir að nemendurnir skilji þau öll. Þar er m.a. rætt um stærðfræðilega hugsun og hversu nauðsynlegt það er að efla hana.

Áherslur eru lagðar á að við vinnum með tugakerfið. Því er t.d. alltaf unnið að næsta tug, hundraði eða þúsundi og mikið lagt upp úr að nota talnalínur við allar reikniaðgerðir. Þegar fjöldi hluta í einu safni er t.d. fundinn þá eru tíu hlutir taldir saman í bunka. Til að vera viss um að þetta séu tíu hlutir þá er Numicon mynstrið fyrir tíu myndað og þá kemur augljóslega í ljós hvort talningin hefur verið rétt. Einnig er hægt að leggja einn hlut á hvern tölustaf á talnalínu, byrja á einum og síðasta talan gefur samtöluna. Mikil áhersla er lögð á að hafa umhverfið þakið efnivið sem minnir okkur á stærðfræði. Það er líka lögð mikil áhersla að kenna að telja og fylgjast með framförum í talningu. Hins vegar er líka bent á hversu mikilvægt það er að skilja muninn á talningu og talnareikningi. Við komumst ekki langt ef við erum alltaf að leggja saman á fingrunum. Þar kemur Numicon sterkt inn. Með sterkri grunnvinnu opnast nýjar leiðir fyrir eldri nemendur sem geta notið þess að sjá og skilja mynstrið í stærðfræðinni.

## NUMICON NÁMSGÖGNIN

Þegar litið er á Numicon formin sjálf þá má sjá að hugmyndirnar koma frá Montessori og Catherine Stern. Þau koma í 10 mismunandi stærðum, frá 1-10. Þau sýna t.d. bersýnilega mismun á sléttum tölum og oddatölum og að næsta tala á eftir er einum stærri en sú sem á undan kom. Það er líka hægt að sjá strax mun á gildi sæta þannig að það auðveldar innlögn á sætisgildum til muna. Að sama skapi sjá nemendur auðveldlega hvernig margföldun og deiling er byggð upp með því að nota Numicon formin og sérhannaða talnalínu fyrir þau.

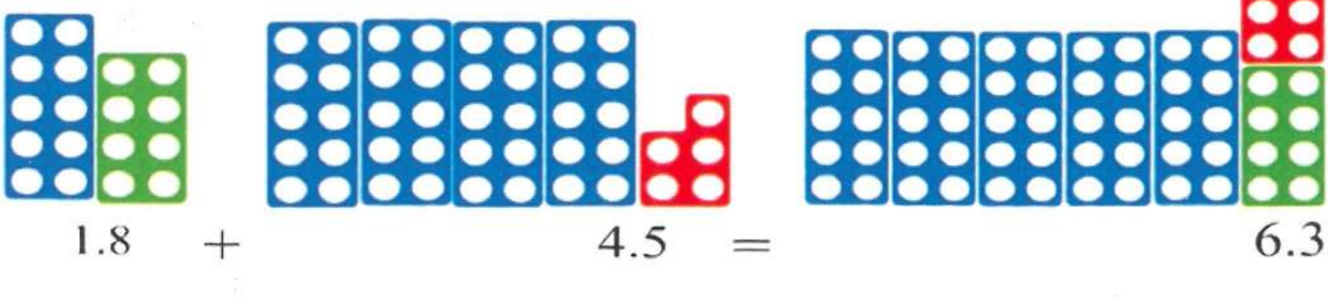
Samhliða Numicon formunum hafa verið hannaðir Numicon kubbar sem t.d. eru notaðir við mynsturgerð, sem og kubbaplata sem þjónar margskonar tilgangi. T.d. er hægt að sjá fljótlega hvort nemendur hafa náð tökum á rými, stærðum, snúningi og plúsheitum tölunnar 10. Auk þess er hægt er að vinna prósentuvinnu á plötunni svo eitthvað sé nefnt. Sérstakar talnalínur fylgja Numicon formunum. Ein af þeim er sérstaklega hönnuð fyrir yngra stigið og aðra er hægt að nota við að leysa allar reikniaðgerðir. Að auki fylgja píluspil, póstkassar, talnaspjöld, vog og fleiri mismunandi talnalínur sem hægt er að setja upp á vegg eða á borð.

**ODDFRÍÐUR KRISTÍN WALLIS TRAUSTADÓTTIR**, KENNARI OG ÁHUGAMANNESKJA UM STÆRÐFRÆÐI, SEGIR HÉR FRÁ NUMICON STÆRÐFRÆÐIKERFINU. HÚN ER BÚSETT Á ENGLANDI OG HELDUR M.A. UTAN UM NUMICON NÁMSKEIÐSHALDIÐ Á ÍSLANDI FYRIR OXFORD UNIVERSITY PRESS. ÞAR KYNNIR ODDFRÍÐUR HUGMYNDAFRÆÐINA AÐ BAKI NUMICON OG KENNIR BÆÐI Á NUMICON NÁMSGÖGNIN OG CUISENAIRE TALNASTANGIRNAR, AUK ÞESS AÐ SKIPULEGGJA NÁMSFERÐIR TIL ENGLANDS OG HALDA M.A. NUMICON NÁMSKEIÐ FYRIR ÍSLENSKA HÓPA Í ENGLANDI. HÚN HEFUR EINNIG ÞÝTT HLUTA AF NUMICON NÁMSEFNINU YFIR Á ÍSLENSKU.

Í þessu námsefni eru Cuisenaire talnastangirnar notaðar. Önnur námsgögn sem eru notuð með þeim eru talnabakkar sem fylgja talnastöngunum. Þeir geta t.d. verið notaðir við mynsturgerð, þegar verið er að finna öll plúsheiti fyrir viðkomandi tölu og einnig þegar á að leysa einfaldari samlagningar - og frádráttardæmi. Að auki fylgja tvær mismunandi talnalínur, báðar frá 1-100 og bilið milli talna er 1 cm. Önnur er frekar venjuleg en hin er eins og talnalínubraut þar sem stöngunum er rennt inn í brautina þegar verið er að vinna með allar reikniaðgerðir. Þess má geta að bæði Numicon formin og talnastangirnar hafa ákveðna þyngd, þannig að tíu Numicon form 1 eru jafnþung og eitt Numicon form 10 og sama gildir um talnastangirnar. Því er frábært að nota vog þegar verið er að leggja inn stærra en og minna en, samlagningu, frádrátt og einfalda algebru.

## NUMICON NÁMSEFNIÐ

Námsefnið er þannig uppbyggt að bæði þátttakendur og sá sem leggur það fyrir eru leiddir í gegnum hvert verkefni lið fyrir lið. Sá sem leggur verkefnið fyrir sér um leið hvernig nemendur hugsa og getur samstundis hrósað eða leiðrétt. Í raun eru verkefnin unnin í leik þar



sem alltaf er verið að nota áþreifanleg námsgögn. Á mörgum verkefnaspjöldunum eru leikir fyrir 2-4 nemendur. Hvert verkefni er byggt á fyrri verkefnum og því myndast sterkur og góður grunnur sem eflir markvisst skilning nemenda á stærðfræði. Á hverju verkefnaspjaldi eru hugmyndir að verkefnum sem bæði er hægt að vinna innandyra sem utandyra, sem og námsmarkmið og hugtakanotkun sem þarf að hafa í huga þegar verkefnið er lagt fyrir. Ekki er byrjað á nýju verkefni fyrr en nemandinn hefur leyst það sem verið er að vinna með. Því er hægt að halda góða skráningu yfir getu og árangur nemenda. Numicon er þannig uppbyggt að hver og einn vinnur á sínum hraða. Þó svo að hvert sett sé að sumu leyti aldursmiðað þá þýðir það ekki að það geti eingöngu verið notað með þeim aldurshóp. Numicon hentar einstaklega vel í sérkennslu, með eldri nemendum sem enn eiga t.d. í vandræðum með að læra margföldun og með fullorðnum.

## ÚTGEFIÐ NÁMSEFNI

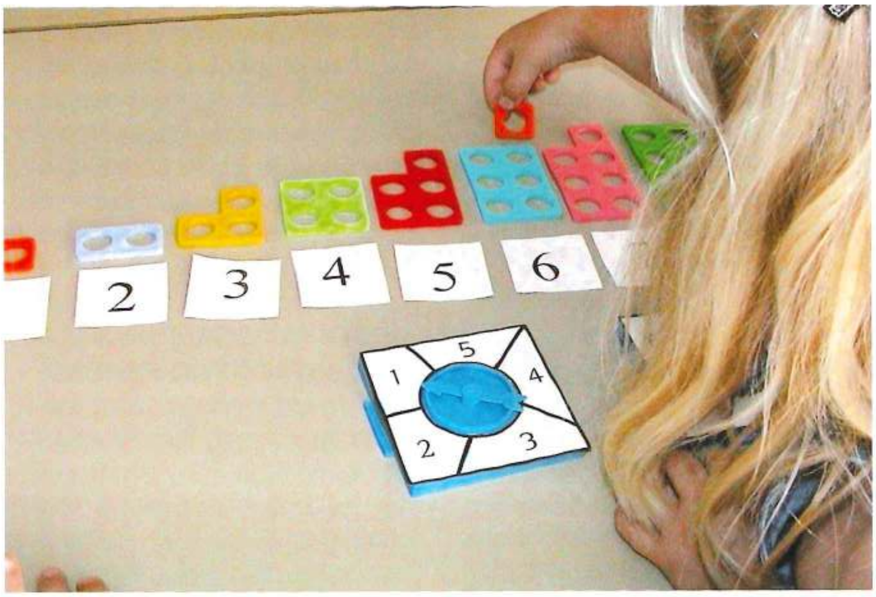
**Heimasett** - lítið box sem ætlað er foreldrum með yngri börn. Varanleg eign, yndisleg verkefni og um árs verkefnavinna. **Leikskólasett** - kennsluhandbók full af hugmyndum um hvernig hægt er að tengja stærðfræði við marga þætti í daglegu lífi barna strax við upphaf leikskólagöngu. (íslensk þýðing á leiðinni). **Grunnsett** - hentar leikskólabörnum frá 4 ára aldri og ef það hefur ekki verið notað í leikskóla þá er það kjörið sem grunnefni í 1.bekk í grunnskóla. Í grunnsetti er unnið með undirstöðuatriðin, eins og uppröðun, paravinnu, tengingu forma við tölustafi og innlögn á samlagningu og frádrætti. Að auki fylgja námsmatsverkefni, kennsluhandbók og efni til ljósritunar (íslensk þýðing). **Skólasett 1 og 2** - ætlað nemendum upp að 9 ára aldri. Þar er m.a. unnið með margföldun, deilingu og brot. Þar er líka að finna námsmat, kennsluhandbók og efni til ljósritunar (íslensk þýðing á námsmatinu). **Brúum bilið** - sérkennsluefni, svipuð verkefni og í grunnsettinu en ýtarlegri (íslensk þýðing á námsmatinu). **Þrautir** - bæði er hægt að leysa þær með og án námsgagna og þær nýtast nemendum frá um það bil 8 ára (eingöngu á ensku). **Skólasett 3** kemur út á þessu ári. **Forrit** - nýtist vel t.d. við innlögn en kemur ekki í stað námsgagnanna sjálfra. Hentar vel á gagnvirkri töflu en er líka hægt að nota í tölvu og skjávarpa. Nemendur geta líka nýtt sér forritið. **Heimaverkefni á CD** - eingöngu á ensku.

## NÁMSMAT

Vert er að minnast sérstaklega á námsmatsverkefnin sem fylgir hverju setti. Þeim er ætlað að auðvelda mat á stöðu nemenda og að halda utan um árangur þeirra. Sá sem leggur námsmatsverkefnin fyrir leiðir nemandann í gegnum verkefnin, lið fyrir lið og þegar sú staða kemur upp að nemandinn getur ekki leyst viðkomandi verkefni þá stendur skýrum stöfum hvaða verkefni þarf að vinna næst og í hvaða setti. Það auðveldar málið fyrir alla og fyrr hægt að byrja á réttum stað miðað við getu hvers og eins.

## NOTIÐ ÁFRAM ÞAÐ EFNI SEM TIL ER

Það þarf ekki að henda út þeim stærðfræðibókum sem fyrir eru í skólum heldur einfaldlega bæta við Numicon námsgögnunum og námsefninu. Það má benda á að í einni af kennarahandbókunum með Sprota er t.d. bent á Cuisenaire talnastangirnar sem gott námsgagn. Numicon mynstrin vinna eins.

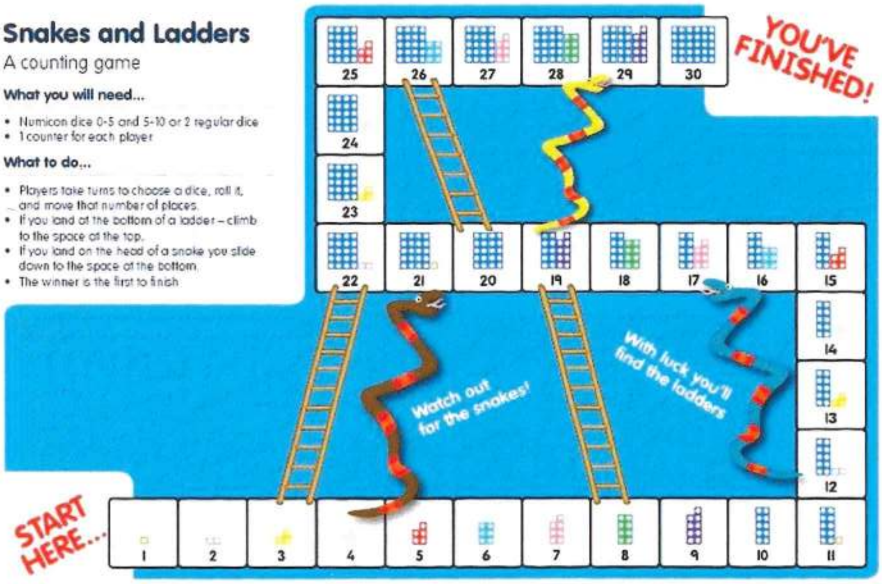




Í Einingu er m.a. bent á notkun talnalína. Þær eru mjög mikilvægar og skipa stóran sess hjá Numicon. Ef nemandi þinn skilur stærðfræðina ekki nógu vel og finnst hún leiðinleg, hugsaðu þá hversu gott það væri að gefa þessum nemanda tækifæri á að hugsa jákvætt og hafa gaman af stærðfræði, eingöngu með því að bæta inn skemmtilegum og áhrifaríkum námsgögnum og verkefnum.

### SLÖNGUSPIL

Þar sem þetta blað er tileinkað spilum og leikjum þá er vert að benda á „free resources“ á vefsíðunni www.numicon.com. Þar er




m.a. að finna hið sígilda slönguspil í Numicon útgáfu. Það er byggt á hugmynd sem foreldri barns sendi inn (sjá undir sharing corner). Hægt er að fá eintak hjá undirritaðri með íslenskum leiðbeiningum. Nú svo er líka bara gaman að búa til þetta spil með Numicon mynstrunum.

### STÆRÐFRÆÐITENGT SPIL - HÖNNUN NEMENDA

Gefið nemendum tækifæri til að búa til stærðfræðispil með notkun hjálpargagna að leiðarljósi eins og Numicon, Cusinaire talnastöngunum og öðrum námsgögnum og verðlausum hlutum sem eru við höndina svo sem hluti úr ónothæfum spilum. Farið á netið og skoðið spil. Gott er að finna nokkrar slóðir fyrir nemendur að skoða. Skipuleggið búðarferð, þar sem nemendur fara og skoða spil og kanna t.d. hversu mörg spil tengjast stærðfræði og hvað þau kosta. Einnig er hægt að hvetja alla til að koma með spil í skólann og skoða þau á sama hátt. Þekkja nemendur einhvern sem býr til spil og hægt er að heimsækja? Þá er að hanna spilið sjálft og reglur þess. Auk þess þarf að hanna pakkningar með stærð, rúmmál og útlit í huga, Teikningar geta bæði verið handunnar og tölvuunnar. Svo þarf að verðleggja spilin og velta fyrir sér hvort kostnaður myndi lækka á hvert spil ef spilið færi í framleiðslu. Ég mæli með að nemendur vinni svona verkefni í litlum hópum. Hægt er vinna þetta verkefni í samvinnu við stærðfræðikennara, myndmenntakennara, tölvukennara, smíðakennara, handavinnukennara og móðurmálskennara, svo eitthvað sé nefnt. Hápunktur verkefnisins er þegar spilin eru fullkláruð og hægt er að fara að spila þau.

### ÞRAUT AF NETINU - MEÐ NOTKUN HJÁLPARGAGNA

Að lokum er svo hugmynd að þraut. Ef slegin eru inn orðin ***number patterns*** í leitarvél á netinu, þá finnið þið urmul af allskonar mynstrum. Þar á meðal fann ég þessa stjörnu með lausnum (sjá litlu myndina). Ég hef útbúið þrautina þannig að nemendur fá að búa til stjörnuna sjálfir (geta verið 2 og 2 saman) og fá í hendurnar blöð og karton og klippa út sex þríhyrninga og líma á blað, hornin lögð saman þar sem við á til að tengja hvern þríhyrning við þann næsta og mynda þannig stjörnu. Síðan eru búin til talnaspjöld með tölustöfunum á bilinu 1-12. Næst er að taka fram bláu Numicon talnalínuna og hafa hana til taks fyrir samlagninguna og Numicon form frá 1-12 eða talnastangirnar og talnalínubraut. Gott er að raða þeim í röð á borðið. Það hjálpar þeim yngri sem eru óöruggir í samlagninu að leysa þrautina. Næst er að gefa hugmyndir að lausn. Allir þríhyrningarnir innan stjörnunnar verða að hafa samtöluna 17 og aðeins er hægt að nota þrjár tölur til að fá þá samtölu, þ.e. leggja þarf eitt talnaspjald á hvert horn á stjörnunni. Með því að nota Numicon formin eða talnastangirnar við samlagningu þá tryggir það að samtöluna 17 sé að finna á hverjum þríhyrningi. Svo er bara að leggja tölurnar niður á réttum stöðum. Hinir sem eru góðir í hugarreikningi geta leyst þrautina án sérstakra hjálpargagna.

### HVAR ER HÆGT AÐ NÁLGAST NÁNARI UPPLÝSINGAR UM NUMICON?

www.numicon.com
- Vefsíða Numicon inniheldur urmul af upplýsingum um Numicon og stærðfræði almennt. Þar er að finna fjölbreytt námsefni sem hægt er að prenta út. Einnig er hægt að horfa á nokkur stutt myndbrot um Numicon.

www.silfurskogar.is
- Hér er að finna handhægar upplýsingar um Numicon á íslensku.

Hægt er að skrifa til Kristínar Wallis á kristinwallis@vikingur.co.uk með fyrirspurnir er varða Numicon, m.a. námskeið á þessu ári. Öll námsgögn er hægt að kaupa í A4, www.a4.is.

# Rannsókn á *tölum*

**Þróun talnaskilnings er einn af mikilvægustu þáttum stærðfræðináms í grunnskóla. Nemendur þurfa að efla skilning sinn á sætisgildi, stórum og litlum tölum, brotum og talnakerfinu. Rannsókn á sætisgildi má setja fram sem leik þar sem jafnframt er unnið með skilning á líkum og gerð krafa um stærðfræðilega röksemdafærslu. Með því að nota leik má gera námið ánægjulegra fyrir marga nemendur.**

Eitt af viðfangsefnum kennaranema er að lesa um reynslu kennara af stærðfræðikennslu. Í bókinni *Panning for Gold - 15 Investigations to Enrich Middle School Mathematics* er að finna áhugaverðan kafla um rannsókn á þriggja stafa tölum í gegnum spil.

**Guðbjörg Pálsdóttir**, lektor í stærðfræðimenntun, og kennaranemar í námskeiðinu *Kennsluhættir og uppbygging stærðfræðikennslu fyrir alla* vorið 2011 segja hér frá megininntaki kaflans, en þar er einnig að finna fleiri hugmyndir um vinnu með spilið.

Leikurinn *þriggja stafa tala* byggir á því að skoða möguleika á að búa til tölu með ákveðið viðmið í huga. Í leiknum fær hver nemandi þrjú spil sem þeir nota til að búa til þriggja stafa tölu. Þeir verða að ákveða hvernig best sé að raða spilunum svo að fram komi lægsta mögulega tala, hæsta mögulega tala og tala sem lægi milli þeirra. Í leiknum reynir á að nemendur átti sig á möguleikum sínum til að vinna leikinn. Þeir þurfa að leita að leiðum til að vinna leikinn og það gera þeir með því að draga ályktanir af reynslu sinni og leita að alhæfðum leiðum.

## Spilareglur:

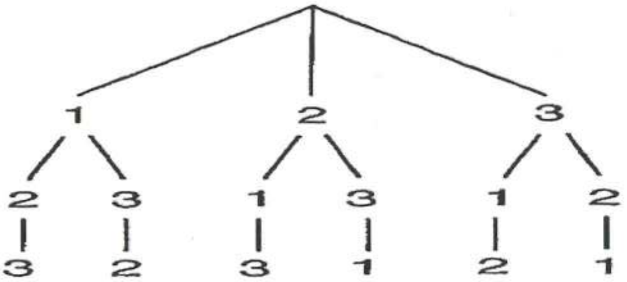
Miðað er við að þrír spili saman. Gott er að nota spilin ás til níu í þremur litum úr venjulegum spilastokki. Þá er kominn stokkur með 27 spilum, þremur spilum af hverri gerð.

1. Sá elsti í hópnum byrjar á að gefa hverjum spilara þrjú spil.
2. Hver spilari skoðar spil sín vel og finnur út hvaða þriggja stafa tölur megi búa til með spilunum. Spilari sem hefur tvist, fimmu og sjöu, getur búið til 257, 275, 527, 572, 725 eða 752.
3. Hver spilari velur eina tölu og leggur spilin á borðið með tölurnar niður.
4. Spilari vinstra megin við gefarann byrjar að segja hvort hann hafi búið til háa tölu, lága tölu eða tölu á milli með því að segja *há*, *lág* eða *milli*. Hinir tveir spilararnir gera það líka eftir því hvort þeir halda að þeirra tala sé hærri, lægri eða milli talna meðspilara. Það er ákveðinn kostur að vera síðastur og heyra hvað hinir segja en spilarar gefa til skiptis og því komast allir í þá stöðu.
5. Eftir að allir hafa sagt tilgátu sína snúa spilararnir spilunum við og sýna tölu sína.
6. Hver spilari sem hefur giskað rétt um tölu sína miðað við tölur hinna fær stig. Allir geta því fengið stig í sama spili.
7. Spilin sem búið er að nota eru sett í sér bunka og næsti spilari gefur hverjum spilara þrjú spil af þeim 18 sem eftir eru. Ferlið er endurtekið. Þegar búið er að spila þrisvar eru öll spilin 27 stokkuð og notuð í næstu umferð.
8. Fyrsti spilari sem nær tíu stigum vinnur.

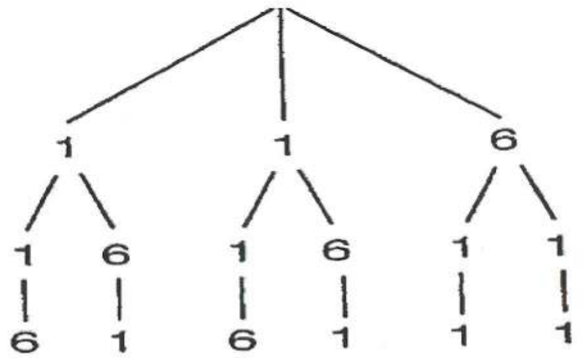
Hvetja ætti nemendur til að prófa spilið og leita leiða til að auka líkur sínar á að ná sér í stig. Gagnlegt er fyrir kennara að fylgjast með hvernig þeir fara að og hvernig þeir þróa leiðir sínar.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 7 | | 1 | 1 | 6 | | 8 | 6 | 5 |

Þegar nemendur hafa spilað tvisvar til þrisvar sinnum skapast oftast umræður meðal þeirra um aðferðir sem eru líklegar til að gefa stig. Þá getur kennari komið af stað bekkjarumræðum eða leitt nemendur áfram og fengið þá til að rannsaka möguleikana skipulega. Hann getur sett fram spurninguna: Á hve marga vegu má búa til þriggja stafa tölu með þremur spilum? Ef þetta er rannsakað og ekkert spil er eins kemur fljótt í ljós að möguleikarnir eru 6. Ef tölurnar eru 1, 2 og 3 kemur í ljós að ef 1 er í hundraða sætinu eru tveir möguleikar á tölu í tugasætið og þegar ákveðið hefur verið hvor talan er þar er aðeins einn möguleiki á tölu í einingasætið. Það eru því tveir möguleikar eftir ef talan í hundraðasætinu er ákveðin og af því að tölurnar eru þrjár eru möguleikarnir 3 • 2 eða 6. Gott er að ræða hvernig skrá megi slíka skoðun og eru líkindatré oft talin heppileg til þess.



Hvetja mætti nemendur til að skoða hvað gerist ef unnið er með fjögurra stafa tölu eða tveggja stafa tölu. Einnig er áhugavert að skoða hvað möguleikunum fækkar ef sama tala kemur fyrir oftar en einu sinni.



Þessi leikur eða spil getur hentað nemendum á ýmsum aldursstigum og geta kennarar notað hann til að leggja áherslu á mismunandi viðfangsefni nemenda. Spilið hentar til dæmis vel til að skoða sætiskerfið, samsetningarmöguleika, stærðfræðilega rökhugsun og líkur. Þetta eru viðfangsefni sem unnið er með á öllum aldursstigum og má nota spilið sem meginviðfangsefni eða upphitun fyrir frekari dýpkun í þessum námsþáttum. Mikilvægt er að kennari samþætti spilið eigin kennslu og gefi nemendum tækifæri til að rannsaka tölurnar út frá eigin forsendum.

**Heimild:**

Brahier, D. (2007). Three-Digit Number Comparison. *Panning for Gold – 15 Investigations to Enrich Middle School Mathematics*. Portsmouth, NH: Heine-mann.

Bókin *Panning for Gold* er til á bókasafni Menntavísindasviðs HÍ.

**Dæmi úr bekkjarumræðum þegar nemendur hafa spilað nokkrum sinnum.**

***Kennari:*** *Hvaða ráð mynduð þið gefa einhverjum sem væri að byrja að spila þetta spil svo hann hafi góða möguleika á að vinna spilið?*

***Nanna:*** *Fylgjast með hvaða spil eru notuð í hverri umferð. Þegar gefið er í síðasta sinn úr bunkanum veistu til dæmis að flestar níur eru farnar svo ef þú færð eina getur þú verið nokkuð viss um að þú getir búið til hæstu töluna.*

***Guðrún:*** *Líka að hlusta á hvað hinir segja. Ef þú telur að þú hafir lægstu töluna en hún er ekki svo lág, t.d. 245 og báðir hinir spilararnir segja lág þá er ekki líklegt að þú hafir lægstu töluna og ættir að breyta.*

***Hafþór:*** *En þú getur aðeins breytt ef þú ert sá sem gefur og því síðastur að segja. Það eru augljóslega kostir við að vera sá sem gefur.*

***Heiða:*** *Þú verður líka að vera snjall í að raða tölustöfunum.*

***Kennari:*** *Hvað áttu við Heiða?*

***Heiða:*** *Segjum að þú hafir fengið 5, 7 og 9. Ef þú vilt fá hæstu töluna verður þú að gera 975 ekki 957 því 975 er hærri tala. Þetta eru sömu spilin en staðsetningin skipir máli.*

***Kennari:*** *Gott. Leyfið mér að gefa ykkur nokkur dæmi og segið mér hvernig þið mynduð búa til þriggja stafa tölu. Hvað mynduð þið gera ef þið fenguð 1, 2 og 3?*

***Valdís:*** *Ég myndi búa til lægstu mögulegu töluna. Ef þú gerir 132 væri það líklega sú lægsta.*

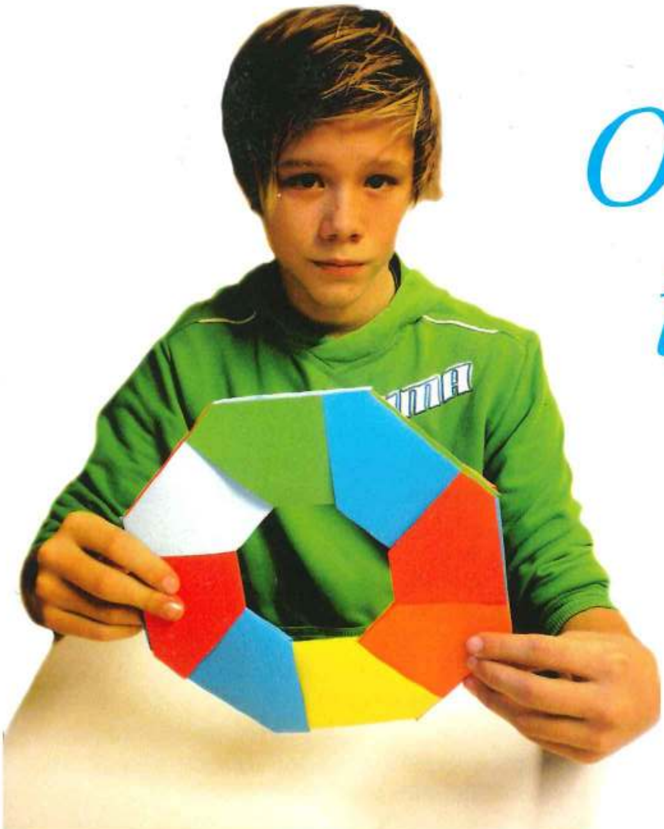
***Sigrún:*** *Nei, þú ættir að gera 123. Eins og Heiða sagði áðan þú verður að vera snjall í að raða tölustöfunum.*

***Kennari:*** *Hvað ef þú heyrðir báða meðspilarana segja lág áður en kæmi að þér?*

***Freyja:*** *Ef það mætti breyta tölunni myndi ég segja milli og búa til 321. Það er næst 500.*

***Kennari:*** *Af hverju 500?*

Umræða um ímynduð spil á hendi getur verið góð til að efla stærðfræðilega rökhugsun og æfa röksemdafærslu. Nemendur eru að ræða um líkur án þess að reikna út. Áhugavert er líka að ræða fleiri möguleika eins og hvað ef á hendi er 4, 5 og 6 eða 1, 5 og 9.



# Origami æði í 8. bekk

Í vetur kenni ég stærðfræði í 8. bekk og kenndi þessum krökkum einnig síðastliðinn vetur. Ég nota núna bækurnar Átta-tíu og finnst þær frábærar en í fyrra unnum við með Geisla 3. Í þeirri bók er mjög góður kafli um þríhyrninga og í framhaldi af þeim kafla eyddi ég miklum tíma í að kenna að nota hringfara, teikna þríhyrninga og búa til mynstur.

Fyrsti kaflinn í Átta-tíu 1 heitir *Hringir og hyrningar*. Vegna verkefnanna í fyrra reyndist þessi kafli krökkunum auðveldur og þeir duttu niður í verkefnin og nutu þess í botn að búa til ótrúlega flott mynstur og dunduðu sér við það í margar vikur. Þeir nýttu sér líka þemahefti sem heitir *Pælingar*. Núna stendur yfir sýning á sumum verkanna í Skagamollinu sem er listagallerí hér á Akranesi.

Mjög auðvelt er að fá þessa krakka til að vinna næstum hvað sem er, þeir eru skapandi, viljugir og áhugasamir. Þegar við höfðum lokið við kaflann um þrívídd langaði mig til að láta þá búa til lítinn kassa. Verkefnið hafði ég fengið árið áður hjá Rannveigu A. Guðmundsdóttur kennara í Breiðagerðisskóla. Nokkur kvöld fóru svo í að búa til marga kassa með það í huga að láta krakkana síðan finna sjálfa út úr því hvernig ætti að brjóta blaðið og búa til kassa með loki.

Ég hef verið dugleg að nýta mér tölvur í stærðfræðikennslunni á ýmsan hátt og ákvað því að fara með hópinn í tölvustofuna. Krakkarnir áttu síðan að leita á netinu og leitarorðið var „how to make a box“ og það var dásamlegt að fylgjast með þeim og sjá hversu spenntir og áhugasamir þeir voru. Síðan fóru að birtast flottar rósir, stjörnur, kassar, fílar, froskar, kúlur og allt mögulegt, sem þeir höfðu búið til. Þeir voru búnir að uppgötva Origami.

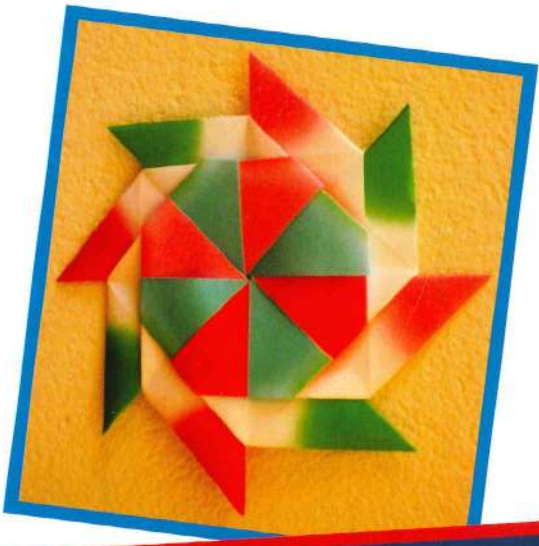
Þessi vinna stóð yfir í margar vikur, börnin voru ekki öll jafn áhugasöm, en þetta var smitandi og að lokum voru þau öll búin að prófa. Það var eins með þetta verkefni eins og mynsturgerðina, sum þeirra duttu alveg í þetta og voru mjög áhugasöm.

Lokahnykkurinn var síðan sýning á öllum verkefnunum og hafði hún ótrúlega smitandi áhrif út í allan skólann og gaman að sjá hversu margir sýndu áhuga á Origami, algjörlega óháð aldri. Til dæmis ákváðu umsjónarkennararnir í 4. bekk að láta sína krakka brjóta Origami stjörnu *(14 point star)* og var hún jólagjöf til pabba og mömmu með mynd af þeim sjálfum í miðjunni. Frábært verkefni og falleg gjöf.

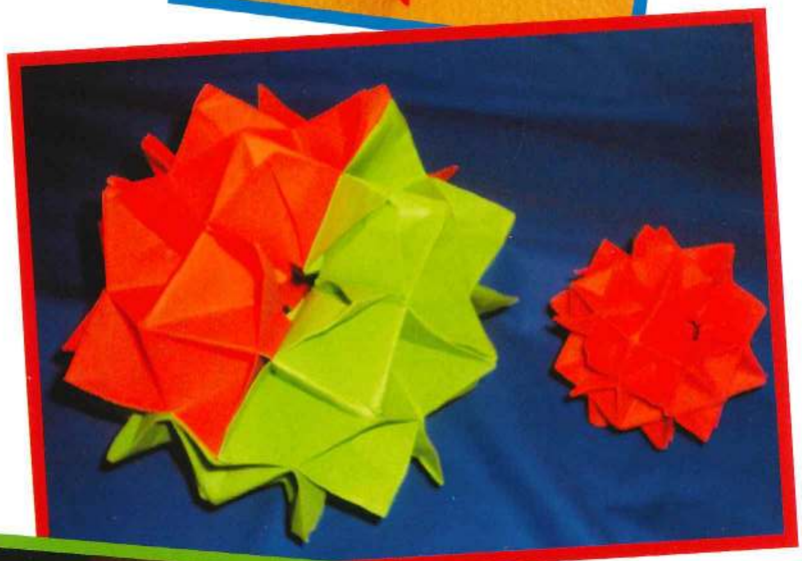
Þar sem þetta hafði gengið mjög vel ákváðu umsjónarkennarar bekkjanna að nýta sér þessa þekkingu krakkanna og láta þá búa til jólaskraut í stofurnar með Origami broti. Fyrir valinu varð bolti *(Origami Spike Ball)* sem er gerður úr 12 einingum. Allir nemendurnir gerðu einn bolta hvert og síðan hjálpuðust þeir að við að setja einingarnar saman. Við tókum heilan morgun í þetta verkefni og stofurnar voru mjög flottar með þessum glæsilegu jólaboltum.

Hvað með námsmat eða próf? Mér fannst ég einhvern veginn þurfa að meta alla þessa vinnu þar sem við eyddum miklum tíma í þetta verkefni. Hvernig átti ég að gera það? Ég ákvað að hafa heimapróf sem var byggt upp þannig að nemendur áttu að brjóta ákveðna tegund af Origami stjörnu *(14 point star)* og þeir máttu einungis endurnýta pappír sem til var á heimilinu. Síðan áttu þeir líka að búa til svokallaða buxnabók *(trousers book)* sem er mjög einfalt Origami brot og að lokum áttu þau að brjóta umslag *(pocket)* fyrir stjörnuna og bókina. Í bókina áttu þeir síðan að skrifa lýsingu á verkefninu, hvers konar pappír þeir notuðu og að lokum hugleiðingar sínar um verkefnið. Foreldrarnir áttu líka að skrifa sínar hugleiðingar. Hér á eftir koma umsagnir frá foreldrum.

*a) Mér finnst þetta mjög áhugavert verkefni og virkilega vel gert. Stærðfræðin hefur margar hliðar.*
*b) Þetta var fróðlegt og skemmtilegt stærðfræðiverkefni. Það gekk mjög vel og við tókum öll þátt.*



Auk þess að senda krakkana heim með þetta próf var samvinnupróf í skólanum sem tók eina kennslustund. Þeir völdu sjálfir að hafa samvinnupróf eftir umræður í bekkjunum og voru ýmist 2 eða 3 saman. Prófið byggði ég á námsmatsverkefnunum sem fylgja Átta-tíu. Einnig unnu krakkarnir sjálfsmat þar sem þeir mátu vinnu annarinnar, heimaprófið og samvinnuprófið.



Hlutverk mitt sem kennari var ekki endilega að kenna svo mikið, miklu fremur að skapa aðstæður, gefa tíma og vera verkstjóri. Krakkarnir fengu allan þann tíma sem þeir óskuðu eftir í þetta Origami verkefni. Með því að leyfa þeim að ráða sem mest ferðinni og skapa aðstæður og andrúmsloft var mjög auðvelt að viðhalda áhuganum.

Niðurstaðan úr sjálfsmatinu var að þeim finnst öllum gaman í stærðfræði, einstaka verkefni þó ekki nógu skemmtileg. Þeir segjast vera duglegir að læra og segjast læra mikið af því að vinna saman í prófum.

Lokaniðurstaðan er því jákvætt viðhorf, áhugi og ánægja. Er hægt að biðja um meira?

*- Borghildur Jósúadóttir*

**Þegar menn tala um sögu stærðfræðinnar beinist hugurinn fyrst og fremst að frægustu stærðfræðingum í Grikklandi hinu forna. Ástæðan er sú að stærðfræðin í hinum vestræna heimi í dag byggir á framlegð, skilgreiningum og útskýringum þeirra. Þótt stærðfræði sem er upprunnin í Kína sé ekki eins þekkt þá hafði hún áhrif á samfélög í nágrenninu, allt til Indlands.**

## NÍU KAFLAR UM STÆRÐFRÆÐILISTINA

### Tilurð *Níu kafla*

*Níu kaflar um stærðfræðilistina* er stærðfræðibók sem hefur ráðið lögum og lofum í sögu kínverskrar stærðfræði (Leng, 2006, bls. 487). Hún er virt fyrir fræðagildi sitt um allan heim eftir að vestrænir menn uppgötvuðu tilvist hennar. Hún var notuð sem grunnbók, ekki bara í Kína heldur líka í nágrannalöndum og svæðum þar til vestræn vísindi náðu þangað um 1600 e.Kr.

### Innihald *Níu kafla*

Níu kaflar inniheldur 246 stærðfræðiþrautir og lausnir við þeim. Þrautirnar voru ætlaðar til að kenna aðferðir við að leysa dagleg vandamál í verkfræði, landmælingum, viðskiptum og skattamálum (O´Connor og Robertsson, 2003). Rannsókn í Singapore frá 2003 sýnir að jafnvel í nútímanum getur komið sér vel fyrir nemendur að kynnast stærðfræðiþrautum á borð við þær sem eru í *Níu köflum* (Leng, 206, bls. 497).

*Níu kaflar* inniheldur upplýsingar um hefðbundna kínverska stærðfræði. Hún byggir á vissum fornum stærðfræði-

# NÍU kaflar um stærðfræðilistina

ELÍNBORG VALSDÓTTIR OG ÁGÚST BENEDIKTSSON

SEGJA FRÁ RÚMLEGA TVÖ ÞÚSUND ÁRA GAMALLI KÍNVERSKRI KENNSLUBÓK Í STÆRÐFRÆÐI SEM INNIHELDUR SAFN DÆMA UM VIÐFANGSEFNI DAGLEGS LÍFS.

Áhrifamesta stærðfræðibókin í Kína til forna heitir *Níu kaflar um stærðfræðilistina* (*Jiu Zhang Suan Shu*). *Níu kaflar* var kennslubók og þótt hún hafi verið endurrituð og breytt í gegnum tíðina var hún í notkun þar til hin vestræna stærðfræði barst til Kína á 16. öld. Bókin er dæmasafn með athugasemdum og útskýringum á lausnum frá Liu Hui, fyrsta markverða fræðimanni Kína. Sýnd eru nokkur dæmi úr bókinni sem gefa okkur hugmynd um líf fólks og athafnir á tímum keisaranna (um 200 e.Kr.). Þessi bók og hvað hún á sameiginlegt með stærðfræðingum Forn-Grikkja, sérstaklega reglu Pýþagórasar, er áhugavert og verðugt umfjöllunarefni. Sannanir í *Níu köflum* eru hins vegar ekki margar; sýnt er að reglan gildi en þó fyrirfinnast þar rúmfræðilegar útlistanir.

Hægt er að líta á bókina sem hliðstæðu við *Frumatriði* (e. *Elements*) Evklíðs sem hann ritaði um 300 f.Kr. (Berlinghoff og Gouvea, 2004, bls. 19) og er safn grískrar stærðfræði sem þekkt var á þeim tíma.

Ekki er vitað hver skrifaði *Níu kafla* upphaflega en það stafar af þeirri kínversku hefð að höfundar endurrituðu verk mann fram af manni. Elstu útgáfur bókarinnar eru almennt taldar vera frá þriðju öld f.Kr. en þó eru til heimildir um að efni bókarinnar sé allt frá elleftu öld f.Kr. (Berlinghoff og Gouvea, 2004, bls. 13). Þeirri útgáfu bókarinnar, sem mest er vísað í núna, var safnað saman og endurraðað af Zhang Cang og Geng Shouchang á fyrstu öld f.Kr. (Kangshen, Crossley og Lun, 1999, bls. 1; Dauben, 2007, bls. 227).

legum þörfum sem ákveða kaflaskiptingu hennar. Kangshen, Crossley og Lun (1999, bls. 2-3) setja kaflaskiptinguna fram á eftirfarandi hátt:

Kafli 1 – Rétthyrningar (38 dæmi).

- Mælingar á landi. Formúlur fyrir flatarmál akra sem eru mismunandi í laginu. Brotareikningur er einnig skoðaður í smáatriðum.

Kafli 2 – Hirsi og hrísgrjón (46 dæmi).

Kafli 3 – Skipt eftir hlutföllum (20 dæmi).

- Dæmin í köflum 2 og 3 eru að mestu leyti leyst með svokallaðri Jinyou reglu sem er þekkt í hinum vestræna heimi sem þríliða (e. rule of three). Dæmin koma úr landbúnaði, iðnaði og verslun. Nokkur innihalda stærðfræðilegar eða rúmfræðilegar talnarunur.

Kafli 4 – Stuttar víddir (24 dæmi).

- Hvernig breyta á hliðum akurs en halda sama flatarmáli. Samlagning brota, fernings- og teningsrætur auk útreikninga er varða hring og kúlu. Kynning á óræðum rótum.

Kafli 5 – Framkvæmdir fyrir almenning (28 dæmi).

- Formúlur fyrir rúmmál bygginga, jarðvinnslu og kornhrauka.

Kafli 6 – Sanngjarnar álögur og dreifing gæða (28 dæmi).

- Skattar og þegnskylduvinna. Framhald af köflum 2 og 3 með flóknari dæmum.

Kafli 7 – Gnótt og vöntun (20 dæmi).

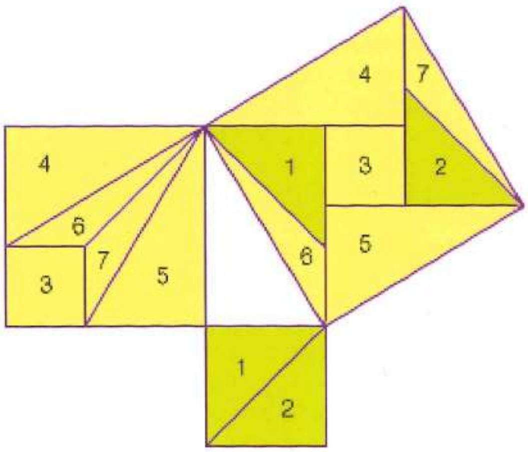
- Í þessum kafla er meðal annars notuð tvöfalda falsreglan (e. the rule of double false position).
- Þetta er ævaforn tækni til að eiga við þrautir sem við kennum núna við jöfnu beinnar línu, sérstaklega á forminu ax + b = c. Reglan þótti sérstaklega notadrjúg vegna skorts á táknum til að setja fram algebru. Í stuttu máli gengur reglan út á að setja fram tvö röng svör við gildi á x og nota þau til að finna rétta svarið (McGee, 2005).

Kafli 8 – Rétthyrnd fylki (18 dæmi).

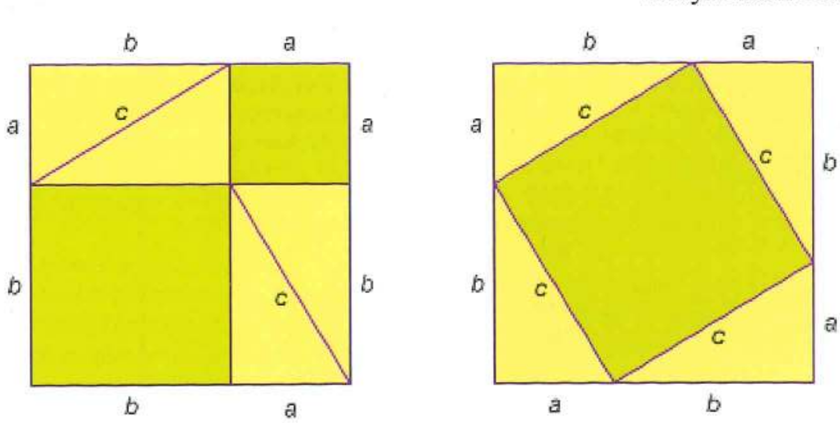
- Kaflinn fjallar um lausnir á jöfnuhneppum sem jafngildir því sem sett var fram tvö þúsund árum seinna bæði í kenningu og framkvæmd. Einnig eru þarna gefnar reglur fyrir útreikninga með jákvæðum og neikvæðum tölum.

Kafli 9 – Rétthyrndir þríhyrningar (24 dæmi).

- Gougu reglan er sett fram, en hún jafngildir því sem vestrænir menn kalla setningu Pýþagórasar. Pýþagórískar þrenndir og annars stigs jöfnur eru einnig kynntar.



MYND 1 Framsetning Liu Hui á setningu Pýþagórasar. Til samanburðar sýnir neðri myndin hvernig Pýþagóras (eða menn hans) gæti hafa sett fram sína sönnun. Pýþagóras var aðeins á undan Liu Hui með sönnun sína (1000-500 f.Kr.) en fátt bendir til að Liu hafi þekkt til verka hans.



MYND 2 Framsetning Pýþagórasar á setningu sinni.

## ÁHRIF FRÆÐIMANNA Á NÍU KAFLA

Margir fræðimenn hafa gert athugasemdir og breytt *Níu köflum* og er það tilkomið vegna þeirrar fornu kínversku hefðar að breyta bókum, auka þær og bæta án þess að höfundar séu sérstaklega að geta þess. Liu Hui sem er þeirra frægastur, gerði sínar athugasemdir við útgáfu bókarinnar á þriðju öld e.Kr. (*The Nine Chapters on the Mathematical Art*, 2010). Almennt er þó talað um að *Níu kaflar* sé frá tímum Han ættarinnar 200 f.Kr. til 200 e.Kr. (Kristín Bjarnadóttir, 2010; Wang, 2009, bls. 631; Leng, 2006, bls. 486).

### Athugasemdir Liu Hui

Liu Hui er talinn vera fyrsti markverði fræðimaður Kínverja í stærðfræði en lítið er ritað um hann í opinberum gögnum. Hann var fræðimaður sem hafði á valdi sínu margar aðferðir, bæði gamlar og nýjar, sem hann kynnti til sögunnar með athugasemdum sínum við bókina. Hann virðist hafa verið hógvær maður ef dæma má af athugasemdum hans til að finna rúmmál kúlu (Kangshen, Crossley og Lun 1999, bls. 2).

Liu hafði sérlega djúpan skilning á því hvernig finna mátti stærsta samdeili náttúrlegra talna með aðferð sem núna er nefnd reiknirit Evklíðs. Hann segir einnig frá því í smáatriðum hvernig finna má minnsta samfeldi nokkurra náttúrlegra talna. Tæknin er frábrugðin þeirri vestrænu sem leggur áherslu á frumtölur sem finnast ekki í hefðbundinni kínverskri stærðfræði. Hann útskýrir síðan meðferð brota út frá reglum sem eru sambærilegar við nútímakenningar um brot.

Liu var einstæður stærðfræðingur, vel lesinn bæði í vísindum og bókmenntum. Lausnir hans á dæmunum í *Níu köflum* sýndu komandi kynslóðum hvernig átti að leysa þrautir og einnig hvernig átti að rökstyðja og útskýra reglur sem notaðar voru. Án Liu hefði *Níu kaflar* orðið einföld dæmabók en ekki sígild fræðabók um stærðfræði (Hodgkin, 2005, bls. 82). Það er merkilegt að hugsa til þess að verk Liu hafa varðveist að mestu í einungis tveimur ritum, *Níu köflum* og *Stærðfræðihandbókinni um sjávareyjuna* (e. *Sea Island Mathematical Manual*) (Straffin, 2004, bls. 69).

Höfundar fornra stærðfræðibóka í Kína eru almennt ekki þekktir en Liu Hui er einn sá merkasti. Hann var ólíkur öðrum kínverskum höfundum að því leyti að hann gaf margar ólíkar lausnir á dæmunum. Hann mætti að ósekju setja á stall með áhrifamestu stærðfræðingum fortíðar.

## DÆMI ÚR NÍU KÖFLUM

### Rétthyrningar og almenn brot

Í fyrsta kafla bókarinnar er fjallað um flatarmál rétthyrninga. Dæmin eru nokkuð hrein og bein. Eitt er orðað þannig að ef akur er 12 bu á breidd og 14 bu á lengd, hversu stór er hann þá? Svarið er 12 sinnum 14 bu eða 168 ferbu. Síðan er umræða um hver einingin er og einnig gefur Liu teikningu af akri af þessari stærð, skipt upp í litla ferninga sem hver hefur hliðarlengd 1 bu (Kangshen, Crossley og Lun 1999, bls. 62).

Dæmi fimm í fyrsta kafla er um styttingu almennra brota. Þar á að fullstytta 12/18. Svarið er gefið sem 2/3 sem er að sjálfsögðu rétt á okkar mælikvarða. Ráðleggingarnar sem lesandinn fær til verksins er að helminga teljara og nefnara ef hægt er. Ef ekki þá á að finna mismun teljara og nefnara og endurtaka það þar til stærsti samdeilir finnst og síðan skipta teljara og nefnara með honum (Kangshen, Crossley og Lun 1999, bls. 64). Í dag er þessi aðferð kölluð reiknirit Evklíðs, eins og áður hefur komið fram.

### Dæmi úr daglegu lífi

Margar, ef ekki flestar, þrautir í *Níu köflum* endurspegla samfélagið sem þær eru sprottnar úr. Dæmi um þetta er þrautin um að yrkja jörðina. Gerum ráð fyrir að einn maður geti gróðursett í sjö mu (akurlendis) eða plægt þrjá mu eða sléttað fimm mu á dag. Ef einn maður gerir allt þrennt á einum degi, hversu marga mu getur hann fullklárað (plægt, sléttað og gróðursett)? Þarna fær lesandinn að vita um vinnuferli á akri á tímum Han ættarinnar (Song, 1996, bls. 261). Einnig eru vísanir í lása- og örvasmíði.

### Setning Pýþagórasar

Í kafla níu er fjallað um rétthyrnda þríhyrninga. Þar eru ýmis dæmi sem snúast um að finna þriðju hlið rétthyrnds þríhyrnings ef lengd tveggja hliða eru gefnar. Þrautirnar eru misflóknar eins og eftirfarandi dæmi sýna. Ef gefin er grunnlína og summa hæðar og langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi, hversu löng er langhliðin? (Pythagorean theorem, 2010). Önnur þraut úr kaflanum er um tjörn. Í miðri tjörn sem er tíu chi að þvermáli vex jurt sem nær einn chi upp fyrir vatnsyfirborðið. Þegar jurtin er toguð í átt að bakka tjarnarinnar nær hún rétt svo þangað. Hversu löng (eða há) er jurtin? (Dauben, 1992, bls. 138).

Til að leysa þessar þrautir var sennilega notað það sem við þekkjum nú sem setningu Pýþagórasar en Liu Hui útskýrði í athugasemdum sínum við *Níu kafla* með því að notast við tangram sem er ein tegund raðspils. Liu setti fram að summa ferninga við skammhliðar rétthyrnds þríhyrnings væri jöfn ferningi við langhliðina. Byrjað er með $a^2$ og $b^2$ sem eru ferningarnir við hliðar þríhyrningsins sem síðan eru klipptir niður í ýmis form sem hægt er að endurraða til að búa til $c^2$ sem er ferningurinn við langhliðina (Pythagorean theorem, 2010). Mynd 1 sýnir hvernig hugsanlegt er að sýna útskýringar Liu myndrænt.

**Höfundarnir** Elínborg Valsdóttir grunnskólakennari við Egilsstaðaskóla og Ágúst Benediktsson grunnskólakennari við Hólabrekkuskóla eru bæði í meistaranámi við HÍ. Greinin var upphaflega skrifuð sem verkefni í námskeiði sem heitir *Saga stærðfræðinnar*.

**Sjá grein með heimildaskrá** á vef Flatar.

## *Af hálftómum og hálffullum glösum*

## - SVÖR -

1. Nákvæmlega hálfur lítri af vatninu gufaði upp, eða um 50.5% vatnsins.
2. Glasið var hálffullt eftir 59 sekúndur.
3. Þetta dæmi leysist nánast af sjálfu sér ef maður gefst ekki upp, og það eru fleiri en ein lausn. Ein lausn er svona: þú fyllir 3 lítra fötuna, hellir yfir í 5 lítra fötuna, fyllir aftur 3 lítra fötuna og hellir úr henni þar til 5 lítra fatan er full. Þá er 1 lítri eftir í 3 lítra fötunni. Tæmum 5 lítra fötuna, hellum lítranum úr 3 lítra fötunni í 5 lítra fötuna. Fyllum svo 3 lítra fötuna og hellum yfir í 5 lítra fötuna (sem innihélt 1 lítra.) Þá eru 4 lítrar í 5 lítra fötunni.
4. Ein leið er að mæla fyrst 12 kíló (helmingur rúsínanna á móti helmingnum). Nota svo 12 kíló til að finna 6 kíló, og svo 6 kíló til að finna 3 kíló. Þá hefur maður eina 6 kílóa hrúgu og eina 3 kílóa hrúgu sem maður setur saman í eina 9 kílóa hrúgu.

# NORMA 11

## Norræn ráðstefna um stærðfræðimenntun

**NORMA 11 - Norræn ráðstefna um stærðfræðimenntun verður haldin í HÍ við Stakkahlíð dagana 11. - 14. maí 2011. Nánari upplýsingar er að finna á heimasíðu ráðstefnunnar:** http://vefsetur.hi.is/norma11

**NORMA 11 er sjötta norræna ráðstefnan um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar. Hún er haldin í samstarfi við NORME norræn samtök félaga um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar. Þetta er í fyrsta sinn sem ráðstefnan er haldin á Íslandi. Á ráðstefnunni gefst rannsakendum á sviðinu tækifæri til að kynna rannsóknir sínar með ýmsum hætti.**

Ráðstefnan er haldin þriðja hvert ár og hefur hún verið sótt af um 100 rannsakendum frá Norðurlöndum, Eystrasaltslöndum og ýmsum öðrum löndum Evrópu. Ljóst er að þátttaka verður góð en um 100 erindi hafa verið samþykkt til birtingar á ráðstefnunni. Því er ljóst að þátttakendur verða vel á annað hundrað. Á síðustu 10 árum hafa fjölmargir útskrifast með doktorspróf í stærðfræðimenntun á Norðurlöndunum og því hafa mörg ný og áhugaverð rannsóknarefni verið skoðuð.

Aðalfyrirlesarar ráðstefnunnar verða þau Marit Johnsen-Høines frá Háskólanum í Bergen, Núria Planas, Universitat Autonoma de í Barcelona, Bharath Sriraman, Háskólanum í Montana og Roger Säljö frá Háskólanum í Gautaborg.

Í fyrirlestri sínum mun **Marit Johnsen-Høines** fjalla um námssamtöl og hvernig þau þróast í gegnum samstarf kennaranema, kennaramenntunarstofnunar, grunnskóla og fyrirtækja. Sjónum verður beint að námssamtölum sem leið til starfsþróunar fyrir kennaranema.

**Núria Planas** mun fjalla um tungumálanotkun í stærðfræðikennslu í bekkjum þar sem nemendur tala fleiri en eitt tungumál. Rannsóknir benda til þess að mikilvægt sé að nemendur fái tækifæri til að læra stærðfræði á sínu eigin tungumáli en lítið gerist í þeim efnum í raun. Núria spyr: Hvers vegna?

**Bharath Sriraman** fjallar um stefnur og strauma í (norrænum) rannsóknum á sviði stærðfræðimenntunar. Hann hefur nýlega ritstýrt tveimur bókum *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers (Sriraman & English, 2010) og The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education (Sriraman, Bergsten, Goodchild et al., 2010)* og myn fyrirlestur hans byggja á því efni.

**Roger Säljö** mun í sínum fyrirlestri fjalla um hvernig börn þróa skilning sinn á stærðfræðilegum líkönum og skráningu í gegnum það að leysa orðadæmi. Orðadæmi hafa verið notuð í stærðfræðikennslu frá upphafi og greining á hönnun þeirra getur varpað áhugaverðu ljósi á hugmyndir um menntun og félagsmótun við kennslu í læsi og stærðfræði.

Ljóst er að á ráðstefnunni verða haldin mörg áhugaverð erindi fyrir stærðfræðikennara. Bæði verða haldin stutt erindi þar sem rannsakandi hefur 20 mínútur til kynningar og umræðna og lengri erindi þar sem rannsakandinn hefur 40 mínútur til umráða. Meðal annars verður fjallað um kennslu og skilning nemenda á almennum brotum, margföldun og deilingu. Gerð verður grein fyrir rannsóknum á skilum milli skólastiga og á það bæði við um skil milli grunnskóla og framhaldskóla og framhaldskóla og háskóla.

Greinilegt er að þó nokkur fjöldi rannsakenda beinir sjónum sínum að námi, kennslu og viðhorfum framhaldskólanemenda. Einnig fjalla nokkrar rannsóknir um nám í leikskóla og yngstu bekkjum grunnskóla. Stærðfræðinám ungra barna er þó svið sem frekar fáir á Norðurlöndunum hafa beint sjónum sínum að en á ráðstefnunni er stefnt að því að stofna tengslanet milli rannsakenda á þessu sviði. Rannsóknir á menntun og þekkingu kennara skipa nokkuð stóran sess sem og rannsóknir á umræðum, samskiptum og viðhorfum nemenda og kennara í skólastofunni. Einnig verður fjallað um námsmat og áhrif þess á virkni og frumkvæði nemenda og notkun tæknimiðla við kennslu.

Ráðstefnan er öllum opin, en ráðstefnugjald er 40.000 kr. Kennurum og öðrum áhugamönnum býðst að koma einn dag sem gestir á ráðstefnuna og er gjaldið þá 6000 kr.

*Guðný Helga Gunnarsdóttir*
lektor í stærðfræðimenntun
við Menntavísindasvið H.Í

Flötur
SAMTÖK STÆRÐFRÆÐIKENNARA

**Ritstjóraspjall** 2

**Vefrit BSHM** 3

**Spil og stærðfræði** 4
Svanhildur Eva Stefánsdóttir

**Heilabrot** 5

**Hve mikið, hve margir?** 6
Kristín Bjarnadóttir

**Námstefna Flatar 2010** 8

**Dagur stærðfræðinnar** 10
Kennarar í Inngunnarskóla

**Numicon, í leik og starfi** 12
Oddfríður Kristín Wallis Traustadóttir

**Rannsókn á tölum** 16
Guðbjörg Pálsdóttir

**Origami æði í 8. bekk** 18
Borghildur Jósúadóttir

**Níu kaflar um stærðfræðilistina** 20
Elínborg Valsdóttir og Ágúst Benediktsson

**Norma 11** 23
Guðný Helga Gunnarsdóttir