

FELATAFRMÁL

2011

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆDIKENNARA
2. TBL., 18. ÁRG.



Flatarmál 2. tbl., 18. árg. 2011
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2011 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Rannveig Þorvaldsdóttir *formaður*
Öldutúnsskóla
Þóra Guðrún Einarsdóttir *gjaldkeri*
Heiðarskóla
Laufey Einarsdóttir *ritari*
Korpuskóla
Valgarð Mór Jakobsson *vefumsjón*
Framhaldsskólanum í Mosfellsbæ
Rannveig A. Guðmundsdóttir *meðstjórnandi*
Breiðagerðisskóla

Ritnefnd Flatarmála

Þórgunnur Óttarsdóttir *ritstjóri*
Brekubæjarskóla
Laufey Einarsdóttir
Korpuskóla

Prófarkalestur

Birna Hugrún Bjarnadóttir
Laufey Skúladóttir

Umbrot og myndvinnsla

Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

Prentun

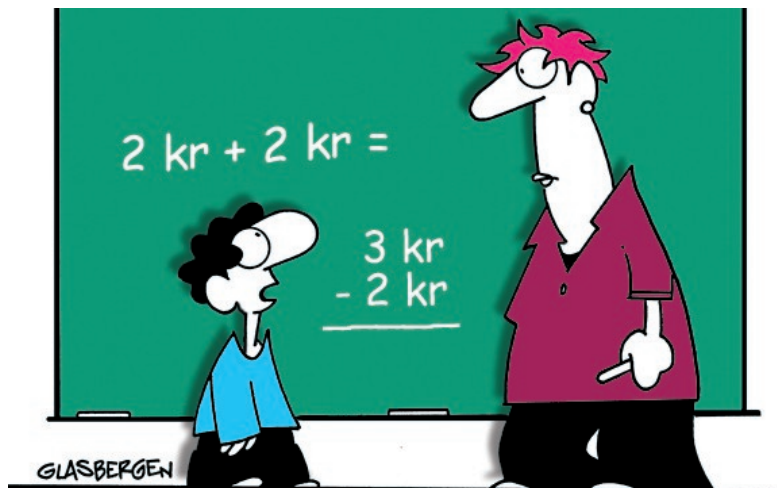
Prentsmiðjan Oddi ehf.

Veffang / netfang

flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.



Svona miðað við skuldastöðu minnar kynslóðar ...
ættum við ekki að vera að nota hærri tölur?

Heil og sæl,

NÚ HEFUR enn eitt tölublað Flatarmála litið dagsins ljós og ber að gleðjast yfir því. Kristján Sigurðsson lét af störfum sem ritstjóri og hefur undirrituð tekið við ritstjórn blaðsins.



Efni blaðsins er að vanda fjölbreytt og vonandi finna flestir eitthvað við sitt hæfi. Söguhorn Kristínar Bjarnadóttur er á sínum stað og vil ég þakka henni fyrir ötul skrif í blaðið. Að þessu sinni veltir hún upp spurningunni *Hvað er núll?* Norma ráðstefnunni eru gerð góð skil, en hún fór fram í maí á þessu ári. Í blaðinu má einnig finna viðtal við Önnu Kristjánsdóttur í tilefni af sjötíu ára afmæli hennar. Síðast en ekki síst er að finna þrautir, stærðfræði undir berum himni, stærðfræðiverkefni við lok 8. bekkjar og bókarkynningu.

Ýmsar nýjungar líta dagsins ljós í Flatarmálum að þessu sinni. Fyrst ber að nefna umfjöllun Ingólfs Gíslasonar um nokkrar áhugaverðar vefsíður. Nokkur stærðfræðitímarit eru kynnt að þessu sinni og svo er það liðurinn *Á döfinni* þar sem fram koma áhugaverðir viðburðir í heimi stærðfræðinnar á næstunni.

Vinna við fyrsta tölublað næsta árs er þegar hafin. Allt stærðfræðitengt efni, svo sem ábendingar um áhugaverðar greinar og verkefni, sögur úr kennslustofunni eða hvað annað sem á ykkur brennur, er vel þegið.

Þórgunnur Óttarsdóttir,
ritstjóri Flatarmála

Mikael Skånström

- aðalfyrirlesari á Námstefnu FLATAR
4.-5. nóvember 2011

Mikael Skånström kennir við kennaraskóla á Jótlandi í Danmörku (VIA University College). Hann kenndi um árabíl unglingum við tilraunaskólann SPF (Statens Pædagogiske Forsøgsskole) í Kaupmannahöfn og hélt þar auk þess fjölda námskeiða fyrir grunnskólanemendur, kennaranema (meðal annars íslenska) og kennara. Hann hefur unnið að margvíslegum þróunarverkefnum bæði sem kennari og leiðbeinandi.

Mikael hefur skrifað um kennslu sína og má þar nefna kafla í bókinni *Kunne det tænkes* þar sem hann ásamt fleirum skrifar kaflann Farlige små tal. Þar segir frá kennsluferli þar sem elstu nemendur grunnskólans vinna með líkur út frá rannsókn á salmonellu í eggjum. Mikael sér mikla möguleika á að vinna á skapandi hátt með stærðfræði til að rannsaka umhverfið og styrkja notkun stærðfræði í gagnrýnum samfélagsumræðum.



Við minnum á **DAG STÆRÐFRÆÐINNAR** fyrsta föstudag í febrúar 2012

Markmiðið með degi stærðfræðinnar er tvíþætt:

- 1) að vekja nemendur og sem flesta aðra til umhugsunar um stærðfræði og hlutverk hennar í samfélaginu
- 2) að fá nemendur til að koma auga á möguleika stærðfræðinnar og sjái hana í víðara samhengi.

Stærðfræði undir berum himni

- námsefni til útikennslu

PÓRA RÓSA GEIRSDÓTTIR,
SÉRFRÆÐINGUR VIÐ HA, OG **INGILEIF**
ÁSTVALDSDÓTTIR, SKÓLASTJÓRI
ÞELAMERKURSKÓLA SEGJA FRÁ
NÝLEGU NÁMSEFNI Í ÚTIKENNSLU SEM
ÞÆR HAFNA ÞÝTT ÚR NORSKU.

Nýlega kom út námsefni til kennslu stærðfræði utan-
dyra. Um er að ræða þýðingu á norsku námsefni sem á
frummálinu nefnist *Den matematiske ryggsekk*. Á is-
lensku hefur námsefnið fengið heitið *Stærðfræði undir*
berum himni. Höfundar verkans eru Ingeborg Ra-
nøyen, Marietta Dahn, Arne Gravanés og Gerd Bones
og Kjetil Strand sá um grafíska hönnun.

Námsefnið kom fyrst út í Noregi árið 2002 og fjórum árum
seinna var efnið endurbætt og gefið út aftur og er það sú
útgáfa sem nú hefur verið staðfærð og þýdd á íslensku.
Þóra Rósa Geirsdóttir, sérfræðingur hjá Miðstöð skóla-
þróunar við Háskólann á Akureyri og Ingileif Ástvaldsdóttir,
skólastjóri Þelamerkurskóla þýddu og staðfærðu efnið og
Þróunarsjóður námsgagna styrkti verkið.

Stærðfræði undir berum himni er safn verkefnabóka fyrir
nemendur 1. - 7. bekkjar. Þetta eru handbækur fyrir
kennara og miðað er við að verkefni séu unnin utandyra.
Hvorki þarf að kaupa bækur fyrir nemendur né ljósrita
uppúr þeim og því geta þær nýst mörgum námshópum ár
eftir ár.

Bækurnar fyrir yngsta stig grunnskólans eru þrjár og fjallar
hver þeirra um afmarkað viðfangsefni út frá inntaki stærð-
fræðinnar: *Mælingar*, *Rúmfræði* og *Tölur og tölfræði*.
Bækurnar fyrir miðstig grunnskólans eru fjórar: *Mælingar*,
Rúmfræði, *Tölfræði* og *líkindi og Tölur og algebra*.

Hvert verkefni í bókunum getur tekið stuttan eða langan
tíma. Flest verkefnanna eru miðuð við klukkustund en
önnur krefjast meiri tíma. Uppsetning þeirra gefur einnig
möguleika á einhverri aðlögun með tilliti til tímans.

Verkefni í bókunum taka mið af aðalnámsskrá grunnskóla í
stærðfræði. Neðst á hverri síðu er vísað í þrjú aðferðamark-
mið aðalnámsskrár sem eru: *stærðfræði og tungumál*,
lausnir verkefna og þrauta, *rökshenging og röksemda-*
færslur. *Tengsl við daglegt líf og önnur svið* á við í öllum
verkefnum.



Unnið undir berum himni

Kennslurými staðsett undir berum himni gefur óendanlega
marga möguleika fyrir nemendur til að bæta við reynslu
sína innan stærðfræðinnar. Undir berum himni er stærð-
fræðin við hvert fótmál. Þar gildir að kennari geti komið
auga á hana og hafi kunnáttu og færni til að nýta sér að-
stæður.

Kennslurými undir berum himni gefur nemendum líka mikið
frelsi. Nemendur þurfa ekki að sitja hljóðir og þeir trufla ekki
aðra þó þeir hoppa og ærslit. Þar skiptir ekki máli þótt vatn
sullist svolítið út fyrir eða umræðurnar verði háværar. Að-
stæður ættu því að hefta nemendur minna en þegar þeir
vinna innan dyra.

Í kennslurými undir berum himni er stærðfræðin í sínu
eðlilega og náttúrulega umhverfi og þegar nemendur sjá
það hverfur ógnin sem oft fylgir faginu. Að gefa nemendum
tækifæri til að sjá hvað kílómetri er í raun og veru langur
með því að ganga þá leið eða að sjá hvað rúmmetrinn er
stór með því að byggja snjótening í þeirri stærð er leið til að
gera nemendum það ljóst að stærðfræði er tæki til að lýsa
raunveruleikanum. Úti undir berum himni fá nemendur tæki-
færi til að skynja að stærðfræðin er hluti af öllu daglegu lífi.

Það er von höfunda að með þessum heftum og framsetn-
ingu þeirra séu kennarar komnir með í hendur gott náms-
efni sem þeir geta notað í kennsluáætlanir sínar. Þegar
skipuleggja á t.d. mælingavinnu geti þeir dregið fram það
hefti og fundið í því verkefni sem henta viðfangsefninu og
stöðu nemenda.

Á döfinni ...

Fjölmarginir viðburðir eru á döfinni í heimi stærðfræðinnar 2012. Inni á vefsvæði NCM (Nationellt centrum för matematikutbildning ncm.gu.se/konferenser er að finna lista yfir áhugaverða viðburði í heimi stærðfræðinnar. Tveir viðburðir standa upp úr árið 2012, annars vegar ICME og hins vegar ATM.

ICME 12 - þingið

> 8. - 15. júlí 2012 í Seoul, Kóreu

ICME (International Congress on Mathematical Education) er alþjóðlegt þing samtakanna ICMI (International Commission on Mathematics Instruction). Þingið er haldið á fjögurra ára fresti.

ICMI var stofnað árið 1908 í þeim tilgangi að hlúa að viðleitni til að bæta stærðfræðikennslu og nám. Unnið er að því með ráðstefnu- og fundahaldi og útgáfu rita sem geta stuðlað að íhugun, skoðanaskiptum og miðlun hugmynda og upplýsinga um allar hliðar stærðfræðimenntunar, kenninga um hana og reynslu sem aflað hefur verið á hverjum tíma.

Þingið er opið öllum sem hafa áhuga á stærðfræðimenntun; þ.e. fræðimönnum, kennurum, háskólanemum og almenníngi. Allir geta fundið eitthvað við sitt hæfi á fyrirlestrum, í umræðuhópum og á sýningum.

> Vefur ICME 12: icme12.org

ATM - ráðstefnan

> 2. - 5. apríl 2012 í Swansea, Bretlandi

ATM (Association of Teachers of Mathematics) eru samtök breskra stærðfræðikennara. Þau hafa fengist við starfsþróun stærðfræðimenntaðra í yfir fimmtíu ár. Páskaráðstefna ATM er hápunkturinn í starfi samtakanna um starfsþróun.

Ráðstefnan 2012 veður haldin mánudaginn 2. apríl til fimmtudagsins 5. apríl í Háskólanum í Swansea sem er suðurströnd Englands. ATM-ráðstefnan býður upp á fjölbreyttasta úrval viðburða sem finna má um starfsþróun fyrir stærðfræðimenntað fólk af öllu tagi.

Yfirskrift ráðstefnunnar, Enigmas - ráðgátur, vísar ekki aðeins í áhugaverðar þrautir og gátur í stærðfræði heldur einnig í hina furðulegu og óútskýranlegu viðburði sem eiga sér stað í kennslustofunni.

> Vefur ATM-samtakanna: atm.org.uk

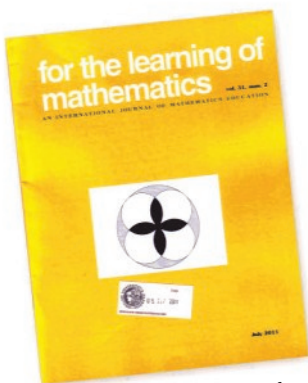
Áhugaverð stærðfræðitímarit

Hver kannast ekki við að hafa ætlað að gefa sér meiri tíma til að lesa sér gagns í stærðfræði, auka sér vísýni, fá kennsluhugmyndir og áhugaverðar nálgangir í kennslu?

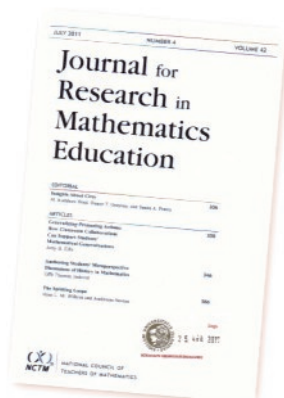
Bókasafn Menntavísindasviðs HÍ kaupir fjölmörg áhugaverð stærðfræðitímarit. Í tímaritunum *For the learning of mathe-*

matics, Journal for Research in Mathematics Education, Matematik og Mathematics in School er margt áhugaverðra greina.

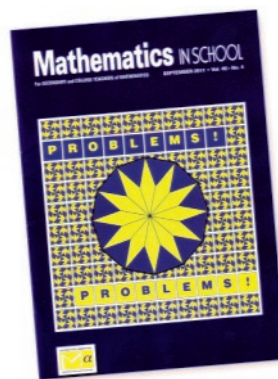
Á vefslóðinni tdnet.com/NULL er að finna öll tímarit (A-Ö) sem Menntavísindasvið HÍ og Landsbókasafn - Háskólabókasafn kaupa í séraðgangi (einungis opin á háskólanetinu). Tímarit í rafrænum landsaðgangi (Hvar.is) eru opin öllum á Íslandi.



Titill: For the Learning of Mathematics: an International Journal of Mathematics Education
Útgefandi: FLM Pub. Co, Montreal **Keypt frá** 1980



Titill: Journal for Research in Mathematics Education
Útgefandi: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA **Keypt frá** 1978



Titill: Mathematics in School
Útgefandi: Longman Group, Harlow Essex **Keypt frá** 1981



Titill: Matematik **Útgefandi:** Danmarks Matematiklærerforening **Keypt frá** 1974

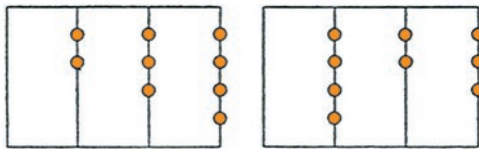
Hvað er *núll*?

SÖGUHORNID

KRISTÍN BJARNADÓTTIR, DÓSENT Á
MENNTAVÍSINDASVIÐI HÍ,
SEGIR FRÁ SÖGU NÚLLSINS.

Núll hefur á ýmsan hátt sérstöðu ekki síst þar sem aðeins er stutt á mælikvarða sögunnar síðan það var talið til talna. Þeir sem þekkja til rómverskra talna minnst þess eflaust að þar er ekkert tákni fyrir núll. Þess gerist einfaldlega ekki þörf.

Rómverjar skráðu tölur með bókstöfum eins og kunnugt er en reiknuðu á talnagrindum. Auðveldlega mátti tákna tölur eins og CCXXXIV (234) eða CDXXIII (423) á talnagrind eins og sjá má á *Mynd 1*:



Mynd 1

Raunar var einnig einfalt að tákna á talnagrind tölur sem nú væru ritaðar með núlli:



Mynd 2

Á *Mynd 2* má líta töluna 2340 skráða á talnagrind, ásamt 2034 og 2304. Orðið „núll“ (nulla), sem merkir „ekkert“, er komið úr máli Rómverja, þ.e. latínu, þótt Rómverjar hafi ekki þurft á tölutákni fyrir núllið að halda. Væri enginn afgangur í deilingu kölluðu Rómverjar það „nihil“ sem einnig þýðir „ekkert“.

Sætistalnaritháttur, ritháttur talna þar sem tölustafirnir taka gildi eftir sæti sínu, er að mörgu leyti hliðstæður við skráningu talna á talnagrindur. Ýmsar þjóðir, s.s. Mayar í Ameríku, Babýloníumenn og Kínverjar, notuðu sætistalnarithátt með mismunandi grunntölum. Þá þurfti að tákna „ekkert“ og einhvern tímann snemma eftir Krists burð tóku Indverjar að nota tákni, eins konar punkt til að tákna auðan pinna á talnagrind, og nefndu það *sunya*, „ekkert“. Auð sæti voru í fyrstu táknuð með punkti sem síðar varð að lokuðum ferli, 0, núllinu. Elsti textinn með sætistalnarithætti í tugakerfi og núlli er texti frá Indlandi, *Lokavibhāga*, frá árinu 458 e.Kr. (Wikipedia).

Sætistalnaritun í tugakerfi barst síðan til múslíma í Mið-austurlöndum þar sem menning blómgaðist á tímabilinu 800 - 1500. Ríki þeirra náði til Norður-Afríku og þaðan til Spánar þangað sem talið var að talnaritunin hafi borist á níundu öld. Á elleftu og tólfðu öld tók að losna um yfirráð múslíma á Spáni og Evrópubúar fóru að kynnst ritum þeirra og talnaritun. Þar sem hinn indverski ritháttur barst til Evrópu með múslímum eða Aröbum er hann oft sagður indó-arabískur.

Bók persneska höfundarins Muhamed ibn-Musa al-Kwarizmi (um 780 - 850), *Kitab al-jam'val tafriq bi hisab al-Hind* – *Bók um samlagningu og frádrátt með aðferð Indverjanna* – fjallaði um indó-arabískan talnarithátt og reikniaðferðir sem við hann áttu. Bók al-Kwarizmis var þýdd á latínu í ýmsum útgáfum á tólfðu öld og varð þar með aðgengileg Evrópubúum. Í henni er lýst reikniaðferðum sem tíðkast enn í dag. Lýsingar á reikniaðferðunum voru nefndar „algóritmar“, afbakað nafn höfundarins. Orðið algóritmi hefur verið þýtt á íslensku með orðinu **reiknirit**.



Núllið var samt ekki talið til tölustafa í fyrstu, hvað þá til talna. Talið er að skólaþúlan *Carmen de Algorismo* frá því um 1200 eftir franska kanúkan Alexander de Villa Dei sé fyrsta verkið þar sem núll er talið til tölustafa. *Carmen* er einmitt samin upp úr riti Al-Kwarizmis. *Carmen de Algorismo* var þýdd á íslensku strax á 13. öld. Ritgerðin nefnist *Algorismus* og er m.a. varðveitt í handriti *Hauksbókar* (Finnur Jónsson, 1892–1896). Þar er núllið nefnt „sifra“ eins og segir:

List þessi heitir algorismus. Hana fundu fyrst indverskir menn og skipuðu með X stöfum þeim er svo eru ritaðir 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Hinn fyrsti stafur merkir einn í fyrsta stað en annar tvo, hinn þriðji þrjá og hver eftir því sem skipaður er allt til hins síðasta er sifra heitir og skal þessa stafi frá hægri hendi upp hefja og rita til vinstri handar sem hebresku. ... Sifra merkir ekkert [útaf] fyrir sig en hún gerir stað og gefur öðrum figúrum merking. (Finnur Jónsson, 1892–1896, bls. 417).

Þótt núllið væri komið í tölu tölustafa voru settir ýmsir fyrirvarar fyrir tilveru þess langt fram eftir níttjándu öld. Björn Gunnlaugsson var fyrsti menntaði stærðfræðingurinn sem starfaði á Íslandi. Áhugavert gæti verið fyrir kennara að setja sig inn í hugsun Björns um núllið. Börn velta ýmsu fyrir sér

Þegar þau eru að kynna tölum enda eru mörg börn merki-
legir heimspekingar. Ýmis álitamál koma upp þegar núllið er
annars vegar og ekki ólíklegt að börnum detti einhver þeirra
í hug.

Björn skilgreindi **stærðir** tvennslags, samfelldar eða sundur-
lausar, og **tölu** sem samanburð sundurlausrar stærðar við ein-
inguna eða einn. En **núllið** þýðir að þar sé engin eining heldur
autt rúm eða sæti (Björn Gunnlaugsson, 1865, bls. 1 - 4)

Þegar Björn kynnti neikvæðar tölur í rununni ...-3, -2, -1, 0,
1, 2, 3, ... sagði hann um núllið:

*Milli þessara tveggja óendanlegu raða stendur 0 í
miðju, sem hvorki er játandi né neitandi, og horfir í
hvoruga áttina, ellegar eins vel bæði játandi og neit-
andi og horfandi í báðar. Í þessari útvíkkðu talnaröð
kallast negatífu stærðirnar minni en 0 ... Sömuleiðis er
∞ (óendanlega stór) meira en allar endanlegar játandi
stærðir, 0 minna en allar játandi stærðir, neitandi
stærðirnar minni en 0, og loksins -∞ (negatíf óendan-
lega stór) minna en allar endanlegar neitandi stærðir
(bls. 26).*

Þarna er Björn búinn að koma núllinu fyrir mitt á milli já-
kvæðra og neikvæðra talna en í deilingu kom upp vanda-
málið um að deila með núlli. Þá segir hann að sérhver
endanleg stærð, a, deild með 0 sé ∞, eða

$$\frac{a}{0} = \infty$$

Björn tók síðan að ræða tengsl núllsins, 0, og óendanlegs, ∞:

*Kvótinn ∞ getur ekki stærri orðið, vegna þess að
deilirinn 0 getur ekki minni orðið.
Bæði 0 og ∞ eru þess vegna stærðarinnar takmörk.
Núll er raunar engin stærð heldur er það minna en
allar stærðir; eins er ∞ engin stærð heldur stærra en
allar stærðir.
Að 0 sé minna en nokkur stærð, á hér að takast í
annarri merkingu heldur en seinast ... þar sem neit-
andi stærðirnar eru kallaðar minni en 0.
... það er ... auðséð að 0 verður að vera minna en
neitandi stærðirnar í deilingarskoðun, þó það sé það
ekki í frádráttarskoðun, þar það stendur í
miðju milli tveggja óendan-
legra raða ...
þar*

*af sést að 0 eða miðjan sjálf er engin stærð, heldur
útgangsdépill stærðarinnar, hafandi sjálfur enga stærð
og ekkert merki, + eða - (bls. 97).*

Björn hélt áfram að velta fyrir sér eiginleikum núllsins og
„hins óendanlega“ sem hann nefndi raunar annars staðar
„hið eilífa“:

*... 0 eða ∞, [eru] ekki stærðir heldur stærðarinnar tak-
mörk, og kemst hún ekki inn í þau og heldur ekki út í
þau því 0 liggur fyrir innan alla stærð, en ∞ fyrir utan
hana.
Það er líka áhorfsmál að kalla 0 (ekkert) óendanlega
lítið og ∞ óendanlega stórt því lítið og stórt tilheyrir
stærðunum en ekki því sem ekki eru stærðir. Betra
væri að kalla það óendanlegt innra og óendanlegt ytra
eða stærðarinnar innra og ytra takmark.
Núll mætti og kallast stærðarinnar frástefnumark ... og
∞ hennar aðstefnumark (bls. 99).*

Ottó J. Björnsson (1997) segir frá því að Björn hafi líklega
lesið kennslubækur eftir þýskan prófessor, Kästner (1758,
1792) sem segir:

*Þetta orðasamband „minna en ekkert“ gerir ráð fyrir
merkingu orðsins „ekkert“ sem á vissan hátt skal líta á
sem **eithvað** (nihilum relativum) og sem greinir það
frá því „engu“ sem lítið er á án tengsla við annað
(nihilum absolutum).*

Þessi tilvitnun er um mismun milli hins heimspekilega
„einskis“ og hins stærðfræðilega afstæða núlls sem Þjóð-
verjar héldu fram. Birni var hugleikin þessi umræða átjándu
aldar um núllið en líklega ókunnugt um hugmyndir sem
þróuðust á níttjándu öld um grundvöll talmareiknings
enda komu þær vart fyrir almenningssjónir fyrr
en að Birni látnum, s.s. verk Freges, Peanos
og Dedekinds.

4

3

2

1

0

Gottlob Frege skrifaði í bók sinni, *Undirstöður reikningslistarinnar*, sem var fyrst gefin út árið 1884, að sumir höfundar skilgreindu fjölda sem mengi, safn eða mergð en sá böggull fylgdi skammrifi að tölurnar 0 og 1 féllu þá ekki lengur undir hugtakið (Frege, 1989, §28).

Markmið Ítalans Giuseppe Peanos var svipað markmiði Freges, að leggja traustan grundvöll að talnahugtakinu, en verk hans var jarðbundnara en verk Freges. Peano setti fram þrjú óskilgreind frumhugtök, **núll**, **tala** (þ.e.a.s. heil tala, ekki neikvæð) og venslin „**er næst á eftir**“ sem fullnægja fimm frumsendum:

1. *Núll er tala.*
2. *Ef a er tala, þá er tala næst á eftir a.*
3. *Núll er ekki næst á eftir neinni tölu.*
4. *Tvær tölur, þar sem næstu tölur á eftir þeim eru jafnar, eru einnig jafnar.*
5. *Ef mengi talna, S, inniheldur núll og einnig næstu tölur á eftir öllum tölum í S þá eru allar tölur í S.*

Frumsendur Peanos voru fyrst settar fram árið 1889 í bókinni *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Boyer og Merzbach, 1991, bls. 597–598).

Eftir að rit Frege og Peanos og raunar fleiri stærðfræðinga höfðu markað núllinu stöðu lögdust umræður og vandræði með núllið niður. En börn sem eru að uppgötva heiminn geta auðveldlega leiðst inn í ihugun um núllið sem „ekkert“ og hvernig eitthvað geti verið „minna en ekki neitt“. Og hvernig er þá hægt að margfalda með „engu“ og einhverju sem er „minna en ekkert“?

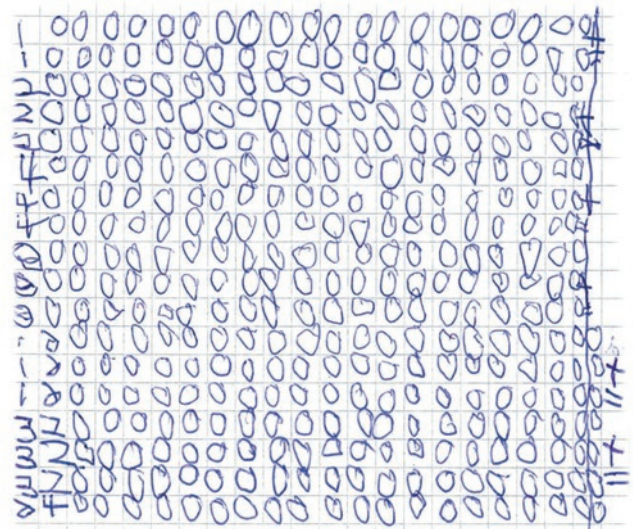
Sjö ára drengur spurði nýlega: „Hvar enda tölurnar?“ Þegar hann fékk staðfestan grun sinn um að þær ættu sér engan endi tók hann að skrifa talna-romsurnar sem sjá má á *Mynd 3*.

Drengurinn lýsti tölum sínum á þá leið að í efstu línu væri óendanlega stór tala. Síðan lagði hann töluna

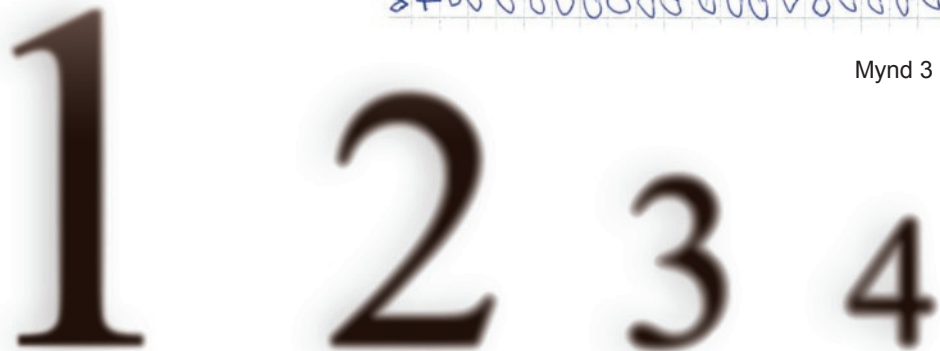
við sjálfa sig og þá var komin tvöföld óendanleg tala. Þannig hélt hann áfram upp í 64-falda óendanlega tölu! – Hugmyndir af þessu tagi eru dýrmætar. Hlutverk kennarans er að hlusta og skapa skilyrði til sjálfstæðrar hugsunar. Vonandi eiga kennarar og nemendur eftir að eiga frjóar umræður um stærðfræðileg efni!

Heimildir

- Björn Gunnlaugsson. (1865). *Tölvísi*. Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag.
- Boyer, C. og U. Merzbach (1991). *A history of mathematics*. New York: John Wiley and Sons.
- Finnur Jónsson (ritstj.) (1892–1896). *Hauksbók*. Kaupmannahöfn: Det Kongelige Nordiske Oldskrift-Selskab.
- Frege, G. (1989). *Undirstöður reikningslistarinnar*. Reykjavík: Hið íslenska bókmenntafélag.
- Ibn Musa Al-Khwarizmi, M. (1992). *Le calcul Indien*. Paris: Societé des Études Classiques. Librairie scientifique et technique.
- Katz, V. (1993). *A history of mathematics. An introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.
- Kästner, A. G. (1758, 1792). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. Göttingen: Vandenhof und Ruprecht.
- Ottó J. Björnsson. (1997). *Varð Gauss á vegi Björns Gunnlaugssonar?* Reykjavík: Ráunvísindastofnun Háskólans.
- Reid, C. (1992). *From zero to infinity*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
- Wikipedia, frjálsa alfræðiorðabókin. 0 (number). [https://secure.wikimedia.org/wikipedia/en/wiki/0_\(number\)](https://secure.wikimedia.org/wikipedia/en/wiki/0_(number))



Mynd 3





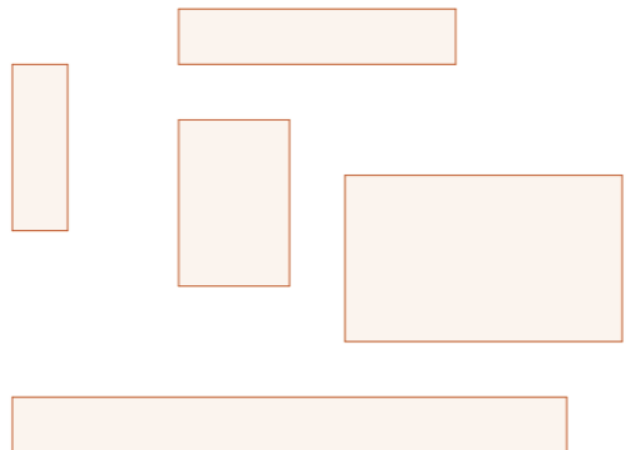
INGÓLFUR GÍSLASON RÆÐIR SAMBAND STÆRÐFRÆÐI OG SKÖPUNAR.

Stærðfræði er alls staðar að verki í veruleika okkar. Hún er bæði notuð til að lýsa honum en ekki síður til þess að búa hann til. Þeir sem hafa stærðfræði á sínu valdi, hljóta af henni vald. Þeir geta notað hana til athafna og þær athafnir geta snert allt samfélagið.

Sumir eiga erfitt með að ímynda sér að stærðfræði geti verið skapandi grein. Hér eru tvö verkefni sem eiga að sýna eina birtingarmynd sköpunar í stærðfræði sem er á færi flestra þó að hugmyndir fólks geti vissulega verið misjafnlega fagaðar.

Verkefni 1

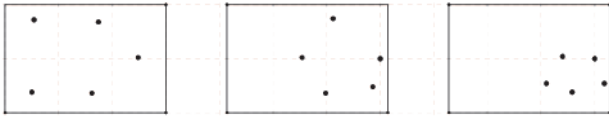
Raðaðu þessum réttthyrningum í röð eftir því *hve nálaggt* þeir eru því að vera ferningar. Svo áttu að finna upp mælistærð sem mælir „ferningsleika“ gefins réttthyrnings. Þú átt að geta borið saman hvaða tvo réttthyrninga sem er og sagt hvor þeirra er nær því að vera ferningur beint út frá mælistærðinni.



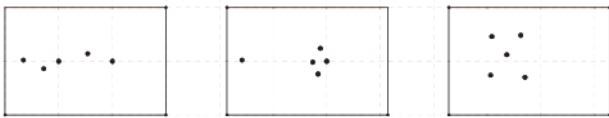
Ef þú finnur eina aðferð skaltu finna upp aðra í viðbót og bera þær saman, segja á þeim kost og löst.

Verkefni 2

Keppendur kasta kúlum og þær lenda eins og sýnt er á myndunum. Sá vinnur sem kastar þannig að kúlurnar falli sem næst hver annarri – þær dreifist sem minnst. Hvernig væri hægt að meta þetta? Hér er verkefnið líka að búa til mælistærð sem raðar fyrir okkur.



Ef þú finnur eina aðferð skaltu finna upp að minnsta kosti tvær aðrar og svo skaltu beita þeim á kúlndreifingarnar þrjár og líka þessar þrjár sem fylgja á eftir:



Í lok greinarinnar verða gefin nokkur dæmi um mögulegar lausnir en markmið þessarar greinar er að fá lesanda til að reyna við dæmin og ímynda sér að hann útfæri og vinni þessi verkefni með sínum nemendum. Gefi svo sinni eigin sköpun lausan tauminn – hvaða aðra eiginleika er hægt að búa til mælitölur fyrir?



Verkefni tvö hér að ofan eru tiltölulega saklaus en við erum á hverjum degi undir áhrifum stærðfræðilegra skilgreininga. Það er ekki einfalt mál að skilgreina hluti eins og fátæktarmörk, mælikvarða á ójöfnuð í skiptingu tekna, vísitölu neysluverðs, ávöxtunarkröfur, tryggingariðgjöld, haglíkön, stofnstærðarmat fiskistofna, veiðireglur, kosningareglur og margt margt fleira. Þessar skilgreiningar hafa yfirbragð hlutlægni og þær vinna í sjálfu sér á hlutlægan hátt en það hvernig þær eru búnar til er ekki hlutlægt heldur ræðst það af gildum.

Á valdi stærðfræðinnar eða ...

Stærðfræði er notuð til að skilja virkni hjartans og ensíma, finna bestu lögum flugvélavængja og skipsskrokka, sterkustu lögun burðarsúlna, skilvirkustu skipulög dreifneta og úthlutana tíðnisviða fyrir fjarskiptatæki, til að búa til skynjara fyrir augu, fingraför, raddir, til að dulkóða upplýsingar eins og kreditkortanúmer og bankaupplýsingar á netinu, til að búa til staðsetningartækni eins og GPS, samþjöppunaraðferðir fyrir myndir, gervilími, bókunartækni, lyfjaprófanir og svo fram-

vegis og svo framvegis. Hún er ekki eingöngu notuð til þess lýsa heldur ekki síður til að hanna, búa til og stýra. Þeir sem nota stærðfræði hafa af henni vald. Þeir sem ekki hafa vald á stærðfræði eru á valdi hennar og þeirra sem hafa af henni vald.

Nemendur ættu að kynnast því að búa sjálfir til stærðfræðihugtök. Verkefnið hér má nota til þess. Þeir fá líklega meira út úr þeim ef þeir fá að tala og vinna saman að þeim. Markmiðið er ekki að kenna þeim neina sérstaka stærðfræðiaðferð heldur að kenna þeim að búa til stærðfræðiaðferðir sjálfir. Það geta þeir gert á hvaða stigi sem þeir eru. Fyrir yngri nemendur er óþarfi að þeir geti sett svörin fram á nákvæmu táknmáli en fyrir hina eldri getur verið mjög gott að kynnast því sjálfur hvernig bókstafir nýtast til að tjá reikniaðferðir.

Möguleg svör

Möguleg svör við fyrsta verkefni eru til dæmis að reikna út mismun hliðarlengda, eða hlutfall milli þeirra, eða mismun eða hlutfall milli hornanna sem hornalína myndar við hliðar. Allar þessar aðferðir hafa ókosti þó þeir séu vissulega mis alvarlegir. Ein „fáguð“ lausn er að reikna meðaltal hlutfalla hliðarlengdanna a og b , það er $(a/b + b/a) / 2$. Það er fyrir öllu í verkefnum sem þessum að nemendur fái sjálfir tækifæri til þess að segja frá og leggja mat á aðferðir. En kennarinn verður mögulega að leika „andstæðing“ til að dýpka umræðuna. Hvaða galli er til dæmis við þá aðferð að reikna mismun hliðarlengda? (Hvort er nær því að vera ferningur: 100×99 réttthyrningur, eða 2×1 réttthyrningur?) Eldri nemendur ætti að hvetja til að setja svörin fram sem stæður eins og $a - b$ eða a/b (eða aðrar!).

Seinna verkefnið er enn opnara. Til dæmis væri hægt að reikna flatarmál marghyrninga með kúlurnar sem hornpunkta, leggja saman lengdir allra línustrika sem tengja tvær kúlur eða geisla minnsta hrings sem inniheldur allar kúlurnar. Einnig má reikna „meðal-punkt“ (búinn til úr meðaltali hnita punktanna) og reikna meðalfjarlægð allra kúlna frá honum. Það getur verið áhugavert að sjá að mismunandi aðferðir gefa mismunandi sigurvegara.

Verkefni 1 sem hér var kynnt er að finna annars vegar á vefsíðunni balancedassessment.concord.org/hl002.html, en hins vegar á vefsíðunni flaguide.org/tools/math/measures/squareness.php.

Verkefni 2 er að finna í bókinni *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics* eftir J. P. Becker og S. Shimada, gefin út 1997 af National Council of Teachers of Mathematics.

Ingólfur Gíslason er doktorsnemi við Háskóla Íslands í stærðfræðimenntun. Hann er með B.S. og M.Paed próf í stærðfræði og hefur kennt greinina síðan 1999 í framhaldsskólum, háskólum og fullorðinsfræðslu.

Tengjum saman fortíð og framtíð

- segir **Anna Kristjánsdóttir** prófessor, sem telur óþarfa að vera sífellt að finna upp hjólið



Anna ásamt Arnlaugi í Kaldalóni.

VIÐTAL

HÚN ER ljós yfirlitum, brosmild, létt í spori og allt að því stelpuleg, önnum kafin við ýmis verkefni og ótrúlegt en satt; þann 14. október síðast liðinn varð hún 70 ára. Viðmælandi minn Anna Kristjánsdóttir prófessor í stærðfræði stendur á tímamótum. Hún hefur lokið farsælu kennslustarfi og er komin heim eftir áralanga dvöl í Noregi. Þó er nokkuð ljóst að Anna mun ekki sitja auðum höndum. Nú er tími til að vinna úr öllum þeim gögnum og reynslu sem hún hefur aflað sér því starfsævi fræðimanns lýkur aldrei. Ég tók Önnu tali og forvitnaðist um hana, hver er hún, hvaðan kemur hún og hvert er hún að fara?

Þóra Þórðardóttir ræðir við **Önnu Kristjánsdóttur**,
prófessor í stærðfræði

Anna er einstök kona, henni má lýsa með ýmsum orðum. Hún er afar þenkjandi, framsýn og með gagnrýna hugsun, fljót að hugsa og sjá aðalatriðin. Síðast en ekki síst er hún óhrædd við að koma fram með nýjar hugmyndir. Sem dæmi um framsýni Önnu má geta þess að árið 1972 skrifaði hún kandidateitgerð um möguleika tölvunotkunar í stærðfræðikennslu 13-18 ára unglunga. Við skulum ekki gera ráð fyrir að Anna hafi sprottið fram fullsköpuð og byrjum því á að forvitnast um uppruna og umhverfi hennar. Hvað mótaði hana?

„Ég var löngu orðin til fyrir skólagöngu“

Anna segir það hafa einkennt æsku sína að hún ólst upp með fólki sem talaði ekki við hana eins og barn. Faðir hennar var skipstjóri og sigldi á Bretland alla tíð og var því mikið í burtu frá heimilinu. Móðir hennar tók henni eins og hún var og Anna talar hlýlega um mág föður síns sem hún segir hafa verið einstakan mann sem hafði mikil áhrif á hana. Hún lýsir honum svo: „Ég man að hann talaði aldrei nokkurn tíma við mig eins og ég væri barn. Hann talaði alltaf við mig eins og ég væri persóna. Hann virti það að ég var barn en sagði aldrei neitt fyrirskipandi eins og oft er gert við börn.“ Anna var þar af leiðandi mjög hugsandi barn og hún segir: „Ég var löngu orðin til fyrir skólagöngu.“

Skólagönguna hóf hún í Melaskóla og þar liðu barnaskóla-árin átakalaust og Anna átti mjög auðvelt með nám. Síðan lá leiðin í Miðbæjarskólann og að loknu landsprófi fór Anna í stærðfræðideild Menntaskólans í Reykjavík. Kennara í stærðfræði, íslensku, sögu, frönsku og dönsku í MR minnst Anna með mikilli gleði. Hún orðar það svo: „Þeir gáfu mér eitthvað alveg sérstakt, dýpkðu skynjun mína og vitund“.

Anna fór að loknu stúdentsprófi í Háskóla Íslands í stærðfræðinámi með sagnfræði sem aukagrein. Samhliða námi í stærðfræði og sögu tók hún uppeldis- og kennslufræði hjá prófessor Matthíasi Jónassyni sem var mjög góður fræðimaður, að hennar sögn. Áður hafði Anna kynnst Matthíasi því hún tók þátt í greindarrannsókn sem hann gerði á skólabörnum. „Þetta voru með skemmtilegustu stundunum

mínum í Melaskóla, það var að fara upp á loft og leysa þrautir með Matthíasi,“ sagði Anna um fyrstu kynni sín af honum.

Haustið 1969 fór Anna til Danmerkur í nám í stærðfræði og uppeldisgreinum. Í grein sem Anna skrifaði í *Flatarmál* 2006 til minningar um Jónas B. Jónsson fræðslustjóra í Reykjavík má sjá að hann átti þátt í því að hún fór þessa leið. Hún segir Jónas

hafa verið einstakan forystumann sem aldrei glataði manlegu innsæi, vel ígrunduðu áráði, trausti á fólki og skýrri stefnu sem varð bæði nemendum og kennurum til eflingar og ávinnings, eins og hún orðaði það. Aðrir áhrifavaldar í hennar lífi eru fjölmargir kennarar og samstarfsfólk sem hún talar um af virðingu og hlýju.

Kennari alla tíð

Á starfsferli sínum hefur Anna komið víða við en ætíð verið kennari í þeim skilningi að henni hefur fallið vel að vinna með fólki á öllum aldri og eiga við það margs konar samskipti. Hún kenndi í Kennaraskólanum, Hagaskóla, Menntaskólanum í Hamrahlíð, Kennaraháskóla Íslands og Agder Universitet. Auk þess hefur Anna kennt á fjölmörgum endurmenntunarnámskeiðum kennara. Hún var kennsluráðgjafi við Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur 1972-1975 og námstjóri í skólarannsóknadeild menntamálaráðuneytis 1975-1981.



Að titla sig sem fræðimann er fyrirbæri

síðustu 15 ára. Praktíkin var rík og fræðimennskan í því sem þú gerðir frekar en í því sem þú varst.

Störf Önnu hafa ekki síst falist í því að vera stjórnandi. Hún hóf ung störf fyrir skátahreyfinguna sem erindreki og framkvæmdastjóri. Hún segir þá reynslu afar dýrmæta og það hafi komið sér vel, þegar hún hóf störf síðar sem námstjóri, að hafa ferðast um landið sem erindreki fyrir skátahreyfinguna. Landið var henni því ekki framandi. Um störf sín hjá skólarannsóknadeild segir Anna: „Þegar ég var námstjóri var skólarannsóknadeildin mjög valdamikil. Í skólarannsóknadeild var unnið að endurskoðun námsefnis og kennsluhátta og ákveðið hvaða námsefni var gefið út og hvenær eftir því hvaða fjárveitingar fengust. Ákvörðunin var færð til skólarannsóknardeildar frá Ríkisútgáfu námsbóka, sem hafði verið mjög valdamikil stofnun, en framkvæmdin var áfram hjá Ríkisútgáfu námsbóka. Einnig var endumenntun undir stjórn endurmenntunardeildar KHÍ, en námstjórar höfðu mest um það að segja hvaða námskeið var boðið upp á. Upprunalegar

hugmyndir um skólarannsóknadeild voru þær að starf deildarinnar hæfist með rannsóknnum á íslensku skólakerfi, en fljótlegra var hætt við það og náms-efnisgerð varð

meginverkefni deildarinnar. Anna segir að það hafi ekki verið lagt að starfsfólki deildarinnar að stunda rannsóknir, en hún leitaði stöðugt eftir viðbrögðum og hugmyndum kennara með spurningalistum eða opnum spurningum til þess að byggja ákvarðanir á eða sjá hvar kennarar þyrftu meira liðsinni. Í deildinni voru einungis tveir námstjórar sem stjórnðu endurskoðun námsgreina og voru lærðir menntunarfræðingar.

Fyrst og fremst fræðimaður

Anna segist fyrst og fremst hafa verið áhugasamur og forvitinn kennari fram til ársins 1969 en eftir það í vaxandi mæli fræðimaður. Hún segir enn fremur: „Ég held að ég hafi fyrst og fremst upplifað mig sem fræðimann frá því fljótlegra upp úr 1970.“ Hún bætir við að erfitt sé að tjá sig sem fræðimann í umhverfi sem ekki er mótað af fræðimennsku og heldur áfram: „Að titla sig sem fræðimann er fyrirbæri síðustu fimmtán ára. Praktíkin var rík og fræðimennskan kom frekar fram sem grundvöllur ákvarðana og undirstaða stefnumótunar en að reyna að tala fyrir fræðilegri sýn. Það var nær ógerlegt að fá fólk til að lesa fræðilega texta.“ Nánar aðspurð um hvað hún eigi við með þessu segir hún: „Fræðimennskan sem ég tala um er eitthvað sem mótar það hvernig þú hugsar og ákvarðar.“ Anna segir að hjá sér hafi það að vera fræðimaður í eðli sínu birst í þörf fyrir að lesa stöðugt og njóta þess. Það hafi að hluta komið í stað umræðna við aðra fræðimenn en skipti líka máli í víðara samhengi. Í fræðimennsku felst

einnig að taka eftir fleiru en sagt er og ímynda sér hvað gæti verið og hvað þyrfti þá að vera til staðar.

Einnig í því að spyrja opinna spurninga, hlusta vel á fólk og reyna að skilja hvað liggur að baki orðunum og sífelld þörf á að greina aðstæður og skilja samhengi. Auk þess að „fylgjast með á jöðrum,“ kynnast frábrugðnu, endurhugsa og máta. Síðast en ekki síst segir hún fræðimennskuna birtast í hræðsluleysi við að standa með því sem maður segir og gerir.

Skapaði kennurum starfsvettvang

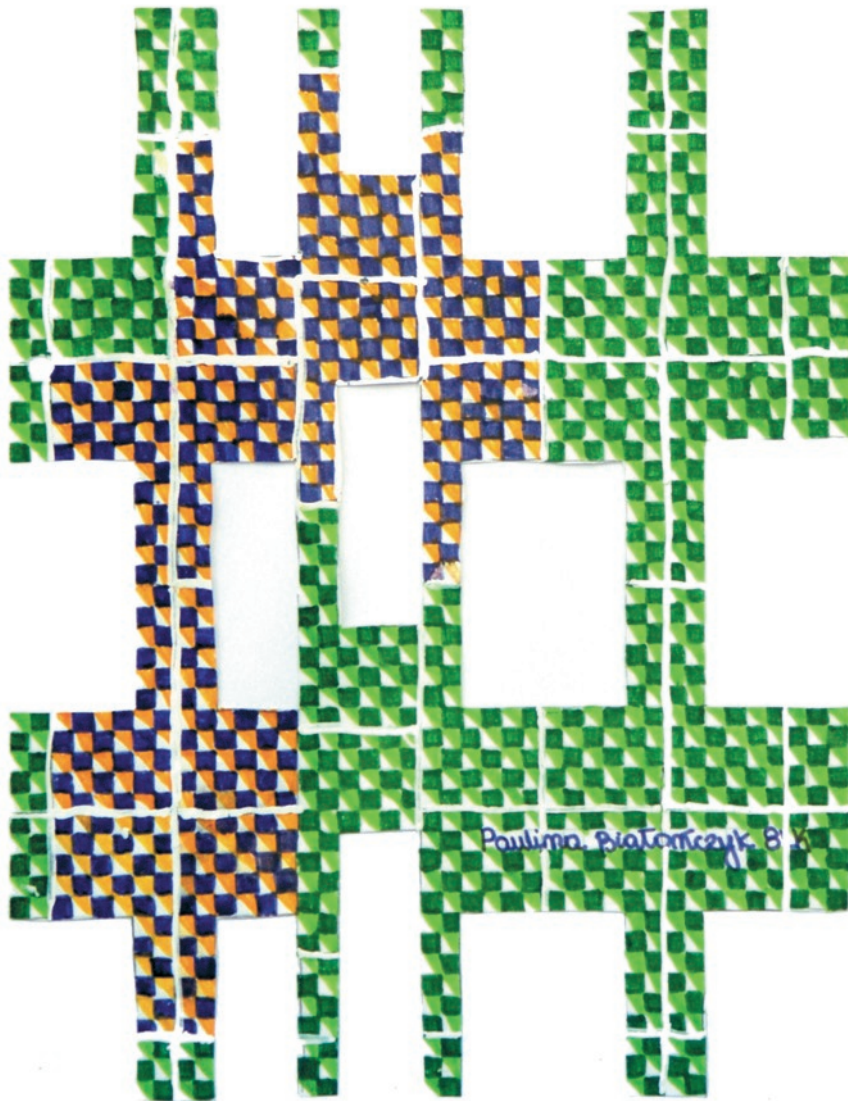
Anna hefur alla tíð verið óþreytandi við að tala um kennslu og kennara og standa með þeim. Hún hefur reynt að koma þeim til að lesa stuttar erlendar fræðigreinar og handbækur. Einnig hefur hún reynt að skapa aðstæður fyrir þá til að reyna í verki það sem þeir hefðu ekki lagt í að gera í eigin kennslu án stuðnings eða án miklu meiri umhugsunar og umræðu. Auk þess hefur hún skapað kennurum vettvang til að tala um reynslu og bera saman hvað þeir hefðu ætlað sér að gera og síðan um það sem gerðist.

Til að skapa starfsvettvang fyrir kennara stóð Anna ásamt öðrum, í mars 1993, fyrir stofnun samtaka stærðfræðikennara sem hlaut nafnið Flötur. Hvort Flötur hefur náð að verða sá vettvangur sem honum var ætlaður í upphafi er spurning. Það er spennandi hlutverk fyrir okkur stærðfræðikennara að fylgja eftir því sem lagt var upp með og efla það. Við eigum þessi samtök og það er í okkar valdi að skapa innan þeirra vettvang sem styður og styrkir okkur í starfi.

Hjá Önnu eru spennandi tímar framundan. Aðspurð segist hún vera að opna vefsvæðið STIRNI (www.stirni.is) fyrir fræðasviðin tvö sem hún hefur unnið mest á. Annað er *Stærðfræðimennt* og hitt *Hlutverk upplýsingatækni í námi*. Bæði leggja þau grundvöll að skólasterfi og reynast vonandi fengur fyrir kennara. Önnu er mikið í mun að tengja saman fortíð og framtíð svo fólk sé ekki alltaf að finna upp hjólið. Þessi orð Önnu geri ég að lokaorðum þessa viðtals og þakka henni fyrir áhugaverðar samræður.



Anna í góðra vina hóp á ICME-10 árið 2004.



Öðruvísi vorþróf

8. bekkur í Grundaskóla vorið 2011

Eins og mörg af þeim verkefnum sem ég vinn með nemendum mínum varð þetta lokaverkefni til næstum óvart. Við Steinunn Guðmundsdóttir samkennari minn höfum rætt það í nokkur ár að það væri gaman að fá nemendur til að mála eitthvað af þeim

munstrum sem þeir teiknuðu hjá mér í stærðfræðinni. Við erum með mikið af góðum teiknurum og listamönnum í þessum árgangi og okkur langaði til að finna verkefni við hæfi fyrir einn af þessum frábæru teiknurum. Þannig rúllaði boltinn af stað.

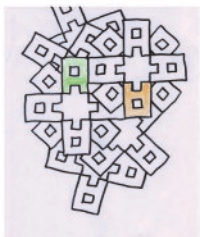
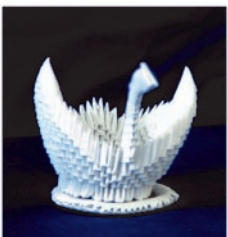
Í stærðfræðinni vorum við að vinna með kaflann Hnitakerfi og flutningar í bókinni *Átta-tíu 2*. Verkefnið sem ég lagði fyrir nemendurna var að teikna upphafsstafinn í nafninu sínu og spegla, snúa eða hliðra í hnitakerfi. Síðan náðum við í glæru og endurtókum munstrið aftur og aftur (sjá myndir) sem síðan var yfirfært á striga og málað. Steinunn er listakona og er því vel að sér í litufræðinni, svo að hún sá um að leiðbeina með málunina og litasamsetningar. Við enduðum með 22 málverk, öll mjög flott.

Lokaverkefnin voru þó fleiri, sumir saumuðu krosssaum eftir eigin munstri og notuðu sömu aðferð og áður. Hér á myndunum til hliðar getið þið séð tvö pör af myndum, annars vegar L og hins vegar K þar sem þessir stafir eru bæði saumaðir og málaðir.

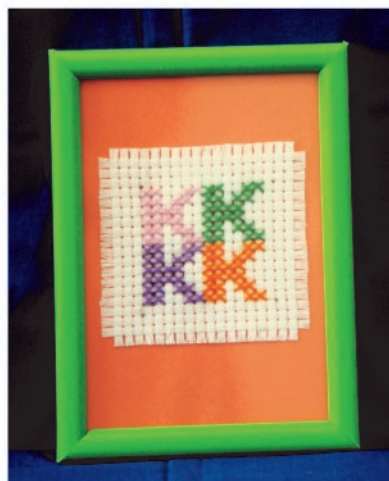
Í hópnum eru líka miklir Origami aðdáendur sem létu sig ekki muna um að búa til litla svani úr 430 litlum bitum. Þeir létu ekki þar við sitja heldur bjuggu líka til stóran svan úr A4 blöðum. Nokkrir nemendur bjuggu til kassa með loki sem myndskreytt var með eigin munstri úr upphafsstöfum.

Þetta var lokaverkefnið, engin hefðbundin próf og engar einkunnir. Við eigum reyndar eftir að halda formlega sýningu þar sem nemendur munu bjóða fjölskyldum sínum að koma og skoða. Það verður námsmatíð og þá sjá allir að námsmat er skemmtilegt þegar að það elur af sér samræður og þælingar.

Nú mun einhver spyrja sig hvort að þetta sé mikil stærðfræði. Ég er ekki í vafa, enda er mjög mikilvægt að gefa nemendum svigrúm til að rækta sköpunargáfuna, læra ný vinnubrögð og finna lausnir. Við Steinunn teljum að þetta hafi tekist frábærlega hjá krökkunum og við bíðum öll spennu eftir umsögn sýningargestanna.



**BORGHILDUR
JÓSUADÓTTIR,**
STÆRFRÆÐI-
KENNARI Í GRUNDA-
SKÓLA, SEGIR FRÁ ÞVÍ
HVERNIG STÆRÐ-
FRÆÐIVERKEFNI
VERÐA AÐ LISTA-
VERKUM.



BÓKARKYNNING

ÁSTA ÓLAFSDÓTTIR, kennari og fagstjóri í stærðfræði við Réttarholtsskóla rýnir í bókina

Collaborative learning in mathematics
a CHALLENGE TO OUR BELIEFS AND PRACTICES
eftir Malcolm Swan
Útgefendur: NRDC og NIACE, 2006

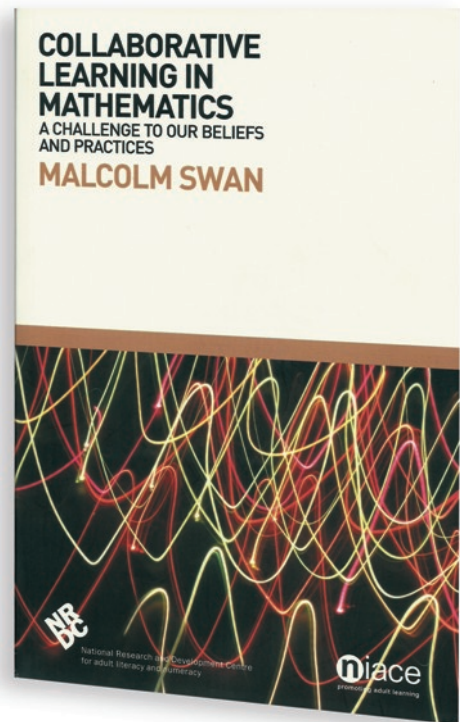
Stærðfræði er það fag sem virðist vera hægt að eyða mörgum árum í að æfa færni og skráningar útreikninga án grundvallar-skilnings á undirliggjandi meginhugmyndum. Þó sýna niðurstöður rannsókna á stærðfræðinámi sl. 25 ár að til að byggja upp hæfni og góðan árangur í stærðfræði eru þeir kennsluhættir ákjósanlegir sem efla með nemendum skilning á stærðfræðilegum hugmyndum og aðstæður sem efla þá í gagnrýnni hugsun og röksemdafærslu. Aðstæður og verkefni sem hvetja til umræðna og ágreinings í samvinnu milli nemenda. Bók þessi tekur á því hvernig þróa megi slíka kennsluhætti.

Höfundurinn, Malcolm Swan, er lektor í stærðfræðimenntun við háskólann í Nottingham. Hann hefur í mörg ár stundað rannsóknir og unnið að þróun í verkefnagerð fyrir stærðfræðikennslu. Hann er einnig hluti af Shell Centre/MARS hópnunum sem er teymi stærðfræðimenntunarfræðinga starfandi í Bandaríkjunum og á Bretlandi.

Rannsóknir Malcolm Swan hafa m.a. snúist um að greina villur í úrlausnum verkefna og misskilning nemenda sem fram kemur vegna erfiðleika þeirra við að mynda tengsl milli stærðfræðihugmynda. Til að greina þessar villur og þennan misskilning hefur hann unnið að gerð samvinnuverkefna þar sem nemendur fá tækifæri til að ræða, útskýra og færa rök fyrir stærðfræðilegum hugmyndum sínum á fjölbreyttan hátt. Við hönnun verkefnanna er miðað við að glíman við þau styðji nemendur í að mynda tengsl á milli efnispáttanna innan stærðfræðinnar. Nálgunin felur í sér áherslu á eðli stærðfræðinnar og áherslu á að nemendur geti skipt um sjónahorn og framsetningarmáta á stærðfræðilegum hugmyndum.

Í bókinni beinir Malcolm Swan sjónum að breytingum sem eiga sér stað þegar kennarar og nemendur þeirra taka þátt í rannsókn á hönnunartengdum nálgunum og verkefnum í stærðfræðikennslu. Rannsókn hans er aðallega framkvæmd meðal getulitilla 16 - 19 ára nemenda sem eru í eins konar 0 áfanga í framhaldsskóla. Kennurum þeirra finnst erfitt að finna leiðir en upplifa um leið sterkar kröfur um að árangur náist. Bókin sýnir hvernig þróa má stærðfræðikennslu á grundvelli rannsókna á hönnun verkefna og notkun þeirra í kennslu (design-based research). Í bókinni er annars vegar sagt frá erfiðleikum sem kennarar upplifa í kennslu og hins vegar upplifun nemenda við að tileinka sér nýja kennsluhætti og námsferli sem byggt er á sameiginlegum umræðum og ígrundun. Nálgunin sem kynnt er í bókinni hefur einnig verið notuð á grunnskólanemendum á aldrinum 11 - 16 ára í tengslum við algebrunám og í fullorðinsfræðslu.

Bókin er skipt í tvo hluta. Fyrri hlutinn fjallar um hvernig vinna má að hönnun verkefna þannig að þau verði í samræmi við námskrár, kenningar um nám og niðurstöður smærri vettvangsrannsókna. Malcolm Swan tekst þarna að draga fram aðalatriði



hvers efnispáttar og setja mjög skýrt fram yfirlit um inntak sem við flest þekkjum. Í seinni hlutanum er sýnt hvernig beita megi þessum grundvallar hönnunarmarkmiðum í ákveðnum aðstæðum. Þarna er ógrynni af áhugaverðu efni sem kennarar geta notað til að greina eigin kennslu, kennsluhætti sína og viðhorf. Einnig er heilmikið af efni sem getur hjálpað kennurum við skoðun á viðhorfi og námsárangri nemenda.

Bókin er skrifuð fyrir kennara, menntunarfræðinga, rannsakendur, þá sem vinna við námskrárgerð og stefnumótandi aðila í stærðfræði. Alla þá sem hafa áhuga á að gera stærðfræðinámsmerkingarbærara og ánægjulegra fyrir nemendur.

Með bókinni fylgir cd-diskur. Hann er skipulega uppsettur og aðgengilegur. Á honum eru annars vegar gögn sem notuð voru sem efni fyrir kennarana er tóku þátt í rannsókninni. Þar má finna verkefni og leiðbeiningar til útprentunar. Einnig er þar safn myndskaiða frá námi og kennslu, þ.á.m. viðtöl við kennara og nemendur, ásamt myndskaiðum sem sýna vinnuferli nemenda. Hins vegar eru fylgiskjöl rannsóknarinnar. Þar er að finna kannanir sem lagðar voru bæði fyrir nemendur og kennara, svo og niðurstöður úr algebruprófi þar sem hver spurning er tekin sérstaklega, en nemendur tóku bæði forpróf og lokapróf.

Bókin er afar áhugaverð, bæði til aflestrar og sem uppflettirit. Hún er skipulega upp sett, hnitmiðuð og hafsþjór af upplýsingum. Í henni eru ógrynni af töflum s.s. til samanburðar á mismunandi kennsluháttum, hvort sem það lýtur að hefðbundinni yfirfærslu, rannsakandi námi eða tengslaformi. Einnig er að finna töflur til greiningar og flokkunar, s.s hvort kennsluhættir eru nemenda- eða kennaramiðaðir. Í bókinni eru einnig myndir sem ýmist eru myndrit, verkefni eða verkefnalausnir. Þá eru einnig stuttir samtalskaflar sem góðir eru til ígrundunar. Bókin gefur góðan grunn fyrir þá sem vilja finna leiðir til að styðja nemendur í að auka stærðfræðihæfni sína.

Vefsíður

fyrir góða stærðfræðikennara

Á netinu eru ótal vefsíður um stærðfræði og stærðfræðikennslu. Þær eru auðvitað misgóðar. Ég ætla að nefna nokkrar síður sem góðir stærðfræðikennarar geta nýtt sér til að fá hugmyndir og innblástur.

nrich.maths.org

Fyrst er að nefna vefinn *Nrich* (Enriching Mathematics). Þar er gríðarlega mikið og gott efni. Ég mæli sérstaklega með efninu „Integrating Rich Tasks“, en bein slóð á fyrstu síðuna um þetta er <http://nrich.maths.org/6089>. Efninu er ætlað að styðja kennara við að nota frjókverfni (e. rich tasks) sem hvetja nemendur til dýpri hugsunar (e. higher order thinking). Ég hef stundum notað verkefni úr þessum sjóð, þar sem meðal annars er stungið upp á því að breyta spurningum eins og „Hvert er flatarmál rétthyrnings með hliðarlengdir 4 sm og 6 sm?“ yfir í „Ef rétthyrningur hefur flatarmálið 24 sm², hverjar gætu hliðarlengdirnar verið?“

[flaguide.org](http://www.flaguide.org)

Næst bendi ég á vefinn *The Flag* (Field-tested Learning Assessment Guide) sem ég vitna einnig til í annarri grein í þessu blaði. Þar má finna upplýsingar og hugmyndir að góðum námsmatsverkefnum í stærðfræði og raungreinum. Stærðfræðiverkefni má finna beint á <http://www.flaguide.org/cat/math/math/math1.php>, en áherslan er á stærðfræðilega hugsun (ekki reiknitækni eða minnisatriði).



balancedassessment.concord.org

Annar vefur um námsmat er *Balanced Assessment in Mathematics*. Þar eru mörg góð verkefni fyrir nemendur á ýmsum stigum og líka skýrir textar fyrir kennara þar sem þeir eru hvattir til að reyna að bæta námsmat í stærðfræði svo það (meðal annars) verði gagnlegra, sveigjanlegra og gefi nemendum virka hlutdeild í námsmatsferlinu.

plus.maths.org

Að lokum langar mig að benda á vefritið *Plus Magazine* sem inniheldur greinar um stærðfræði og hlutverk stærðfræði í samfélaginu, oft í tengslum við fréttir sem eru ofarlega á baugi í heiminum. Til dæmis eru þar nú greinar um stærðfræði tengda efnahagsástandi heimsins, íþróttum, listum og læknisfræði.

- Ingólfur Gíslason tók saman

NOR MA 2011

Norræn ráðstefna um stærðfræðimenntun var haldin í HÍ við Stakkahlíð dagana 11. - 14. maí 2011. NORMA 11 var sjötta norræna ráðstefnan um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar. Fyrsta Norma ráðstefnan var haldin í Finnlandi 1994 og hafa Norma ráðstefnur verið haldnar á þriggja til fjögurra ára fresti síðan þá. Þær hafa nú verið haldnar á öllum Norðurlöndunum og er því röðin komin aftur að Finnum en þeir munu halda næstu Norma ráðstefnu árið 2014. Norma ráðstefnur eru nú haldnar í samstarfi við *NORME* norræn samtök félaga um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar en þau samtök voru stofnuð á Norma ráðstefnunni í Kaupmannahöfn sumarið 2008. Nýstofnuð samtök um rannsóknir á stærðfræðimenntun á Íslandi urðu fullgildir aðili að Norme á aðalfundi samtakanna sem haldinn var í Reykjavík í tengslum við Norma 11.

Norma 11 var langfjölmennasta Norma ráðstefnan fram til þessa. Hana sóttu

GUÐBJÖRG PÁLSDÓTTIR OG GUÐNÝ HELGA GUNNARSDÓTTIR, LEKTORAR Í STÆRÐ- FRÆÐIMENNTUN VIÐ MENNTAVÍSINDASVIÐ HÍ, SEGJA FRÁ NORRÆNU RÁÐSTEFNUNNI UM STÆRÐFRÆÐIMENNTUN SEM HALDIN VAR Á ÍSLANDI Í MAÍ SÍÐASTLIÐNUM.

um 150 þátttakendur frá 12 löndum. Þátttakendur frá Íslandi voru 23.

Á Norma gefst rannsakendum á sviði stærðfræðimenntunar tækifæri til að kynna rannsóknir sínar. Meginmarkmiðið er að kynna það sem rannsakendur á Norðurlöndum og Eystrasallöndum eru að fást við um þessar mundir en ráðstefnan er öllum opin. Að þessu sinni komu nokkrir þátttakendur frá Spáni, Portúgal, Þýskalandi og Bretlandi.

Aðalfyrirlesarar á Norma 11 voru þau Marit Johnsen-Høines frá Háskólanum í Bergen, Núría Planas frá

Universitat Autònoma de Barcelona, Bharath Sriraman frá Háskólanum í Montana og Roger Säljö frá Háskólanum í Gautaborg. Fjöldi erinda var fluttur um hin ýmsu svið stærðfræðimenntunar og miklar umræður sköpuðust um mikilvæga þætti. Ánægjulegt var að upplifa áhuga og kraft þátttakenda. Í lok ráðstefnunnar stóðu ungir rannsakendur fyrir frumlegri pallborðsumræðu þar sem þeir settu fram framtíðarsýn sína um viðfangsefni og áherslur í rannsóknum á sviði stærðfræðimenntunar. Í undirbúningsnefnd ráðstefnunnar voru Freyja Hreinsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir.

Í undirbúningi er ráðstefnurit þar sem yfir 50 rannsakendur fjalla um rannsóknir sínar og um það bil 30 kynna stuttlega rannsóknir sem eru í gangi. Á heimasíðu ráðstefnunnar, vefsetur.hi.is/norma11, verður greint frá útgáfu ráðstefnuritsins. Fjórir íslensku þátttakendanna segja hér frá þremur erindum sem þeir hlustuðu á og gefa ykkur inn-sýn í inntak þeirra og umfjöllunarefni ráðstefnunnar.

SÓLEY SIGÞÓRSDÓTTIR

Hvers vegna vill stærðfræðikennari breyta stærðfræðikennslu sinni?

Kennslustund byrjar á að kennari kynnir fyrir öllum bekknum ákveðna reglu. Tekin eru dæmi um viðfangsefni og skilgreint hvernig nota má regluna til að leysa mismunandi dæmi. Að lokum vinna nemendur einstaklingslega að verkefnum í stærðfræðibókunum sínum.

Hver kannast ekki við svona kennslustund í stærðfræði? Í fyrirlestri sínum (*Why does a prospective teacher want to change her mathematics teaching practice?*) kynnti Kjersti Wæge rannsókn þar sem hún útlístaði hvers vegna stærðfræðikennaranemi í meistaranámi fékk áhuga á að breyta kennslu sinni frá bókamiðaðri kennslu í rannsóknamiðaða kennslu (*inquiry-based teaching*) og á hvaða hátt meistaranámið hafði áhrif á áhuga kennaranema til

breytinganna. Í erindinu valdi Kjersti Wæge að fjalla um þennan hluta rannsóknar sinnar (erindið fjallaði einungis um hluta af rannsókn hennar).

Lýsingin á kennslustundinni hér að ofan er úr viðtali við kennaranemann Maríu eftir fyrra af tveimur æfingakennslutímabilum. Hún taldi sig hafa kennt eins og henni hafði verið kennt stærðfræði. Reynsla Maríu af æfingakennslunni var góð, hún fékk góðar leiðbeiningar í skólanum og hún upplifði að almennt hefði nemendum liðið vel. Undir lok æfingakennslunnar hafði hún lagt fyrir nokkur rannsóknarverkefni og sá þá hvernig strákar sem áður sýndu lítinn áhuga á náminu veðruðust upp og sögðu: „Aha, nú skil ég þetta!“ Í viðtalinu við Maríu eftir æfingakennsluna kom í ljós að henni fannst mikilvægt að nemendur hafi jákvætt viðhorf til stærðfræðinnar og að þeir öðlist skilning á hvaða á að gera og hvers vegna (relational understanding). Upplifun Maríu var að í hefðbundinni töflukennslu, sem snýst mikið um að æfa aðferðir, hefðu nemendurnir einungis þróað aðgerðafærni (instrumental understanding) sem snýst um að vita hvaða á að gera en ekki hvers vegna. Einnig taldi María að í gegnum „töflukennsluna“ væri ýtt undir þau viðhorf að stærðfræðinám snerist einungis um að læra reglur. Þessi upplifun Maríu í æfingakennslunni og að hún var búin að vera á námskeiðum um rannsóknarmiðað nám voru hvatar þess að hún vildi prófa nýjar kennsluáferðir. María hafði misst trúna á töflukennslunni sem leið til að mæta mismunandi námsþörfum nemendanna. Hún taldi mikilvægt að þróa með sér hæfni til að nota fjölbreyttari aðferðir í kennslunni í framtíðinni.

Hugtökinn sem við notum sýna viðhorf okkar til kennslunnar

Þegar María ræddi um „hefðbundna“ kennslu notaði hún hugtök eins og *reglur*, *dæmi* og *verkefni*. Hún talaði ekki um markmið þess að kynna reglur á töflunni né hvaða hæfni hún vildi að nemendurnir öðluðust. En um leið og



MYNDR: EFST OG NIÐUR

- Nokkrir ráðstefnugestir á Esju.
- Ungir rannsakendur undirbúa pallborð.
- Núria Planas í góðum félagsskap.
- Fyrirspurn úr sal á ráðstefnunni.
- *Bharath Sriraman*, aðalfyrirlesari, og *Frode Rønning*, formaður NORME, ræða málin.

hún fór að tala um væntingar sínar til fyrirhugaðra breytinga og þegar hún lýsti reynslu sinni af rannsóknarverkefnum sem hún lagði fyrir byrjaði hún að nota hugtök eins og *námshvöt*, *merking*, *að hafa tök á* og *skilning*.

Kjersti Wæge telur því mikilvægt að í kennaramenntuninni sé lögð áhersla á að aðstoða væntanlega kennara við að greina eigin viðhorf og hugmyndir um kennslu og við að þróa hugtakanotkun þeirra. Þannig aukist líkurnar á að þeir færi sjónarhornið frá eigin kennslu yfir á nám nemendanna. Til að breyting eigi sér stað í kennslustofunni þarf að hafa áhrif á hugmyndir kennaranna um kennslu og nám en einnig að styðja þá til breytinga.

Hún telur að meistaranámið sem hún var að skoða hafi haft veruleg áhrif á að viðhorf Maríu til kennslu breyttust sem aftur leiddi til þess að hún vildi breyta kennslunni sinni. Kjersti telur að það hafi einkum verið fjórir þættir í fræðilega náminu sem hafi haft áhrif á viðhorfsbreytingu Maríu. Þessir þættir voru: námshvöt nemenda í stærðfræði-umfjöllun um viðhorf og framkomu nemenda, skilgreining á mismunandi skilningi (*relational and instrumental understanding*), hugmyndir um einstaklingsmiðun í námi og, að lokum, ýmsar kenningar um lausnaleit í stærðfræði.

Kjersti Wæge telur að ekki sé nóg að tala um nauðsyn á breytingum í kennslunni eða að ætlast til að kennararnemar breyti kennsluháttum þegar þeir koma út í umhverfi þar sem þeir geta þurft að berjast á móti hefðum í skólasamfélaginu, heldur verði að útvega þeim verkfæri til breytinganna. Hún telur að ein leið sé að hvetja kennararnemana til að rýna í eigin kennslu. Kjersti Wæge ætlar því að leiðbeina kennaranemum í rannsókninni við að nota upptök úr kennslustundum til að greina eigin kennslu. Tilgangurinn er að þeir auki hæfni sína til að takast á við rannsóknarmiðaða nálgun í kennslu og að þeir bæti kennslu sína.

Meginniðurstöður Kjersti Wæge eru að í gegnum kennaramenntunina sé hægt að hafa áhrif á viðhorf og fagvitund kennara. Hún telur að það geti svo leitt til þess að kennsluhættir í skólum þróist í takt við rannsóknir á námi. Kennaranemar þurfa að taka þátt í að tengja rannsóknarsamfélagið og veruleikann í skólastofunni.

Ég hvet okkur öll sem erum að kenna stærðfræði til að lesa grein Kjersti Wæge um þessa rannsókn þegar hún birtist í ráðstefnuriti Norma 11, en einnig verður áhugavert að fylgjast með hvernig tekst til með framhald rannsóknarinnar.

Það að hlusta á Kjersti Wæge fékk mig til að hugleiða orðræðuna þegar við kennarar ræðum um kennslu eða þegar við erum að undirbúa okkur. Tölum við um *markmið, áhugahvöt og skilning* eða bara um reglur og dæmi sem á að leysa? Tökum við fræðin með okkur inn í kennslustofuna eða eru þau bara notuð á tyllidögum?

Erum við að hugsa um kennslu eða nám? Leggjum við áherslu á aðgerðafærni (instrumental understanding) eða að nemandinn viti hvað hann á að gera, til hvers og hvers vegna (relational understanding)?

ÓSK DAGSDÓTTIR

Hvort skiptir meira máli, stærðfræðin eða tungumálið?

Á ráðstefnuna Norma 11 kom fjöldinn allur af menntafólki frá Norðurlöndunum, Eystrasaltsríkjunum, Spáni, Þýskalandi og jafnvel Bandaríkjunum og var undirrituð þeirrar heppni aðnjótandi að geta tekið þátt í ráðstefnunni að þessu sinni. Eitt af því sem var til umræðu á ráðstefnunni var tungumálið; hlutverk tungumáls í stærðfræði, tungumálið sem notast er við í stærðfræði, tvítyngi og nemendur sem læra stærðfræði á öðru tungumáli en móðurmáli sínu.

Núria Planas frá Barcelona var einn af fjórum aðalfyrirlesurum, en hennar

fyrirlestur fjallaði um börn sem lærðu stærðfræði á öðru tungumáli en móðurmáli sínu. Undirrituð var skiptinemi á Spáni 2001-2 og kynntist þar bæði spænsku og *valenciano*, en valenciano er mállýska í katalónsku sem er móðurmál flestra í Katalóníuhéraði þar sem Barcelona er. Þegar ég var beðin um um að skrifa grein um einhvern af aðalfyrirlesturum var það mér mikill heiður að fá að skrifa um fyrirlestur Núriu.

Núria Planas hefur bakgrunn í stærðfræði og í félagslegum störfum og hvort tveggja hefur nýst henni í rannsóknum hennar. Hún hefur sérstaklega rannsakað stræðfræðinám nemenda sem læra stærðfræði á öðru tungumáli en sínu eigin. Rannsóknir hennar snúa að spænskumælandi nemendum í Katalóníu og öðrum nemendum sem hafa hvorki spænsku né katalónsku sem fyrsta mál. Sjálf er Núria tvítyngd og talar spænsku og katalónsku en katalónska er móðurmál hennar.

Núria er ekki sú fyrsta sem rannsakar stærðfræðinám hjá tvítyngdum börnum eða börnum sem læra stærðfræði á öðru tungumáli en móðurmáli sínu. Miðað við þær rannsóknir sem hún vísar til er almennt talið best fyrir nemendur í þessari stöðu að aðaláherslan sé á stærðfræðina í stað þess að hún sé á tungumálið. Rannsóknir sýna að það sé best ef nemendur fá að tjá sig óheflað án leiðréttinga og að þeir þurfi ekki að hafa áhyggjur af því að þeir séu að tala vitlaust. Eins er gott að þeir fái að tjá sig á móðurmáli sínu ef aðstæður leyfa. Einnig er það metið svo að ekki þurfi að takmarka stærðfræðinámið við verkefni sem ekki byggja á tungumáli heldur megi vel leggja hvers konar verkefni fyrir nemendur.

Núria trúir að það að setja stærðfræðina í fyrsta sæti í stærðfræðinámi í stað þess að leggja áherslu á tungumálið geti gagnast nemendum vel og allt bendir til þess að á endanum styðji það jafnframt við stærðfræði- og tungumálanám nemenda. Það er því

leitt frá því að segja að miðað við rannsóknir Núriu er almennt ekki unnið á þennan hátt í kennslustofum. Kennarar leggja margir hverjir áherslu á rétt mál og leiðrétta nemendur. Einnig kemur það fyrir þegar kennarar eru opnir fyrir því að nemendur tjái sig á móðurmáli sínu eða leiðrétta þá ekki þegar þeir tjá sig á öðru máli að nemendurnir virðast sjálfir hafa áhyggjur af því að tala rétt mál og vilja oft ekki tjá sig á móðurmáli sínu.

Í fyrirlestri sínum tekur Núria eitt dæmi um það hvernig stærðfræðin týnist í samræðum nemenda. Þar ræða spænskumælandi nemendur í Barcelona um eiginleika marghyrninga en fljótlega týnist umræðan um marghyrninga og fer að snúast um þau katalónsku orð sem notuð eru yfir þá. Þetta dæmi er nokkuð lýsandi fyrir það sem Núria talar um sem vandamál þar sem stærðfræðin týnist og tungumálið er í forgrunni. Líklega eru hvorki nemendur né kennarar meðvitaðir um þetta og ég veit svo sannarlega að ég hefði ekki endilega áttað mig á því hversu miklu máli það getur skipt að leggja ekki alla áhersluna á tungumálið.

Ég get svo sannarlega tekið þetta til mín og trúi að þetta geti jafnvel átt við um íslenskt mál og óþarfar leiðréttingar á málfari og stafsetningu í stærðfræðitímum og -verkefnum. Eftir fyrirlestur Núriu finnst mér ég búa að nýjum hugmyndum um tungumálið og stærðfræðina. Í grunnskólanum er aðalmarkmiðið almenn menntun nemenda með áherslu á virka þátttöku þeirra í lýðræðissamfélagi. Þar skiptir tungumálið vissulega máli en sem stærðfræðikennari er mikilvægt að gleyma því ekki hversu mikilvægur stærðfræðipátturinn er, kannski sérstaklega með hliðsjón af þeim þáttum sem lagðir eru menntun til grundvallar í íslenskum grunnskólum í nýutkominni *Aðalnámsskrá*. Þessir þættir eru sex:

Læsi, sjálfbærni, heilbrigði og velferð, lýðræði og mannréttindi, jafnrétti og sköpun.

Fyrirlestrar, námskeið og annað í þeim dúr vekur mig alltaf til umhugsunar um starf mitt sem kennari, minnir mig á hvað skiptir máli og á stundum, eins og í þessu tilfelli, opnar augu mín fyrir nýjum hugmyndum. Það er ósk mín að þessi stutta grein geti haft slík áhrif á einhverja þeirra sem lesa hana.

DÓRÓPEA REIMARSDÓTTIR ÞÓRA RÓSA GEIRSDÓTTIR

Að læra að gera líkön:

Orðadæmi

Roger Säljö, prófessor í menntunarfræði og námssálarfræði við Háskólann í Gautaborg, var einn af fjórum aðalfyrirlesurum á NORMA11. Hann nefndi erindi sitt *Learning to model: Lessons from word problems*. Í því beindi hann sjónum að orðadæmum og túlkun þeirra. Hann talaði um að líta mætti á orðadæmi sem sérstaka tegund námsverkefna þar sem nemendur þurfa að tengja ritað mál við tölur, stærðfræðitákn og aðgerðir. Gjarnan væri litið á þau sem aðfarann að því að setja upp stærðfræðileg líkön og sem leið til að tengja stærðfræðilega rökfærslu við daglegt líf.

Säljö benti á að margar rannsóknir sýni að mjög dragi úr fjölda réttra lausna hjá nemendum þegar vikið er frá hefðbundnum aðstæðum í orðadæmunum. Samkvæmt niðurstöðum rannsókna geri nemendur gjarnan útreikninga sem byggjast ekki á skynsamlegri rökfærslu, sé tekið mið af raunveruleikanum, heldur aðlagi þeir verkefnið að því sem þeim hefur verið kennt. Í því sambandi nefndi hann þekkt dæmi úr rannsókn Baruk frá 1985 þar sem spurt var hversu gamall skipstjórinn væri, en um borð voru 12 kindur og 13 geitur. Meirihluti nemenda í fyrstu bekkjum svaraði 25, lagði einfaldlega saman tölurnar sem gefnar voru í dæm-

inu. Nemendur virtust hafa lært að allar tölur í orðadæmum ætti að nota til að finna svar án þess að ígrunda um hvað verið er að spyrja. Einnig vísaði Säljö til þekktis dæmis frá Bandaríkjunum þar sem nemendur voru spurðir um hvað þyrfti margar rútur undir 1128 hermenn ef ein rúta tæki 36. 70% deildu á hefðbundinn hátt og fengu út 31 og 12 í afgang eða námunduðu að 31. Einungis 32% dattu ekki í pyttinn og svöruðu að það þyrfti 32 rútur. Ennfremur bendir Säljö að nemendum sjáist gjarnan yfir að taka þurfi tillit til fleiri þátta en fram koma í orðadæmunum við fyrstu sýn. Til dæmis þegar



Undirbúningsnefndin: Freyja, Guðný Helga og Guðbjörg.

finna skal hvað hægt er að saga mörg eins metra löng borð úr fjórum 2,5 metra löngum plönkum. Nemendum hættr til að ganga út frá þeirri staðreynd að þarna sé um tíu metra að ræða og þá muni vera hægt að fá tíu borð en taka ekki tillit til þess að af hverjum planku gengur hálfur metri.

Á heildina litið segir Säljö það of mikla einföldun að líta á orðadæmi sem hlutlaust líkan af raunveruleikanum. Börnum sem alast upp í samfélagi þar sem læsi er mikilvægt verði að lærast að tungumálið og ritaða málið séu leiðir til að draga upp mynd af heiminum fremur en að tákna hann á hlutlausn hátt. Lestur sé sú merking sem lögð er í textann en ekki einungis um-

kóðun tákanna. Hinn eini og sanni raunveruleiki sem er sá sami fyrir alla sé ekki til þar sem hver og einn sé stöðugt að búa sér til sinn veruleika út frá eigin reynslu og skilningi. Því verður að taka mið af aðstæðum þegar orðadæmi eru sett fram. Säljö gaf dæmi um verkefni í norski kennslubók sem er dæmigert fyrir hvað fyrri reynsla skiptir miklu máli en í því er spurt hvað krakkar hafi fundið marga sveppi ef þeir fundu 9 kantarellur og 8 steinsveppi. Hafi nemendur ekki reynslu af því að tína mismunandi tegundir af sveppum getur það hamlað skilningi þeirra á að hvoru tveggja eru sveppir, kantarellurnar líka. Það samhengi sem kennarar og þeir sem semja próf setja viðfangsefnið í getur haft afgerandi áhrif á hvort nemendur ráða við að leysa þau. Líta ætti á lestur texta sem þrautalausn og að lausniferlið hefjist áður en farið er að fást beint við tölur og aðgerðir.

Umræða Säljö um skilning og aðstæður var áhugverð og vakti okkur enn frekar til umhugsunar um margbreytileika nemenda og bakgrunn þeirra. Það sjónarhorn hans að líta á textann sjálfan sem

sjálfstæða þraut samræmdist líka hugmyndum okkar um að leskilningsaðferðir eins og KVL (kann - vil vita - hef lært) ættu svo sannarlega samleið með stærðfræðikennslunni ekki síður en íslenskukennslunni.

Sóley Björk Sigurþórsdóttir
er deildarstjóri í Grunnskólanum í Borgarnesi

Ósk Dagsdóttir
er meistaranemi í stærðfræðimenntun

Dórópea Reimarsdóttir
er sérkennari í Dalvíkurskóla

Þóra Rósa Geirsdóttir
er sérfræðingur við HA

Ritstjóraspjall 2

Mikael Skånström 3
aðalfyrirlesari á Námstefnu FLATAR

Stærðfræði undir berum himni 4
Þóra Rósa Geirsdóttir & Ingileif Ástvaldsdóttir

Á döfinni / Áhugaverð stærðfræðitímarit 5

Hvað er núll? 6
Kristín Bjarnadóttir

Stærðfræði skapar heiminn 10
Ingólfur Gíslason

VIÐTAL: Anna Kristjánsdóttir 12
Þóra Þórðardóttir

Öðruvísi vorpróf 16
Borghildur Jósúadóttir

Bókarkynning 18
Ásta Ólafsdóttir

Áhugaverðar vefsíður 19
Ingólfur Gíslason

Norma 20
Guðbjörg Pálsdóttir & Guðný Helga Gunnarsdóttir