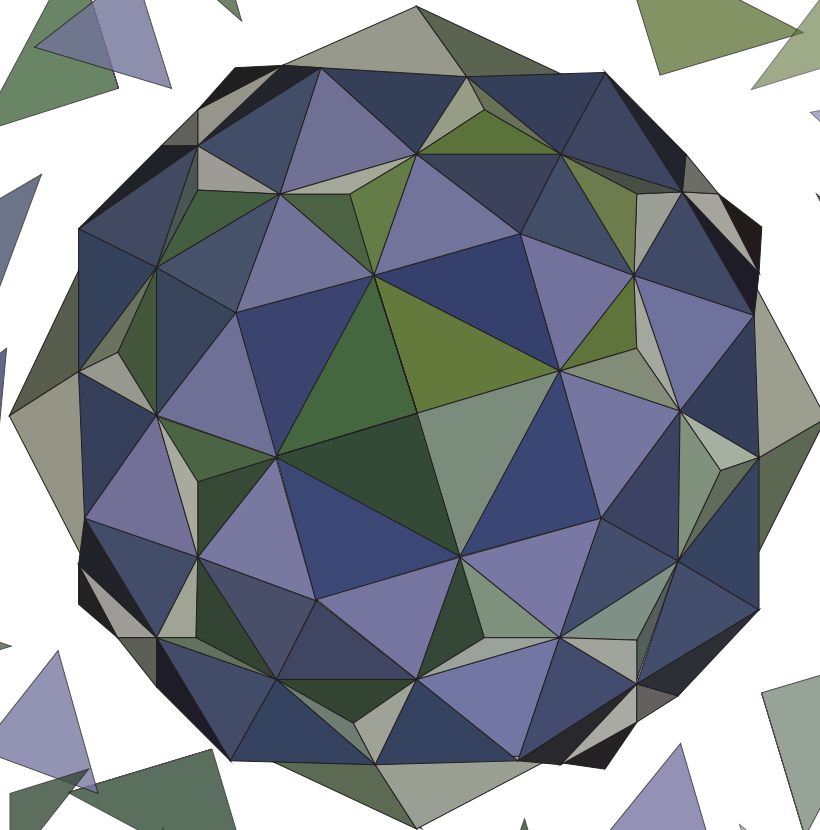


FLATAR ^{mái}

1. tbl., 26. árgangur 2019



**Málgagn Flatar
samtaka stærðfræðikennara**

Flatarmál 1. tbl., 26. árg. 2019

Málgagn Flatar, samtaka stærðfræðikennara

© 2019 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara

Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Formaður: Þórunn Jónasdóttir (Hörðuvallaskóla) thorunnjona@kopavogur.is

Gjaldkeri: Hrafnhildur Pálsdóttir (Hörðuvallaskóla) hrafnpal@kopavogur.is

Ritari: Kristín Einarsdóttir (Salaskóla) kristine@salaskoli.is

Meðstjórnandi: Edda Jónsdóttir (Árbæjarskóla) Edda.Jonsdottir@rvkskolar.is

Meðstjórnandi: Imke Schirmacher (Lágafellsskóla) imke@lagafellsskoli.is

Meðstjórnandi: Kristjana Skúladóttir (Melaskóla) Kristjana.Skuladottir@rvkskolar.is

Vefsíða

<http://www.ki.is/flotur>

Ritnefnd Flatarmála

Birna Hugrún Bjarnardóttir, Vatnsendaskóla

Guðbjörg Pálsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Margrét S. Björnsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Prófarkalestur

Kristín Einarsdóttir

Birna Hugrún Bjarnardóttir

Umbrot og myndvinnsla

Jón Reyr Jóhannesson

<https://jonjohannesson.com>

Prentun

Guðjón Ó. – Vistvæna prentsmiðjan

Mynd á forsiðu

Mynd á forsiðu er af einum af þeim tólf fjöflötungum sem eru á veggspjaldinu *giftingar margflötunga* (poly hedral weddings) eftir Einar Þorstein Ásgeirsson listamað og arkitekt. Frumgerð veggspjaldsins er í eigu Hönnunarsafns Íslands og hefur afrit þess fengist í safnbúð Hönnunarsafnsins.

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda með tölvupósti til ritstjóra Flatarmála Birnu Hugrúnar á netfangið birnahugrun@gmail.com. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millfyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Ritstjórn Flatarmála tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

Ágætu lesendur

Nú lítur enn eitt Flatarmálið dagsins ljós. Í því eru fréttir frá stjórn Flatar ásamt mörgum áhugaverðum greinum fyrir öll skólastig. Söguhorn Kristínar Bjarnadóttur er á sínum stað og einnig er áhugaverð grein um verðug viðfangsefni í stærðfræði sem birtist í tímaritinu Námaren og Guðný Helga Gunnarsdóttir þýddi með góðfúslegu leyfi frá höfundum í Svíþjóð. Finna má grein þar sem sagðar eru sögur úr leikskóla og einnig er áhugaverð grein um tengsl rúmfræði og lista. Sagt er frá vinnustofu Bjarnheiðar Kristinsdóttur þar sem spáð var í spil og annarri sem Peter Liljedal sá um og kallaði hugsandi vinnustofu.

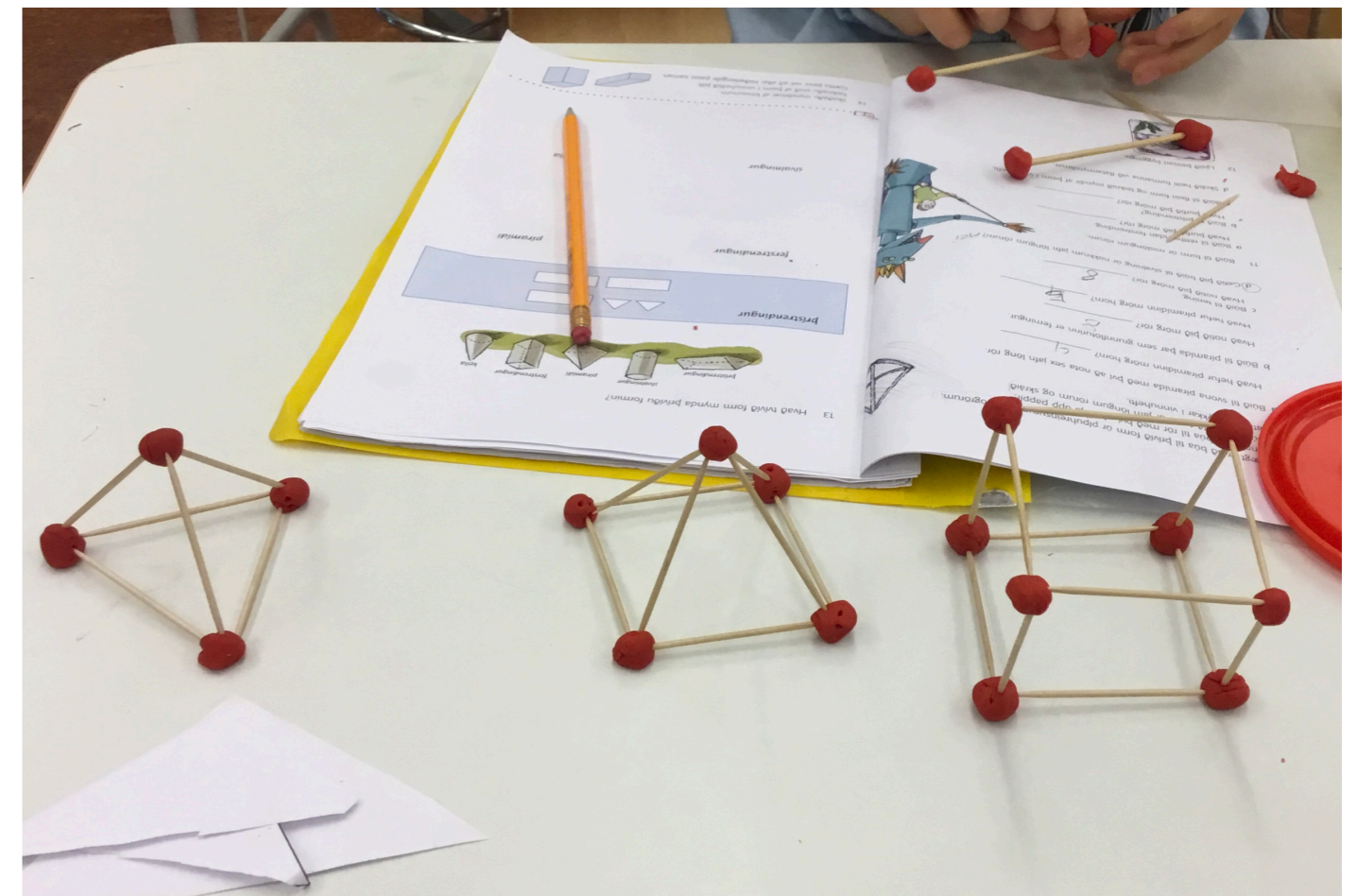
Í blaðinu er sagt frá nokkrum ráðstefnum sem eru á döfni bæði erlendis og hér á landi. Til dæmis verður ICME 14 ráðstefnan haldin í Kína í júlí næsta sumar. Þegar ICME ráðstefnur hafa verið í Evrópu hafa stærðfræðikennarar frá Íslandi verið duglegir að sækja

þær. Búast má við að færri sækji ICME14 í Kína en vonandi fara einhverjir.

Í grunnskólum landsins er mikið rætt um hæfniviðið í stærðfræðinámi og hvernig eigi að meta hæfni nemenda. Benda má á að Flötur stendur fyrir námstefnu 13.-14. mars 2020 þar sem helsta viðfangsefnið verður hæfni í stærðfræðinámi og hvaða námsefni og kennsluáferðir henti til að nemendur nái þeirri hæfni sem til er ætlast.

Enn og aftur vil ég biðla til ykkar lesendur góðir um efni í blaðið. Það er alltaf gaman að fá sögur úr kennslustofunni og myndir af verkum nemenda. Einnig eru lengri greinar vel þegnar eða frásagnir ef þið lumið á slíkum.

*Með vinsemd og virðingu,
Birna Hugrún Bjarnardóttir
ritstjóri Flatarmála*



FRÉTTIR AF STARFSEMI FLATAR

Ágætu félagar

Fréttapistill frá stjórn er að verða fastur liður í Flatarmálum, nokkurskonar annáll um starfsemi samtakanna. Hér verður rakið í stuttu máli það helsta sem samtökin hafa komið að síðastliðið ár.

Fyrst ber að nefna að eftir aðalfund þann 10. nóvember 2018 var Bjarnheiður Kristinsdóttir doktorsnemi í stærðfræðimenntun með erindi og vinnusmiðju út frá borðspili sem reynir á rökhusun. Síðan lögðust fundarmenn yfir að skoða fjölmörg stærðfræðispil, m.a. glænýtt spil frá dönsku stærðfræðisamtökunum sem heitir Hungry Higgs. Þetta var mjög fróðlegt og skemmtileg stund þar sem hátt í 30 manns leyfðu leikgleðinni að taka yfir. Þess má geta að Flötur keypti 8 Hungry Higgs spil og hægt er að fá þau lánuð hjá samtökunum.

Þann 30. nóvember kom út fyrsta jóladagatal Flatar, að norrænni fyrirmynd. Þar voru 24 þrautir af ýmsum þyngdarstigum í jólalegum búningi og voru þær sendar rafrænt á alla félagsmenn og alla grunnskóla landsins. Svör við þrautunum birtust svo á heimasíðu Flatar. Þetta mæltist vel fyrir, margir höfðu samband og lýstu yfir ánægju sinni með þetta framtak. Leikurinn verður endurtekinn í sama formi í ár. Væntingar standa svo til þess að við getum á næstu árum gefið út jóladagatal og sent út í skóla landsins.

Á nýju ári var farið af stað með námskeið um greinandi talna- og aðgerðaskilningspróf sem Dóróþea Reimarsdóttir hefur hannað. Námskeiðið var kennt tvo eftirmiðdaga fjóra tíma í senn með tveggja mánaða millibili. Fyrri daginn var bakgrunnur prófsins kynntur og farið yfir vinnubrögð við fyrirlögn. Þátttakendur fengu síðan það verkefni að vinna með matsgögnin milli tíma. Síðara skiptið var svo notað til að ljúka úrvinnslu athugana sem þátttakendur gerðu á nemendum á milli tíma svo voru úrræði rædd. Það er skemmst frá því að segja að aðsókn á námskeið var afar góð, reyndar svo mikil að ákveðið var að hafa tvö námskeið og voru 40 þátttakendur á þeim samanlagt. Almenn ánægja var með námskeiðið og mikið rætt

um þörfina fyrir einhverskonar greiningartæki í stærðfræði sem tæki á þeim þáttum sem meta skilning barna.



Dagur stærðfræðinnar var 1. febrúar og var þemað í ár rúmfræði. Hugmyndum var safnað saman og þær settar fram í rafrænu formi á heimasíðu samtakanna, á fésbókina, inn á stærðfræðisarpinn, á vef MMS og inn á stærðfræðitorgið sem er sameiginlegur vefur fyrir starfssamfélag stærðfræðikennara á vegum Flatar og Rannsóknarstofu um stærðfræðimenntun. Áhugasamir geta nálgast verkefni á þessari slóð: <http://ki.is/flotur/frettir/55-verkefni-dagur-staerd-fraed-innar-1-februar-2019>



Mikið og gott samstarf við Rannsóknarstofu um stærðfræðimenntun og Menntavísindasvið HÍ hélt áfram og nokkur námskeið og viðburðir voru haldnir

í samstarfi við þessa aðila. Ber þar hæst tveggja daga námskeið sem haldið var í júní síðastliðnum og bar Menntavísindasvið hita og þunga af undirbúningi og framkvæmd. Þar var Peter Liljendahl með vinnustofu um stærðfræðikennslu sem knýr nemendur til hugsunar. Hann hefur rannsakað hvernig byggja megi upp stærðfræðikennslu sem skapar nemendum tækifæri og þörf til að efla stærðfræðihugsun sína (Thinking Mathematics Classroom). Peter er prófessor í stærðfræðimenntun við Simon Fraser háskólann í Kanada og á heimasíðu hans er að finna áhugaverðar greinar um hugsun í stærðfræðikennslu og fleira tengt stærðfræðimenntun. Í Flatarmálum 1.tbl. 2018 má finna grein eftir Ingólf Gíslason og Bjarnheiði Kristinsdóttur þar sem fjallað er um hugmyndir Peter. Þessir tveir dagar voru afar vel heppnaðir í alla staði og frábær þátttaka svona í sumarbyrjun, en 35 manns voru á námskeiðinu.

Slóðir á greinina í Flatarmálum og á heimasíðu Peters má finna á heimasíðu samtakanna <http://ki.is/flotur/frettir/61-hugsandi-skolastofa-i-staerd-fraed-i-vinnustofur-peter-liljedahl-19-20-juni>

Samstarf var við fleiri aðila á árinu. Félag náttúrufræðikennara óskaði eftir aðkomu okkar að málþingi sem haldið var í samvinnu ýmissa félaga og samtaka. Má þar nefna: Samlíf - samtök líffræðikennara, Félag raungreinakennara, NaNO - Náttúruvísindi á nýrri öld, GERT, RAUN - Rannsóknarstofu um náttúrufræðimenntun, Flöt - samtök stærðfræðikennara, Félag leikskólakennara, Miðstöð skólaþróunar HA og Rannsóknarstofu um stærðfræðimenntun HÍ.

Málþingið bar yfirskriftina Vísindi í námi og leik, þar sem sjónum var beint að námi og kennslu í náttúruvísindum, stærðfræði og tækni, þ.m.t. upplýsingatækni, í leik-, grunn- og framhaldsskólum. Málþingið var haldið á Akureyri 30. mars og annar aðalfyrirlesari þess var Lisa Björklund Boistrup. Hét erindi hennar: Boosting Mathematics Teaching and

Learning: Development an Research Projects with Teachers. Lisa hefur unnið lengi við gerð námsmats og stundað rannsóknir á því sviði. Hún er dósent í stærðfræðimenntun við Stokkhólmsháskóla og á heimasíðu hennar <https://www.su.se/english/profiles/lisbjo-1.186455> er að finna margar áhugaverðar greinar um námsmat og fleira. Til að nýta heimsókn Lisu sem best var boðið upp á vinnustofu með henni á fimmtudeginum 28. mars í húsnæði Menntavísindasvið HÍ þar sem hún hélt stuttan fyrirlestur um námsmat í stærðfræði og fjallaði um þróun námsmats í stærðfræði á undanförunum árum í Svíþjóð.

Á málþinginu áttu stærðfræðikennarar svo ýmsa fulltrúa sem voru með margskonar innlegg. Jónína Vala Kristinsdóttir, dósent við HÍ, Guðbjörg Pálsdóttir, dósent við HÍ, Guðný Helga Gunnarsdóttir, lektor við HÍ, Sólveig Zophoníasdóttir og Þóra Rósa Geirsdóttir, sérfræðingar við MSHA voru með málstofu um stærðfræðileiðtoganám, nýjar áherslur í stærðfræðikennslu á miðstigi. Jóhann Sigursteinn Björnsson framhaldsskólakennari við Menntaskólann á Akureyri fjallaði um stærðfræðikennslu á 21. öldinni. Bjarnheiður Kristinsdóttir, doktorsnemi við HÍ, Freyja Hreinsdóttir, dósent við HÍ og Zsolt Lavicza fjölluðu um notkun hljóðlausra myndbanda í stærðfræðikennslu. Bjarnheiður var svo með aðra málstofu ásamt Diego Leiban þar sem þau kynntu spil og þrívíddarprentun með GeoGebru. Svava Þ. Hjaltalín og Anna Kristín Arnarsdóttir, grunnskólakennarar í Giljaskóla á Akureyri kynntu PALS stærðfræði og svo var málstofa sem vissulega tengist stærðfræði þar sem Ingibjörg Stefánsdóttir, Íris Aðalsteinsdóttir, Ursula Ásgrímsdóttir og Berglind Þráinsdóttir, grunnskólakennarar í Grundaskóla á Akranesi kynntu hugmyndir og vinnu sína með opna stundatöflu og samþættingu námsgreina. En stærðfræði er einmitt sú grein sem mörgum finnst hvað erfiðast að sjá hvernig koma megi inn í samþættingu námsgreina. Fjölmörg áhugaverð erindi voru á málþinginu eins og sjá má

á heimasíðu málþingsins <https://www.msha.is/is/radstefnur/vorradstefna-2019>.

Aukinn kraftur hefur verið lagður í samstarf stærðfræðikennara á Norðurlöndum og hefur Flötur tekið virkan þátt í því. Stærðfræðikennarafélagið Matematik í Danmörku bauð til fyrsta fundar um samstarf um stærðfræðináms og stærðfræðikennslu 27. september 2018. Fundurinn var haldinn í Óðinsvém í Danmörku og til fundarins fóru þrjú fulltrúar frá Íslandi, þær Kristjana Skúladóttir og Imke Schirmacher úr stjórn Flatar og Birna Hugrún Bjarnardóttir ritstjóri Flatarmála. Næsti fundur var í stærðfræðisetrunu í Þrándheimi í Noregi 16. – 17. janúar 2019. Á þann fund fóru Kristjana Skúladóttir og Kristín Einarsdóttir úr stjórn Flatar, Birna Hugrún Bjarnardóttir ritstjóri Flatarmála og Guðbjörg Pálsdóttir frá Menntavísindasviði Háskóla Íslands. Á fundinn komu fulltrúar fagfélaga og ritstjórar fagtímarita frá öllum Norðurlöndunum. Fundarmenn kynntu tímarit sín og störf fagfélaganna og lögð voru drög að samstarfi og þátttöku í námskeiðum sem fyrirhuguð eru í Noregi og Svíþjóð. Fyrstu skrefin í þessu samstarfi eru að nú höfum við heimild til að þýða og birta greinar úr fagtímaritum hinna Norðurlandanna í Flatarmálum auk þess sem Íslendingar eiga orðið fimm sæti frátekkin á námskeið og ráðstefnur sem haldnar eru af samstarfsfélögum okkar. Þá eru fræðimenn í stærðfræði á hinum Norðurlöndunum okkur ákaflega velviljaðir og tilbúnir að koma til Íslands og vera með erindi á námstefnum og viðburðum samtakanna. Það er von okkar í Fleti að íslensk stjórnvöld ljái okkur eyra og aðstoð við að efla stærðfræðimenntun í landinu og í framtíðardraumum okkar sjáum við íslenskt stærðfræðisetur líkt og frændur okkar eiga. Næstu skref í samstarfinu eru að fimm aðilar, fjórir frá Fleti og einn frá Háskóla Íslands eru að fara á árlega ráðstefnu Novemberkonferansen sem haldin er af samstarfsfélagi Flatar í Noregi, Matematikksenteret, í Þrándheimi dagana 26.-27. nóvember 2019. Væntanlega verður svo greint betur

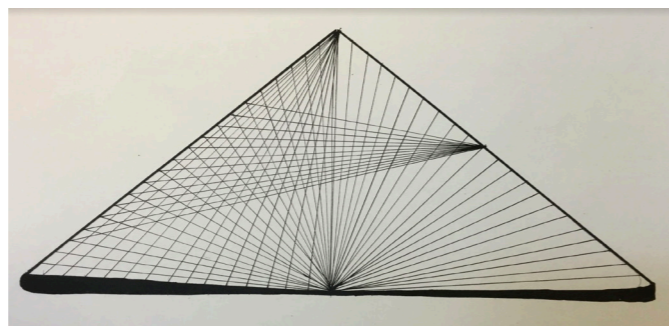
frá þeirri heimsókn í næsta blaði Flatarmála.

Samstarfshópur varðandi námsefni yngsta stigs grunnskóla hefur verið að störfum hjá Menntamálastofnun þar sem Flötur hefur haft sinn fulltrúa. Á komandi ári er ætlun MMS að setja saman annan hóp varðandi námsefni miðstigs. Þá hefur fulltrúi Flatar verið skipaður í fagråd um stærðfræði á vegum Mennta- og menningarmálaráðuneytisins. Það er afar mikilvægt fyrir samtökin að vera aðilar að svona verkefnum.

Framundan ber það hæst að í 13.-14. mars 2020 verður námstefna Flatar haldin á Hótel Hamri í Borgarnesi. Þar verður aðaláherslan á hæfnimiðað stærðfræðináms og námsefni sem byggir á þeim. Fyrirlesarar koma meðal annars frá danska stærðfræðisetrunu, þær Elisabeth Tang og Connie Nielsen.

Ötullega hefur verið unnið að skráningum og leiðréttingum varðandi félagatalið en félagsmenn í samtökunum eru nú um 290 einstaklingar auk þess sem ríflega 80 grunnskólar, skólaskrifstofur og skólasöfn eru skráð í samtökin. Virkir félagsmenn efla samtökin og gera þeim kleift að bjóða upp á fleiri viðburði. Það er ómetanlegt að heyra frá félagsmönnum hvaða hugmyndir þeir hafa um starfseminu og hvar áherslur í starfinu ættu að liggja. Þá skiptir líka afar miklu máli að félagar í samtökunum bjóði fram starfskrafta sína til einstakra verkefna því samtök sem byggð eru upp af sjálfbodastarfi þarfnast virkni félagsmanna sinna. Með von um gott og árangursríkt starf á komandi ári.

*Þórunn Jónasdóttir
formaður Flatar*



Stærðfræðináms er börnum eðlislægt og búa þau ung til sínar eigin hugmyndir um magn, tákni og stærðfræðileg sambönd. Þekking og áhugi ungra barna á stærðfræði kemur oft á tíðum fullorðnum á óvart og halda margir að börn hafi ekki getu eða þekkingu til þess að fást við hana í leikskóla. Rannsóknir á og með börnum hafa sýnt að þetta er ekki rétt. Börn á leikskólaaldri hafa gaman af og getu til að fást við og vinna með óformlega stærðfræði. Það er því afar mikilvægt að nýta áhuga þeirra og þekkingu til að veita börnum tækifæri til þess að vinna með og efla skilning sinn á meginþáttum stærðfræðinnar. Talið er að í vinnu með börnum á leikskólaaldri eigi að leggja megináherslu á þrjú inntaksþætti stærðfræðinnar en þeir eru tölur, rúmfræði og mælingar (Copley, 2010).



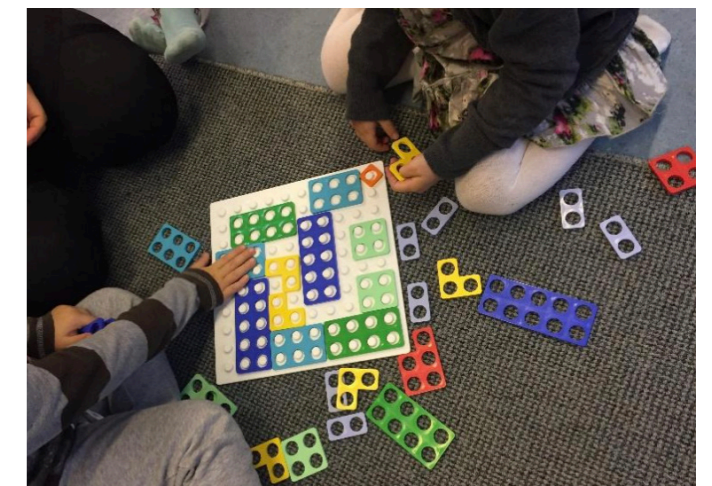
Þáttur kennara er afar mikilvægur í stærðfræðináms barna í leikskóla og er hlutverk þeirra að hvetja börn til þess að langa til að læra stærðfræði og veita þeim tækifæri til þess. Kennarar geta þannig stuðlað að því að börn opni augu sín fyrir mikilvægi stærðfræðinnar þar sem hún er alls staðar í kringum okkur, sýnt fram á gleðina við að vinna að verkefnum og kennt börnum að meta mistök sem mikilvæga reynslu til þess að læra af (Fosse, 2012; Thomas o.fl., 2014).

Nám í stærðfræði getur farið fram hvar og hvenær sem er og er mikilvægt að kennarar séu meðvitaðir um það.

Fyrir börnum á leikskólaaldri er stærðfræði og annað nám leikur og auðvelt er að fá þau til að taka þátt í



stærðfræðilegum vangaveltum á öllum mögulegum stöðum. Þess vegna má segja að í leikskóla skapist mörg tækifæri til náms, þar sem nám getur farið fram í margvíslegum aðstæðum og er það hlutverk leikskólakennarans að grípa tækifærin til að stuðla að því (Lossius, 2012; Copley, 2010). Til þess að afla sér



upplýsinga og átta sig á hvernig börnin takast á við námið verða kennarar að fylgjast með börnum í leik og starfi og afla sér þannig gagna sem gefa til kynna hæfni barnanna í stærðfræði. Hlutverk kennara er að hlusta á hugmyndir og vangaveltur barnanna og aðstoða þau við að komast að niðurstöðu með því að spyrja þau frekari spurninga og láta þau velta viðfangsefninu enn frekar fyrir sér (Thomas o.fl., 2014).

Líkt og fyrr segir kemur það mörgum á óvart að börn á leikskólaaldri fáist við stærðfræði. Eftir að hafa starfað í nokkur ár með börnum í leikskóla og áttað mig á hversu klár, námfús og viljug þau eru að fást við stærðfræðileg viðfangsefni langaði mig að nýta meistaraverkefnið mitt í Menntunarfræði leikskóla frá Háskóla Íslands til þess að sýna fram á þekkingu og hæfni barna á þessum aldri í stærðfræði. Verkefnið mitt fólst í því að safna sögum frá börnum og greina hvaða stærðfræðihæfni þau eru að nota hverju sinni. Með þessu verkefni langaði mig til þess að opna augu fullorðinna fyrir því hvernig börn á leikskólaaldri fást við stærðfræði í sínu daglega lífi og sýna fram á hæfni þeirra til þess að vinna enn frekar með hana. Með verkefninu langaði mig einnig að sýna fram á hversu mikilvægt það er að við sem umgöngumst börn hlustum eftir og bregðumst við því sem þau segja og gera til þess að hjálpa þeim að þróa með sér enn frekari nám og þroska.

Hér að neðan má sjá dæmi af sögum sem ég safnaði hjá börnum á aldrinum fjögurra til sex ára.

Saga um tölur

Við erum í gönguferð og sjáum húsnúmerið 10. Ég spyr þá börnin: „Hvað haldið þið að númerið sé á næsta húsi?“ Börnin svara að það sé númer 11. Ég segi börnunum að við götum á Íslandi, séu hús númeruð þannig að öðru megin við götuna séu sléttar tölur og hinum megin oddatölur. Þannig að næsta hús ætti að vera slétt tala þar sem 10 er slétt tala. Við göngum framhjá næsta húsi og sjáum að húsið er númer 8. Þá segir eitt barnið: „Við erum að

telja aftur á bak og við sleppum alltaf einni tölu, þannig vitum við að við erum með sléttu tölu, svo næsta hús á að vera númer 6.“ Barnið heldur svo áfram og segir: „Hey, ég á heima númer 11, svo ég á ekki heima þar sem það er slétt tala, ég á heima.. æji hvað heitir það aftur?“ Ég svara: „Já húsnúmerið þitt er þá oddatala.“ Barnið segir: „Já, ég á heima á oddatölu.“

Í þessari sögu má sjá hvernig eitt barn meðtekur það sem um ræðir og stjórnar umræðunni við hópinn. Þetta barn sýnir að það hefur náð góðum tókum á talnarununni, sem er einn þáttur talnaskilnings. Það hefur náð góðum tókum á talningu sem er ekki eftir hefðbundinni talnarunu og áttar sig á að við erum



bæði að telja aftur á bak og áfram og einnig að við erum að vinna með sléttar tölur. Barnið útskýrir fyrir öllum að við séum að sleppa einni tölu á milli, sem sýnir vel hversu góðan talnaskilning það hefur. Þá hæfni gæti barnið ekki sýnt ef það hefði ekki gott vald

á talningu. Með þessu er barnið einnig að sýna fram á þekkingu á að vinna með oddatölur og sléttar tölur. Barnið heldur svo áfram að velta fyrir sér hvert skyldi vera næsta húsnúmer, en með því sýnir það áhuga og vilja til þess að rannsaka þetta nánar. Barnið getur gefið sér hvað næsta númer er, sem sýnir að það hefur öðlast hæfni í að leika sér með tölurnar á talnalínunni og náð góðu valdi á að vinna með talnalínuna.

Það kom mér verulega á óvart að sjá að börn á þessum aldri náí að gera sér grein fyrir að húsnúmer séu einhver tala sem segir til um númer hvað húsið er í röð við götuna en ekki til um fjölda húsa á einhverju svæði. Barnið getur áttað sig á röð húsnúmeranna án þess að hafa fjöldann fyrir framan sig eða geta bent á öll húsin, sem bendir til þess að það hafi náð góðri færni og þekkingu á talnalínunni og geti séð fyrir sér í huganum hvernig uppbygging talnalínunnar er.

Að lokum er áhugavert að sjá að barnið nær að yfirfæra þekkingu sína á þessu verkefni yfir á aðra þekkingu, með því að átta sig á að húsnúmerið heima hjá því sé ekki slétt tala og hljóti því að vera oddatala. Af þessari sögu má læra að barnið hefur tileinkað sér að nota talnahugtökin til þess að sjá að talan 11 er ekki slétt tala.

Saga um rúmfræði

Í frjálsum leik þar sem leikið er með segulkubba, fer af stað umræða um form og eiginleika þeirra. Þá segir eitt barnið: „Ég veit hvernig maður getur gert þríhyrning úr trapisu, þá þarf maður bara að setja einn þríhyrning hérna ofan á.“ Barnið sýnir síðan hvernig maður setur þríhyrning ofan á trapisu. Það heldur svo áfram og segir: „Ég veit líka hvernig maður getur gert stærra trapisu en þessa, en ég þarf bara að fá fjóra þríhyrninga. Þá verður þetta svona löng trapisa.“ Barnið setur tvo þríhyrninga á sitthvora hlið trapisunnar. Barnið segir svo allt í einu: „Hey, það er líka hægt að nota bara tvo þríhyrninga þá er hún svona aðeins styttri en samt löng!“

Í þessari sögu kemur fram hvernig barnið hefur

náð góðu valdi á lögun tvívíðra forma og áttað sig á tengslunum á milli þeirra. Barnið getur leikið sér að því að búa til ný form úr öðrum formum. Þessi þáttur er afar mikilvægur inntaksþáttur í stærðfræðinámi í leikskóla, það er að segja að börn áttu sig á því að öll heild er sett saman úr hlutum. Það má einnig sjá í þessari sögu að barnið er komið með gott vald á að prófa sig áfram og getur séð fyrir sér í huganum hvað gerist ef það framkvæmir ákveðna hluti. Barnið áttar sig á því að ef það getur bætt einum þríhyrningi við þá ætti það að geta bætt öðrum við og sýnir þannig einnig fram á vald á vinnubrögðum. Það má því segja að barnið sé komið með gott vald á grunnhugmyndum stærðfræðinnar varðandi skoðun og greiningu forma.

Barnið sýnir að það hefur náð góðu valdi á heiti formanna en sýnir einnig að það gerir sér grein fyrir eiginleikum þeirra. Barnið kys að nota kubbana til þess að sýna eiginleika formanna frekar en að lýsa þeim. Hér má því sjá hversu mikilvægt er að börn hafi aðgang að góðum námsgögnum og að kennarinn taki eftir því hvernig börn vinna með slíkt efni. En með því geta kennarar öðlast heilmikinn skilning á stærðfræðilegri þekkingu barnanna, þar sem þeim reynist auðveldara að framkvæma ýmsa hluti frekar en að tala um þá eða útskýra.

Saga um mælingar

Í fatakleanum þegar við vorum að klæða okkur í útiföt fyrir útiveru, skapaðist eftirfarandi umræða:

Ég segi: „Krakkar, við verðum að klæða okkur vel, það er mikið frost úti.“

Barn 1 svarar: „Já, það er alveg 100 metra frost!“

Ég: „Við mælum nú frost ekki í metrum. Vitið þið í hverju við mælum frost?“

Barn 2: „Þegar það er frost notum við mínus. Sá það í sjónvarpinu!“

Ég: „Já það er rétt við tölum um að þegar það er frost

Þá séu mínus gráður úti og þá er settur mínus fyrir framan tölurnar. En við notum metra þegar við erum til dæmis að mæla hversu há við erum, eða hversu langt við hlaupum (beini athyglinni að barninu sem sagði 100 metra frost).⁶

Í þessari sögu má sjá dæmi um hvernig umhverfið og umræðan í kringum börnin hefur áhrif á hvað þau læra. Börn á þessum aldri eiga oft í erfiðleikum með að átta sig á mælieiningum og hafa jafnvel ekki þekkingu eða þroska til að vinna með þær. Það má jafnvel greina að barnið noti töluna 100 frekar en mælieininguna til þess að leggja áherslu á að það er kalt úti. Barnið veit að talan 100 er há tala og hefur það því frekari merkingu heldur en að átta sig á að nota rétta mælieiningu.



Þegar þessi umræða kom upp fannst mér mikilvægt að nýta hana til þess að beina sjónum þeirra að því að notaðar eru ólíkar mælieiningar eftir því hvaða mælieiginleiki er mældur. Það kom mér á óvart að börnin þekktu mælieiningarnar og gátu notað þær í umræðu sinni án þess þó að nota þær á réttan hátt. Barnið sagði sjálf frá því að það hefði séð það í sjónvarpinu að maður notar mínus þegar maður talar um frost og því er ljóst að umhverfið hefur mikil áhrif á þekkingu barnsins.

Af þessum sögum má sjá að börn á leikskólaaldri hafa öðlast mikla stærðfræðilega hæfni. Þau eru oft á tíðum komin mun lengra en við gerum okkur grein fyrir. Af þessum sögum má sjá að stærðfræðipækking er börnum eðlislæg og nýta þau sér hana í öllu starfi leikskólans, hvort sem það er í leik, skipulögðu starfi eða daglegum vangaveltum. Með þessu verkefni tel ég mig einnig hafa sýnt fram á mikilvægi þess að þeir sem vinna með börnum hlusti eftir röddum barna til þess að geta veitt þeim tækifæri til að þróa með sér enn frekara nám og þroska. Lesa má meistaraverkefnið mitt í heild sinni á vefslóðinni: <http://hdl.handle.net/1946/32468>

Valdís Ingimarsdóttir
leikskólakennari

Heimildir:

Copley, J.V. (2010). *The Young Child and Mathematics* (2. útgáfa). Washington, D.C.: NAEYC.

Fosse, T. (2012). *Forord*. Í T. Fosse (ritstjóri). *Rom for matematikk – i barnehagen* (bls.5). Bergen: Caspar forlag.

Lossius, M. H. (2012). *Bildenes betydning – for små barn*. Í T. Fosse (ritstjóri). *Rom for matematikk – i barnehagen* (bls.7-21). Bergen: Caspar forlag.

Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Fisher, M. E., Schack, E. O., Tassell, J. og Yoder, M. (2014). *Professional noticing: developing responsive mathematics teaching*. *Teaching Children Mathematics*, 21(5), 295-303.

Laugardaginn 10. nóvember 2018 fór fram í Hörðuvallaskóla aðalfundur Flatar ásamt námstefnu. Að fundinum loknum hélt Bjarnheiður Kristinsdóttir doktorsnemi í stærðfræðimenntun erindi og vinnusmiðju út frá borðspili sem reynir á rökhusun eins og sagði í auglýsingu samtakanna. Síðan kom á daginn að borðspilið sem um ræddi var fjölskylduspilið SET sem kallast Þrenna á íslensku. Það má vinna með SET bæði í tvívídd og þrívídd.

Til að byrja með var unnið með spilið í tvívídd en það samanstendur af spjöldum með mismunandi tákmyndum eða formum. Lögð eru niður tólf spjöld og er markmiðið með spilin að koma auga á slag með þremur spjöldum sem við köllum sett eða þrennu og þurfa þau að uppfylla ákveðin skilyrði. Það er gefið til kynna með því að segja *sett*. Þá eru þau þrjú spjöld fjarlægð og ný sett í staðinn. Hvert spjald hefur fjögur einkenni sem eru litur, form, fjöldi og fylling. Innan hvers einkennis eru þrjár breytileikar eins og hér segir:

Litur: **Rauður**, **grænn**, **fjólublár**

Form: Tígullaga, bylgjulaga eða sporöskjulaga

Fjöldi: Eitt, tvö eða þrjú

Fylling: Fyllt, röndótt eða tomt

Dæmi um tólf spjöld sem lögð hafa verið á borð til að spila SET. Þátttakendur leita að þremur spjöldum sem uppfylla skilyrðin að annað hvort sé allt eins eða allt ólíkt innan hvers af fjórum eiginleikum (lit, form, fjöldi, fylling).

Til að fá sett þarf hvert einkenni um sig annað hvort að vera eins á öllum þremur spjöldunum eða ólíkt á öllum þremur spjöldunum. Um einkennið lit gildir að annað hvort þurfa formin á spjöldunum að vera öll í

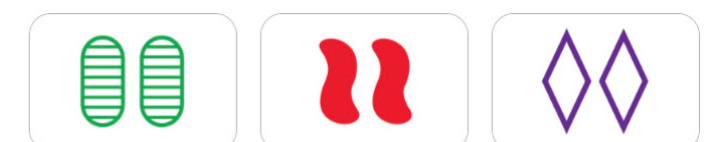
ólíkum lit eða þá að ef form á tveimur spjöldum eru með sama lit þá þurfa formin á þriðja spjaldinu að vera með eins lit og á hinum tveimur. Eins ef við skoðum formin þá þarf annað hvort að vera ólíkt form á öllum þremur spjöldunum eða ef tvö eru með sama form þá verður þriðja spjaldið líka að hafa sama form og hin tvö. Á sama hátt gildir að fjöldinn þarf að vera sá sami eða ólíkur á öllum þremur spjöldunum og það sama á við um fyllinguna. Fyrir hvert sett fær leikmaður eitt stig en ef honum verður á að segja sett þegar það reynist rangt þá missir hann eitt stig. Það skiptir því miklu máli að vera viss í sinni sök.



Dæmi um sett þar sem litur, fjöldi og fylling er eins á öllum spjöldunum en formið ólíkt.



Dæmi um sett þar formið er eins á öllum spjöldunum en litur, fjöldi og fylling ólík.



Dæmi um sett þar sem allt er ólíkt nema fjöldinn sem er sá sami á öllum spjöldunum.



Dæmi um spjöld sem ekki mynda sett. Þau hafa ólíka liti og sama fjölda forma sem er leyfilegt. Hins vegar kemur tígullinn fyrir tvisvar sinnum og tvö spjaldanna eru með samskonar fyllingu sem uppfyllir ekki regluna um að allt sé eins eða öðruvísi innan hvers einkennis.

Þegar Bjarnheiður var búin að fara í gegnum leikreglurnar var hafist handa við spilamenskuna. Passað var upp á að í hverjum hópi væri einhver sem þekkti spilið og gekk það auðveldlega eftir. Eftir smá upphitun kepptu þátttakendur innbyrðis í hverjum hópi fyrir sig þar sem þeir voru hvattir til að rökstyðja hvert sett sem þeir komu auga á.



Spilað af áhuga.

Eins og máltækið segir þá skapar æfingin meistarann og átti það einnig við um spilamenskuna. Þegar þátttakendur voru komnir vel inn í gang mála þá var kominn tími til að taka spilið lengra og yfirfæra í þriðju víddina. Hvernig mætti hanna spilið þannig að það væri á formi þrívíðra hluta en ekki tvívíðra spjalda? Hvaða einkenni myndum við þá kjósa að nota? Hópnum var sagt að hugsa um einkennin fjögur úr tvívíða spilinu og íhuga hvort þau myndu ganga upp í þrívídd eða hvort þyrfti að breyta þeim. Nýta mátti

gagntækar varpanir og átti hver og einn að hugleiða það með sjálfum sér. Næstu tíu mínúturnar eða svo ræddu þátttakendur hugmyndir sínar tveir og tveir saman og síðan í hópnum sem skráðu þær upp á töflur.

Þessar hugmyndir voru svo ræddar fram og til baka og rætt um hvernig útfæra mætti hugmyndirnar í efni eða með þrívíddarprentara. Bjarnheiður kom með dæmi um SET sem nemendur í Kanada hönnuðu í þrívíddarham GeoGebra og prentuðu síðan í þrívíddarprentara. Útfærsla kanadíska nemendanna nýtti þrjú mismunandi liti (rautt, grænt, blátt), þrjú form (tígul, bylgju, sporöskju), þrjár þykktir (þunnt, miðlungs, þykkt) og mismunandi fjölda gata gegnum formin (eitt, tvö eða þrjú göt). Þannig höfðu þessir þrívíðu hlutir fjóra eiginleika hver og þjónuðu þannig sama tilgangi og spjöldin. Einnig voru sýndar myndir af fleiri útfærslum kanadíska nemendanna og rætt nánar um útfærslu hugmyndanna sem komu fram í Hörðuvallaskóla.

Nú tók við greiningarvinna í þeim tilgangi að finna út hvernig þessi form gátu myndað sett með sambærilegum hætti og spjöldin höfðu gert og er óhætt að segja að þátttakendur hafi dottið inn í verkefnið.



Leitin að setti í þrívídd.

Bjarnheiður kynnti fyrir hópnum hvernig vinna má með nemendum að gerð forma í þrívídd og nefndi

til sögunnar nokkur verkfæri. Má þar nefna forritin GeoGebra og TinkerCad ásamt þrívíddarprenturum. Hún sagði frá því að það væri tilvalið að vinna svona verkefni í samvinnu við Fab Lab sem er stytting á enska heitinu „fabrication laboratory“ og er stundum kölluð stafræn smiðja á íslensku. Slíkar smiðjur eru staðsettar á nokkrum stöðum á landinu og þar geta einstaklingar og frumkvöðlar látið hugmyndir sínar verða að veruleika eins og segir á vefsíðu Fab Lab <https://www.fablab.is/>



Bjarnheiður með útfærslu kanadískra nemenda á spilinu Quarto. Þar reyndi meðal annars á að finna miðju þríhyrnings (vitneskja sem þau höfðu ekki fyrir fram).

Spilið SET er vel til þess fallið að unnið sé með það í víðara stærðfræðilegu samhengi og tengt við hina ýmsu inntakspætti stærðfræðinnar. Bjarnheiður nefndi sem dæmi að tilvalið væri að láta nemendur varpa fram spurningum og leita svo svara við þeim.

Hér eru nokkur dæmi um spurningar:

- Hversu mörg eru spjöldin?
- Hvernig taldirðu þau?
- Hversu mörg mismunandi sett eru til?
- Hverjar eru líkurnar á því að fá...?
- Ef tvö spjöld eru gefin, hversu mörg spjöld úr stöknum passa þá til að mynda sett með þeim?

Ef þið hafið áhuga á að skoða nánar borðspilið SET (Þrennu) í tengslum við stærðfræði þá gæti eftirfarandi efni verið gagnlegt:

Grein um SET og stærðfræði sem tengist spilinu <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf>

Blogg um líkindafræði tengda SET <https://henrikwarne.com/2011/09/30/set-probabilities-revisited/>

Flækjustig spilsins SET <http://pbg.cs.illinois.edu/papers/set.pdf>

Hvaða tækni nota SET leikmenn sem hafa náð góðum árangri? <https://boardgames.stackexchange.com/questions/7648/what-techniques-do-high-level-set-players-use-when-looking-at-a-layout-of-cards/7691>

Þess má geta að borðspilið SET (Þrenna) fæst hér á landi með íslenskum leiðbeiningum. Spilið er ætlað leikmönnum 6 ára og eldri og 2-20 geta spilað það á sama tíma en spilatíminn er áætlaður um 30 mínútur. Það er einnig áhugavert að hönnuður spilsins, Marsha J. Falco, þróaði spilið SET® árið 1974 meðan hún stundaði erfðarannsóknir í Cambridge á Englandi. Hugmyndin að SET-leiknum kviknaði þegar Marsha var að reyna að skilja hvort flogaveiki í þýskum fjárhundum væri arfgeng. Til að fylgjast með einstökum eiginleikum hundanna bjó Marsha til skráarkort með blokkum af erfðaupplýsingum fyrir hvern hund. Þetta má lesa nánar um á slóðinni: <https://www.setgame.com/founder-inventor>

Spilið SET (Þrenna) hefur unnið til fjölda margra verðlauna sem besta spilið eins og sjá má á www.setgame.com. Það má nálgast spilið á stafrænu formi og jafnvel taka daglegum áskorunum á slóðinni: <https://www.setgame.com/set/puzzle>

Margrét S. Björnsdóttir
grunnskólakennari og aðjúnkt á Menntaúsindasviði HÍ

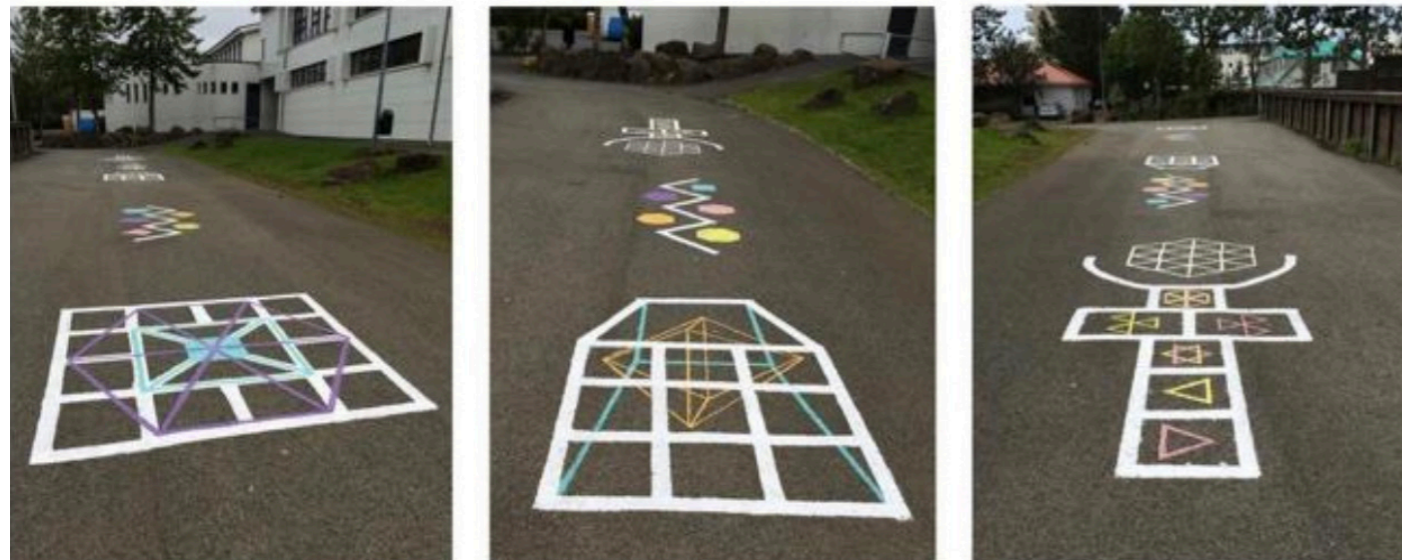
ÓRAVÍDDIR

Ferðalag um undraheima stærðfræðinnar

Námsefnið Óravíddir er lokaverkefni til meistaraþrófs í listkennslu frá Listaháskóla Íslands í september 2019. Það fjallar um rúmfræði og samanstendur af málverki á gangstétt, smáforriti og verklegum æfingum. Málverkið er Parísarhopp í grunninn og hægt er að nota það sem slíkt. Eitt verkefni námsefnisins er einmitt að búa sér til hoppreglur út frá marghyrningunum í málverkinu, eins og sjá má á skilti sem mun standa við málverkið (mynd 9). Í smáforritinu, sem nálgast má á oraviddir.is, er eftirlíking af Parísarhoppinu, en virkni forritsins felst í því að sjá málverkið lifna við. Smáforritið er leiðarvísir um verkið, en æfingarnar leysast ekki rafrænt, heldur í samtali og samvinnu í leikjum og föndri.

Bakgrunnur minn er í myndlist en ég hef enga formlega menntun í stærðfræði fyrir utan það sem ég lærði í menntaskóla eða af yndislestri og youtube

myndböndum síðan þá. Málverkahluti og grunnur Óravídda varð til í Skapandi sumarstörfum í Kópavogi árið 2016, sem ég sótti um með þá hugmynd að skoða tengsl raunvísinda og myndlistar. Ég fékk tvo mánuði til þess að grúska í sjónrænum og rituðum heimildum og bjó til nokkur listaverk út frá þeim tengingum sem ég greindi milli vísinda og lista. Sjá má sjónræna rannsóknarvinnu á mynd 5 og tillögu að vegglistaverki á Kópavogsskóla á mynd 6, þar sem ýmsar vísindalegar skýringarmyndir renna saman. Önnur listaverk sem urðu til þetta sumar má sjá á mynd 7 og 8. Þau eru innblásin af rúmfræðipælingum Buckminster Fuller, Einars Þorsteins og Platon. Að lokum varð til stærðfræðilegt málverk innan um Parísarhopp á leikvelli Kópavogsskóla (mynd 1 og 2). Verkið felur í sér sjónræna rúmfræðirökleiðslu en sú rökleiðsla vall upp úr mér nánast ósjálfrátt og yfir á skjá í myndvinnsluforriti.



Mynd 1: Málverk og Parísarhopp Óravídda á skólalóð Kópavogsskóla.



Mynd 2: Tölvuteiknuð loftmynd af Parísarhoppi/málverki.

Óravíddir



Ferðalag um undraheima stærðfræðinnar

SJÓNÆNT, GAGNVIRKT STÆRÐFRÆÐINÁMSEFNI

[SPILA NÚNA](#)

Mynd 3: Smáforritið Óravíddir má nálgast á vefsíðunni www.oraviddir.is

Meistaraverkefnið gengur út á að gera málverkið aðgengilegt öðrum, sem leik- og kennslutæki. Æfingar Óravídda eru hannaðar með hugsmíðahyggju að leiðarljósi og eru hugmyndir Jean Piaget, Lev Vygotsky og Jerome Bruner lagðar til grundvallar. Í stuttu máli þá nýtti ég mér rannsóknir Piaget um þroskastig barna, lýsingar Vygotsky á sambandi kennara og nemenda og þá tillögu Bruner að grunnatriði allra greina megi kenna hverjum sem er á hvaða aldri sem er, svo lengi sem efnið er kennt á viðeigandi hátt. Ég nýtti mér einnig líkan sem kennt er við hollensk hjón að nafni Van Hiele. Van Hiele líkanið lýsir þroskastigum barna sérstaklega í sambandi við rúmfræðikennslu, frá fyrstu stigum þar sem börn geta borið kennsl á ólík form, í miðstig þar sem nemendur geta flokkað form eftir eiginleikum og á efstu stig þar sem nemendur geta áttað sig á abstrakt reglum um rúmfræði.

Í doktorsritgerð sinni lýsir Dina van Hiele æfingum sem hún lagði fyrir nemendur sína, en þær byggja oft á áþreifanlegum verkfærum, tilraunum og opnum spurningum. Þetta gerði hún mjög meðvitað og markvisst, í þeirri trú að það væri best fyrir þroska nemenda að virkja bæði huga og hönd:

Á fyrsta stigi rúmfræðikennslu er virkni nemandans í brennipunkti. Spurningin „Hvernig skal ég búa eitthvað til?“ er mikilvæg. Þetta gerir huganum og höndinni kleift að fást samtímis við lærdómsferlið (van Hiele, 1954/1984, 26).

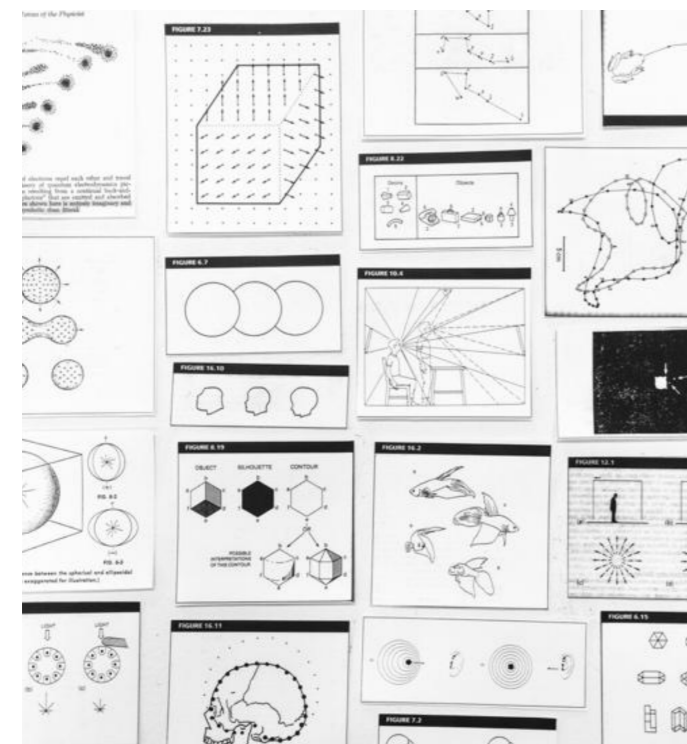
Kennslan sem Dina lýsir líkist tilraunastofu eða listasmiðju, þar sem nemendur fást við ólíkar spurningar í kringum sameiginlegt þema, til dæmis með því að klippa út mismunandi marghyrninga og skoða hvernig hægt er að raða þeim saman á fleti eða í þrívídd (van Hiele, 1954/1984, 26). Þessi spurning sem Dina van Hiele spyr sig og nemendur sína, hvernig á ég að búa eitthvað til?, virkar fyrir mér sem mjög áhugaverð og skapandi nálgun að stærðfræði, en er annars nokkuð sjálfögð spurning í listgreinakennslu. Því vil ég draga fram nokkra eiginleika listkennslu sem stærðfræðikennslan fær að láni við það að spyrja þessarar spurningar. Á myndlistarnámskeiði er hver nemandi sinn eigin listamaður og engin tvö listaverk eins. Það er ef til vill ákveðið þema eða sami efniviður yfir allan bekkinn, en markmið kennarans er að aðstoða hvern nemanda á sinni vegferð að ólíkum niðurstöðum. Áhugi nemenda leiðir ferlið áfram, en kennarinn stígur inn með ábendingar þegar tækifæri gefst til þess að kenna.



Mynd 4: Upphafsskjár smáforritsins sjónræn rannsókn.

Í grein sinni *A Mathematician's Lament* (2002) notar stærðfræðinginn Paul Lockart listkennslu sem fyrirmynd að stærðfræðikennslu. Lockhart notar þessa myndlíkingu til þess að útskýra að hann vill ekki útiloka allan reikning eða praktískar æfingar úr stærðfræðikennslu, heldur bjóða upp

á tækifæri til þess að læra að reikna í áhugaverðu samhengi á forsendum nemenda. Hann leggur til að leyfa nemendum að gera uppgötvanir. Gefa skal nemendum góða áskorun, leyfa þeim að kljást við hana og sjá hvers konar lausnir þau finna.



Mynd 5: Sjónræn rannsókn.

Ekki fyrr en þau eru alveg föst skal gefa þeim mögulega aðferð, en ekki allt svarið (Lockhart, 2008, 42). Lockhart gerir ekki lítið úr því að það sé erfitt að kenna stærðfræði. Tillaga hans, að líta á stærðfræði sem list, undirstrikar einmitt að stærðfræði er erfið, en eins og önnur listsköpun þá er alvöru stærðfræði oft hægunnin hugmyndavinna.

Við hönnun Óravídda stefndi ég að því að hafa skapandi vinnu í fyrirrúmi. Eitt verkefni Óravídda felur í sér að nemendur læra að teikna jafnhliða þríhyrning með hringfara. Það er ekki nýtt að kenna nemendum þessa aðferð, til dæmis má finna heilan kafla um notkun hringfara og sögu þeirra í fyrsta hefti *Átta til tíu* (Guðbjörg Pálsdóttir & Guðný H. Gunnarsdóttir, 2006, 5-19), en sú námsbókaröð hefur verið notuð í kennslu á unglingsstigi á Íslandi. Það sem *Óravíddir* bætir við eru útivist, leikur og samtal. Í *Óravíddum* er lagt til að búa til hringfara úr krít og bandi, og nota hann til þess að teikna hringi og jafnhliða hyrninga (mynd 9). Nemendur vinna tveir eða fleiri saman en notkun hringfarans krefst samvinnu og allur líkaminn virkjust við að teikna stórt. Hægt er hvetja nemendur

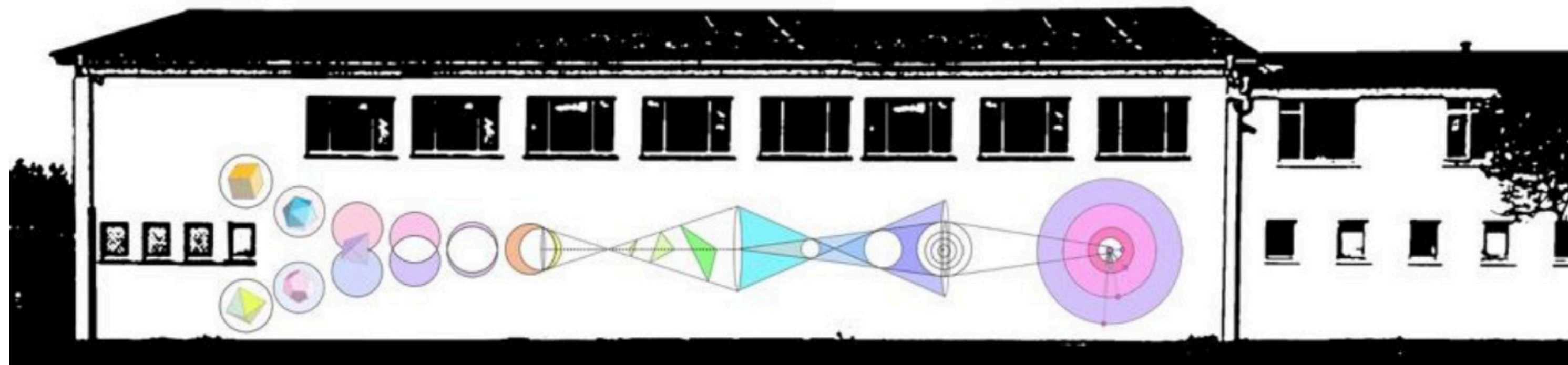
til að nýta aðferðirnar til þess að teikna krítarlistaverk, gera tilraunir út frá opnun spurningum, bæta við Parísarhoppið eða búa til nýtt Parísarhopp.



Mynd 7: Kúluhús innblásið af Buckminster Fuller og Einari.

Við prófun námsefnisins í mars í Kópavogsskóla, og síðar í júní í Háskóla unga fólksins, urðu til áhugaverðar uppgötvanir í gegnum fönður og samtal.

Sett var fyrir að teikna og klippa út marghyrninga, ýmist með hringfara eða með því að teikna eftir sniðmáti, og prófa að raða saman formum á fleti og með því að líma þau saman. Við kennararnir gengum á milli og spegluðum það sem við sáum, spurðum út í áhuga eða markmið þeirra og stungum upp á næsta skrefi ef þeir voru fastir. Þarna hafði ég í huga að leiða nemendur að því að gera uppgötvanir sjálfir. Einn hópur ætlaði að reyna að búa til margflötung úr reglulegum sexhyrningum. Í stað þess að segja þeim strax að jafnhliða sexhyrningar raðist saman í flöt en ekki margflötung, þá sagði ég bara „En áhugaverð hugmynd! Ég hlakka til að sjá hvað kemur út!“. Eftir smá stund kom í ljós að dæmið gekk ekki upp, það þurfti að sveigja sexhyrningana eða láta hliðarnar skerast til að þeir lyftist upp af borðinu. Við þetta og fleiri tækifæri ávarpaði ég allan hópinn, sýndi tilraunina og spurði hvað þeim fannst. Í umræðunni kom í ljós að ekki geta allir marghyrningar raðast upp í þrívídd, heldur mynda sumir flöt. Hvaða fleiri marghyrningar eru þannig að þeir raðast í flöt? Úr hvaða marghyrningum er hægt að búa til margflötung og þá hvaða marghyrning sem er? Sexhyrningahópurinn sá svo að hægt var að



Mynd 6: Tillaga að vegglistaverki á Kópavogsskóla.

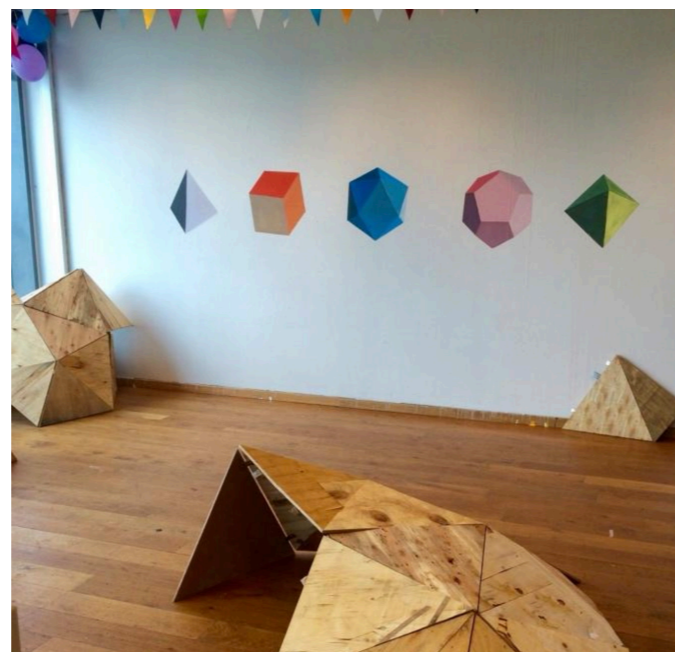
raða þríhyrningum inn á milli sexhyrninganna, og fá þannig lokaðan margflötung.

Skapandi stærðfræði Einars Þorsteins

Fyrirmynd mín að skapandi nálgun að stærðfræði kemur frá Einari Þorsteini Ásgeirssyni. Einar Þorsteinn var hönnuður, arkitekt og hugsuður sem vann mikið með stærðfræði, sérstaklega rúmfræði. Hann fæddist árið 1942 og lést 2015. Stuttu áður en hann lést gaf hann öll verk sín til Hönnunarsafns Íslands. Safnið hélt í kjölfarið sýningu, eða í raun opið skráningarverkefni, þar sem tekið var úr kössum og allir munir settir fram til sýnis jafnóðum á meðan safnfræðingar rannsökuðu verkin. Ég fékk tækifæri til þess að vinna á safninu í vor við að skoða verkin hans með stærðfræði sérstaklega í huga. Einar hannaði nokkur mjög merkileg hús, oft með sjálfbærni að leiðarljósi, en ekki fóru öll húsin hans í byggingu. Síðar meir titlaði hann sig frekar sem hönnuð en arkitekt, en verkin sem til eru eftir hann eru mjög fjölbreytt, allt frá málverkum og skúlptúrum yfir í leikföng, samanbrjótanleg húsgögn og tarot spil. Hann skrifaði einnig mikið; ritgerðir, fræðibækur og skáldverk. Frá um aldamótin 2000 vann Einar hjá Ólafi Elíassyni listamanni sem sjálfstæður rannsakandi. Þeir unnu saman að mörgum verkum, en margflötungurinn Gullinfang sem hjúpur Hörpunnar er myndaður úr, er hönnun og uppötvun Einars.

Uppúr kössunum hans Einars komu ótal pappírslíkön af mismunandi margflötungum, en þau voru hluti af rannsóknum hans á stærðfræði. Ég fjalla um verk Einars vegna þess að það skiptir mig máli að stærðfræði sé ekki stöðnuð grein. Mér finnst jafnmerkilegt hvað stærðfræðin er gömul og hvað hún er ný. Einar skoðaði þúsunda ára gamlar frumreglur rúmfræðinnar frá Evklíð en vildi samt finna nýjar samsetningar forma og það gerði hann. Rannsóknir hans beina sjónum meðal annars að fimmfaldri samhverfu, mynstrum sem hægt er að spegla um fimm ása. Þesskonar mynstur voru lítið rannsökuð fram að níunda áratug síðustu aldar,

þar til efnisfræðingurinn Dan Schechtman uppötvaði kristalsmyndun sem raðaði sér í fimmfalda samhverfu. Einar Þorsteinn kannaði þetta fyrirbæri nánar og bjó til ýmis form sem hafa fimmfalda samhverfu, þar með talið Gullinfang Hörpunnar. Myndir og skrif um þessa og fleiri tilraunir hans eru að finna í bók hans *Til íbúa rýmisins almennt og til þeirra rýmistengdu sérdeilis* (2003). Rannsóknir sínar vann hann í höndunum, með því að byggja rúmfræðileg líkön. Safnfræðingar á Hönnunarsafninu segja gjarnan þá sögu að þegar Einar vann hjá Ólafi, fór hann í kapp við annan hönnuð við að smíða líkan af stórum flóknum skúlptúr sem átti að fara í framleiðslu. Keppinautur hans vann í tölvu en Einar kaus að reikna, teikna og smíða líkan í höndunum. Einar vann þessa keppni, en hann trúði sérstaklega á það að vinna í höndunum með stærðfræði, að vinna með stærðir bókstaflega í rúmi með pappírsklippum.



Mynd 8: Platónsku margflötungarnir.

Árið 1977 samdi Einar námsefni fyrir „ungt fólk á öllum aldri“ sem heitir Barnaleikur. Bókin fjallar um reglulega marghyrninga og margflötungana sem þeir mynda. Heftinu er fyrst og fremst ætlað að vera leiktæki til formskynjunar og til æfinga í rökrænni hugsun en

Mynd 9: Plakat með leiðbeiningum um krítar hringfara.

„í leiðinni tengist það vissum köflum stærðfræðinnar,“ samkvæmt því sem stendur á kápunni. Með bókinni fylgja blöð sem hægt er að klippa út og líma saman til að mynda mismunandi margflötunga og samsetningar þeirra. Þessi bók varð ein helsta fyrirmynd Óravídda, af eftirfarandi ástæðum:

- Verkefnin fela í sér áþreifanleg efni.
- Myndirnar eru fallegar og skýrar.
- Textarnir eru einfaldir, en ekki of einfaldaðir.
- Tónninn í bókinni ber virðingu fyrir lesandanum og efninu, leggur áherslu á styrkleika barnsins, óheftum áhuga og leikgleði þess.

„Þetta er bók fyrir einu sönnu vísindamennina — börnin — og þá, sem hugsa um hlutina með sama hugarfari og þau,“ segir Buckminster Fuller í innganginum, en hann var bandarískur arkitekt, hönnuður og

hugsuður af sama meiddi og Einar. Að mati Fuller er rúmfræði það mikilvæg að framtíð jarðarinnar velti á þekkingu fólks á henni. Hann gagnrýndi „núverandi efnahagsmenningu“ (1977) og fullyrkti að það sé „tæknilega framkvæmanlegt“ að ná fram „stöðugu[m] allsnægtum fyrir alla jarðarbúa innan tíu ára“. Hann taldi það mögulegt og nauðsynlegt, að hætta að nota jarðefnaeldsneyti og kjarnorku, því orka sólarinnar myndi duga. „Allsnægtir fyrir alla“ á að vera möguleiki án þess að skaða jörðina — „Geimskipið Jörð“ eins og Fuller kallaði hana. Hann lagði til að til þess þurfi þrjú skilyrði: 1) að meirihluti jarðarbúa geri sér grein fyrir því að umhverfisvænar allsnægtir fyrir alla séu tæknilega mögulegar, 2) að meirihluti jarðarbúa viðurkenni að allir geti fengið jafnan hlut af allsnægtunum og 3) að meirihluti jarðarbúa skilji og beri traust til vísinda og tækni (Fuller, 1977, 1).



Mynd 10: Jafnhliða þríhyrningur teiknaður með krít.



Mynd 11: Börn æfa sig að nota hringfara úr krít og bandi.

En hvað hafa þessi skilaboð með rúmfræði að gera? Vandamálið er, samkvæmt Fuller, að aðeins lítill hluti jarðarbúa skilur vísindi. Hann fagnaði því að það væri að eiga sér stað bylting á sviði menntunar, að rúmfræði væri kennd með áþreifanlegu námsefni og með hana gerðar tilraunir. Hann kallaði þessa rúmfræði orkurúmfræði (e. Synergetics), og taldi að Barnaleikur Einars Þorsteins væri þar til fyrirmyndar. „Áþreifanlegir hlutir í samræmi við lögmál náttúrunnar eru vel til þess fallnir að opinbera fyrir opnum huga mikil vísindaleg sannindi“ sagði hann og „með tímanum mun skoðun orkurúmfræðinnar auka almennan skilning á vísindum og tækni og þar með byggja sjálfkrafa upp þá hæfni til réttra framkvæmda, sem er nauðsynleg til þess að viðhalda mannlegu lífi á þessari plánetu“ (Fuller, 1977, 1).



Mynd 12: Sýnishorn af líkönum Einars til sýnis á Hönnunarsafni Íslands.

Jóhanna Ásgeirsdóttir

Heimildaskrá

- Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Einar Þorsteinn Ásgeirsson og Olafur Eliasson (2003). *Til íbúa rýmisins almennt og til þeirra rýmistengdu sérdeilis*. (Ch. Kintisch, ritstj.). Reykjavík : *Life after Birth*.
- Fuys, D., Geddes, D. og Tischler, R. (ritstj.) (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York: Brooklyn Coll.
- Fuller, Buckminster (1977). *Formáli R. Buckminster Fuller*. Í *Barnaleikur*. Reykjavík: Bókamiðstöðin.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir (2006). *Átta til tíu: stærðfræði 1*. (3. útg.) (Hafðís Finnbogadóttir, ritstj.). Reykjavík: Námsgagnastofnun.
- Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament*. New York, NY: Bellevue Literary Press.
- Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children* (Margaret Cook þýddi). New York: International Universities Press.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Interaction between Learning and Development*. Í Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. og Souberman, E. (ritstj.) (1978). *L.S. Vygotsky: Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (bls. 79-91). Cambridge, London: Harvard University
- van Hiele-Geldof, Dina. (1984). *The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School*. Doktorsritgerð. University of Utrecht. Í Fuys, D., Geddes, D. og Tischler, R. (ritstj.) (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (bls. 1-183). New York: Brooklyn Coll. (Upphaflega gefið út 1957).

SÖGUHORNIN

Um og upp úr aldamótunum 1900 var hefðbundin evklíðsk rúmfræði nokkuð umdeild á ýmsum vettvangi. Hún var talin fylgja stirðnuðu mynstri skilgreininga, setninga og sannana og sannanatæknin þótti stirðnuð.

Árið 1905 lét Felix Klein, prófessor í Göttingen, til sín taka við endurskoðun námsefnis í stærðfræði í menntaskólum. Endurskoðunin er kennd við borgina Merano á Ítalíu. Þar er mælt með því að tekin verði upp kennsla um föll og örsæðarreikning, þ.e. heildun og deildun (diffur og tegrun). Áhersla yrði lögð á að rækta fallahugsun. Fallahugsun er sá eiginleiki hugarins að hugsa um breytingar, breytileika og hreyfingu. Ef einblínt væri á fallahugsun ætti hún að styrkja rúmfræðikennslu.

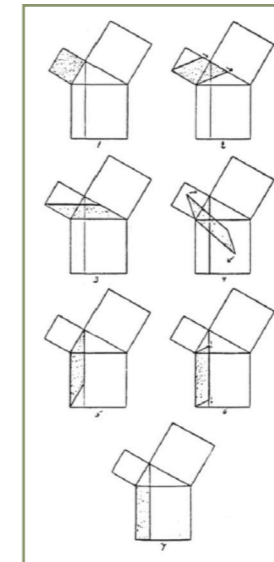
Þetta gekk eftir og nú er kennt um föll, heildun og deildun í öllum framhaldsskólum. Flutningar eða varpanir, þ.e. speglun, snúningur og hliðrun ásamt stríkkun, hafa líka hlotið nokkurn sess, en minna hefur verið um kynningu á hagnýtingu þessara þátta.

Árið 1959 var haldið frægt málþing um nýja hugsun um skólastærðfræði í Royaumont í Frakklandi þar sem áréttað var að endurnýja þyrfti rúmfræðikennslu. Kenna mætti rúmfræði með línulegri algebru og flutningarúmfræði sem mætti setja fram með frumsendum og leiða fram setningar út frá þeim. Mikilvægt væri að byrja á hinu einfalda: speglun, snúningi og hliðrun í tvívídd og skapa þannig fótfestu í raunveruleikanum.

Gustave Choquet, gestafyrirlesari á málþinginu í Royaumont, setti fram nýtt frumsendukerfi um rúmfræði með fjórum sterkum frumsendum, hverri í nokkrum liðum. Ein þeirra, umbrotsfrumsendan, gerði mögulegt að setja fram undirstöðuatriði í rúmfræði með flutningum; speglun, hliðrun og snúningi. Stærðfræðingum hafði þótt skorta á formfestu í evklíðskri rúmfræði þar sem ekki var ljóst hvernig væri hægt að flytja myndir, nokkuð sem

umbrotsfrumsendan bætti úr.

Menn hófu að semja námsefni í þessum anda. Þekkt er School Mathematics Project, SMP, sem byrjað var að semja í Englandi árið 1961. Bryan Twaites, sem var í forystu fyrir verkefninu, sagði að stærðfræði eins og hún hefði verið kennd hefði lengi verið stöðnuð og að þáverandi námsefni væri úr öllu samhengi við alla hagnýtingu í heiminum og tölvubyltinguna sem væri á næstu grösum. Samt fór það svo að SMP-námsefnið leiddist út í fræðilegar hugleiðingar um grúpur, fremur en að leggja áherslu á breytileika og hreyfingu. Tækin og tæknina skorti, en þegar í byrjun tuttugustu aldar voru menn þó að leitast við að tákna slíkt með röðum teikninga.



Myndin hér til hliðar er frá árinu 1913. Hún sýnir sönnun á Pýþagórasarreglunni þar sem sýnt er fram á að summa stærða litlu ferninganna út frá skammhliðunum í rétthyrndum þríhyrningi er jöfn stærð ferningsins út frá langhliðinni. Til er margverðlaunað myndband eftir Tom Apostol frá 1988 sem sýnir hið sama með hreyfimynd. Nú ættu nemendur að geta gert hið sama sjálfir, til dæmis með GeoGebru. Bryan Twaites reyndist sannspár. Tölvugrafík, þar sem hægt er

að gera ótrúlegustu hluti, byggist á flutningum og vörpunum.

Kennarar sem töluðu í Royaumont árið 1959 mæltu með að byrja á hinu einfalda. Síðan mætti halda upp í efri víddir. Enn er línuleg algebra þó gjarnan kennd byrjendum á fræðilegan hátt þar sem byrjað er á $n \times n$ -víddum fylkjum og síðan haldið niður í þrívídd og tvívídd. Óskandi væri að nemendur í framhaldsskólum fengju námsefni í hendur sem veittu þeim vald á hinn öflugum tölvugrafík. Jafnvel háskólanemar gætu hagnast á að byrjað væri á einföldum hlutum og þeir síðan leiddir í framhaldi af því inn í flókinn heim óhlutbundinna fræða.

Kristín Bjarnadóttir, Prófessor emerita

VINNUSTOFA PETER LILJEDAHL

Hugsandi skólastofa

Rannsóknarstofa um stærðfræðimenntun og Flötur stóðu saman að vinnustofu fyrir stærðfræðikennara á öllum aldurstigum dagana 19. – 20. júní 2019. Vinnustofan var haldin í húsnæði Menntavísindasviðs HÍ og voru þátttakendur 35 talsins úr grunnskólum, framhaldsskólum og háskólum. Vinnustofuna hélt Peter Liljedahl og var viðfangsefnið hugsandiskólastofa. Í síðasta tölublaði Flatarmála skrifaði Ingólfur Gíslason greinina *Hvatt til hugsunar í stærðfræði* þar sem hann fjallar um meginhugmyndir Peter um hvernig megi stuðla að meiri hugsun og umræðum í stærðfræðinámi.

Peter Liljedahl er prófessor í stærðfræðimenntun við Simon Fraser University í Vancouver í Kanada. Hann tekur virkan þátt í starfi ýmissa alþjóðlegra stærðfræðisamtaka og er í ritstjórn nokkurra tímarita um stærðfræðimenntun. Hann er virkur í skrifum og heldur fyrirlestra, námskeið og vinnustofur um allan heim. Meginrannsóknarsvið hans eru mörg, m.a. sköpun og innsæi í stærðfræðikennslu og –námi, viðhorf og starfsþróun. Peter vinnur einnig með skólum í Kanada að þróun stærðfræðikennslu. Það var því mikill fengur að fá hann til landsins til að halda vinnustofu byggða á hugmyndum sínum um hugsandi skólastofu. Peter heldur úti lifandi heimasíðu

(<http://www.peterliljedahl.com/teachers>). Þar má finna glærur hans frá vinnustofunni á Íslandi ásamt fjölbreyttu efni fyrir kennara, meðal annars verkefni til að nota í kennslu.

Peter leggur áherslu á breytta nálgun í kennslu og vann í vinnustofunni út frá fjórtán atriðum.

Tækifæri til hugsunar	Leið til að örva hugsun
1. Þrautir	Byrja kennslustund með góðum þrautum
2. Hvernig setjum við þrautirnar fram?	Setja fram munnlega
3. Hvernig svörum við spurningum?	Svara aðeins spurningum byggðum á hugsun
4. Skipulagning skólastofunnar	Opna skólastofuna innan frá
5. Skipting í hópa	Búa hópa til á tilviljunarkenndan hátt
6. Vinnurými nemenda	Nota lóðréttu fleti sem auðvelt er að þurrka út af
7. Sjálfstjórn	Rækta sjálfstjórn
8. Hvernig gefum við athugasemdir?	Nemendur skrá merkingarbær atriði
9. Hvernig er heimavinnan?	Nota spurningar sem gefa upplýsingar um skilning
10. Vísbendingar og útvíkkun	Hafa flæði
11. Hvernig við tengdum við saman?	Tengja alveg frá grunni
12. Leiðsagnarmat	Sýna hvar þeir eru og hvert þeir eru að fara
13. Logamat	Meta það sem þér finnst hafa gildi
14. Gefa skýrslu	Greina frá útfra gögnum

Glæra úr vinnustofu Peter Liljedahl (Guðbjörg Pálsdóttir þýddi).

Það var verðmæt reynsla að fá að taka þátt í hugsandi skólastofu, takast á við verkefnin, fylgjast með því hvernig Peter rækti kennarahlutverkið og finna hvernig maður sjálfur lærði meiri stærðfræði og víkkaði hugmyndir sínar um hvernig takast má á við stærðfræðinámi.



Á vinnustofunni glímdu kennarar þvert á aldurstig í tilviljunarkenndum þriggja manna hópum við fjölbreytt stærðfræðiverkefni. Hver þátttakandi dró spil og fann hópfélaga út frá því. Hver hópur fékk úthlutað svæði á lóðréttum fleti, ýmist við töflu eða plasthúðað veggspjald. Kennarar stóðu því þrír saman í hnapp, ræddu saman og skráðu tilraunir sínar og lausnir á lóðréttan flöt. Á þessum tveimur dögum vann hver einstaklingur því í ólíkum hópum og kynntist hugsunarhætti og nálgun margra stærðfræðikennara. Það var lærdómsríkt, bæði út frá því hve margar leiðir má fara í hugsun og líka til að minna sig á að nemendur okkar hugsa líka á ólíkan hátt. Ótrúlegt var að upplifa kraftinn sem skapaðist í skólastofunni og hve það varð auðveldara að taka virkan þátt eftir því sem verkefnunum fjölgaði.

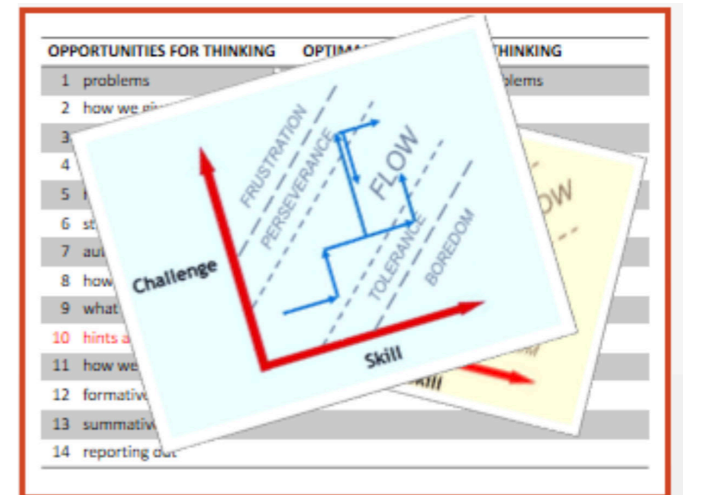


Glæra úr vinnustofu Peter Liljedahl.

Peter lagði áherslu á að hlusta og skoða sjálfur hvað skrifað var á fletina. Út frá því greindi hann hvernig hann vildi grípa inn í og styðja við hugsun og hvaða þætti væri gott að taka til umræðu. Hann valdi úr lausnaleyðum og skipulagði í hvaða röð væri mest gefandi að fjalla um þær. Þannig byggði hann upp þráð í umræður og umfjöllun um inntak viðfangsefnanna. Samantekt í lokin gaf honum líka tækifæri til að draga fram mikilvæga þætti, bæði hvað varðar inntak og vinnubrögð, þannig að allir gætu dregið lærdóm af.



Einn af kostunum við að vinna á svona opinn hátt á lóðréttum flötum er að kennarinn getur fljótt séð hvernig gengur og aðlagð verkefni að þeim hópi sem glímur við þau. Kennarinn gengur um stofuna og fylgist með vinnunni. Hann getur gefið vísbendingar, rætt um verkefnin og sett fram spurningar sem gera hverjum hópi kleift að takast á við verkefnin. Áhersla er líka lögð á að hjálpast að, horfa á hvað aðrir hópar eru að gera og nýta sér það í eigin lausnaleit. Þannig skapast möguleikar á að námið verði hæfilega ögrandi.



Glæra úr vinnustofu Peter Liljedahl.

Kennararnir á námskeiðinu tóku virkan þátt og glímdu við verkefnin af eldmóði.

Dæmi um verkefni eru:

1 Búið til fimm dæmi þar sem þið notið tölustafina 0 - 9, hvern tölustaf einu sinni. Notið reikniaðgerðirnar samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu að minnsta kosti einu sinni fyrir hverja aðgerð. Svörin eiga að vera:

- = 2
- = 2
- = 2
- = 2
- = 9

Þegar hver hópur hafði leyst þetta kom Peter með nýja ögrun. Þá gaf hann fimm önnur svör til að finna dæmi fyrir út frá sömu fyrirmælum.

2 Hugsíð ykkur tening sem settur er saman úr 27 kubbum. Yfirborð hans er málað blátt. Hve margir kubbar hafa aðeins eina hlið málaða, hve margir hafa tvær hliðar málaðar og hve margir hafa þrjár hliðar málaðar?

Skoðið fleiri stærðir teninga. Hvað ef hliðarlengdin er tveir? En ef hún er fjórir? Er einhver regla?

3 Mylla er oft spiluð og reynir þá á útsjónarsemi. En hvað eru margir möguleikar á að fá myllu ef spilað er á 3x3 fleti? Hvað gerist ef unnið er í þrívídd með rými sem er 3x3x3?

Peter tekur umræðu með einstökum hópum og hópnum í heild eftir því hvað hann telur að gagnist til að dýpka stærðfræðilega hugsun. En hann er líka að meta hvernig nemendum gengur glíman, hvaða skilningur kemur fram og hvaða stærðfræðipækning

er nýtt. Þannig greinir hann stöðu nemenda og metur á þessum grunni hvaða verkefni hentar að leggja fyrir næst.

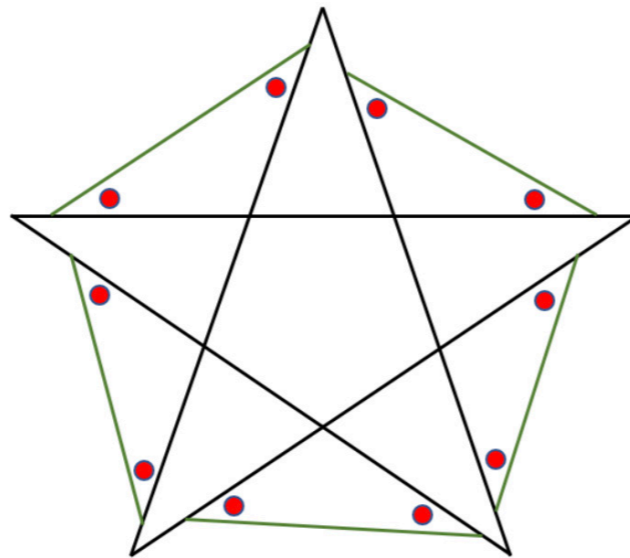
Það er mikilvægt að fá erlenda stærðfræðimenntunarfræðinga til Íslands til þess að vinna með okkur stærðfræðikennurum. Það styður við starfsþróun og þróunarstarf í skólum. Peter Liljedahl hreyfði við þátttakendum og í ýmsum skólum landsins eru kennarar nú að prófa sig áfram út frá hugmyndum hans.

Guðbjörg Pálsdóttir
dósent í stærðfræðimenntun á Menntavísindasvið HÍ

PRAUT

Hornasumma

Hver er summa hornanna sem merkt eru með rauðum punkti?



ATM

Eru samtök stærðfræðikennara (Association of Teachers of Mathematics) með aðsetur í Derby í Englandi. Árleg stærðfræðiráðstefna ATM verður haldin 6.-9. apríl 2020 í Daventry í Northamptonshire. Sérstök áhersla verður lögð á sjónræna framsetningu stærðfræðinnar (visualising). Nánari upplýsingar og skráning fer fram á vefsíðunni: <https://www.atm.org.uk/2020-Conference>

Matematikbiennalen 2020

Stærðfræðiráðstefnan Matematikbiennalen verður haldin í Växjö í Svíþjóð 16.-17. janúar 2020. Umfjöllunarefni ráðstefnunnar er sjálfbær stærðfræðikennsla. Nánari upplýsingar og skráning fer fram á vefsíðunni: <https://matematikbiennalen2020.se>

Norsma 10

Norsma 10 er norræn ráðstefna um kennslu nemenda sem eiga í erfiðleikum með stærðfræðináms. Ráðstefnan verður haldin í Reykjavík dagana 5.-6. nóvember 2020. Í tengslum við hana verður námskeiðsdagur fyrir kennara haldinn laugardaginn 7. nóvember. Námskeiðið og ráðstefnan verða auglýst betur síðar á heimasíðu Flatar og á vef Menntavísindastofnunar HÍ.

Nánari upplýsingar veita Edda Óskarsdóttir eddao@hi.is og Jónína Vala Kristinsdóttir joninav@hi.is

NORMA 20

Níunda norræna ráðstefnan um stærðfræðimenntun verður haldin 2.-5. júní 2020 í Olsó. Ráðstefnan er góður vettvangur fyrir rannsakendur, kennara og aðra sem hafa áhuga á rannsóknum og stærðfræðimenntun í norrænu samhengi til að hittast og ræða saman. Nánari upplýsingar og skráning fer fram á vefsíðunni: <https://www.uv.uio.no/ils/english/about/events/2020/norma/>



NÁMSTEFNA FLATAR 2020

13.-14. mars

Hótel Hamri í Borgarnesi

Aðaláherslan verður á hæfnimiðað stærðfræðináms og námsefni.

Elisabeth Tang og Connie Nielsen

frá danska stærðfræðisetrunu verða meðal fyrirlesara.

Nánari upplýsingar verða sendar á félagsmenn og birtast

á vefsíðu Flatar <http://ki.is/flotur/> í janúar.

TAKIÐ DAGANA FRÁ.



Ráðstefnan ICME 14 verður haldin í Shanghai í Kína dagana 12.-19. júlí 2020

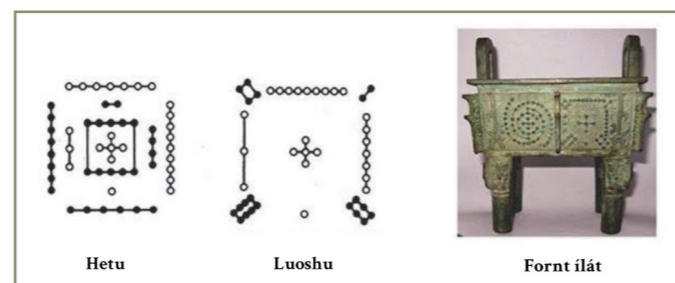
Skammstöfunin ICME stendur fyrir International Congress on Mathematical Education – alþjóðleg ráðstefna um stærðfræðimenntun og er hún haldin fjórða hvert ár víðs vegar um heiminn. Árið 2020 verður hún haldin í fjórtánda sinn og að þessu sinni í Kína. Ráðstefnan er ætluð stærðfræðikennurum í leikskólum, grunnskólum, framhaldsskólum og háskólum. Dagskráin verður fjölbreytt að venju og verður meðal annars boðið upp á fjóra aðalfyrirlestra og tvö megin pallborð, fjórir rannsóknahópar (survey teams) sem tekið hafa saman rannsóknir á afmörkuðum sviðum stærðfræðimenntunar kynna rannsóknir, nokkuð margir rannsækendur frá ýmsum löndum hafa þegið boð um að halda fyrirlestra (invited lectures), hægt er að velja um nokkra umræðuhópa (discussion groups), fjölmargar vinnustofur (workshops) verða í boði og svo verður hægt að velja milli 62 hópa (topic study groups) þar sem kynntar og ræddar verða rannsóknir á afmörkuðum sviðum eins og til dæmis rúmfræðikennsla, félags- og menningarlegir áhrifaþættir í stærðfræðinámi og stærðfræðinámi í kennaranámi svo eitthvað sé nefnt.

Allir sem hafa áhuga á stærðfræðikennslu og stærðfræðimenntun ættu að finna eitthvað við sitt hæfi á ráðstefnunni. Nánari upplýsingar og skráning er á vefsíðunni: <https://www.icme14.org>



Merki (logo) ICME 14 er úthugað hjá Kínverjum. Grunnhugmyndin kemur frá táknkortinu Hetu (The River Map) sem á uppruna sinn í Kína til forna. Almennt er litið á Hetu ásamt táknkortinu Luoshu (The Lou Writing) sem uppruna kínverskrar siðmenningar. Merkin voru túlkuð á ýmsan hátt eftir því hverjir túlkuðu og á hvaða tímabili túlkunin átti

sér stað. Til dæmis voru merkin notuð til að túlka landafræði í Kína, alheiminn og jafnvægi í lífi fólks. Táknkortin Hetu og Luoshu innihalda stærðfræði, eins og flokkun talna eftir því hvort þær eru sléttar tölur eða oddatölur og einnig má finna töfraferning í þeim. Þarna birtist í raun einfaldur skilningur fólks þess tíma á stærðfræði.



Táknmynd Hetu má einnig finna sem hringlaga mynd. Hringlaga táknmynd Hetu er notað sem fyrirmynd fyrir merki ICME 14. Í merkinu má líta svo á að formin fimm (fjórir rétthyrndir jafnarma þríhyrningar og ferningur) í miðju hringsins komi

í staðinn fyrir punktana fimm sem eru í miðju Hetu táknmyndarinnar. Hringurinn utan um formin fimm stendur fyrir hringinn með tíu punktunum í Hetu táknmyndinni. Sveigarnir tveir í rauðum og bláum lit tákna sveigana í Hetu táknmyndinni. Sá rauði stendur fyrir sléttar tölur og sá blái fyrir oddatölur. Tvær tölur, 2 og 7, eru teknar út úr sveigunum og táknaðar með punktum. Margfeldið af 2 og 7 er 14 sem gefur til kynna númer hvað þessi ICME ráðstefna er.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Töfraferningur Luoshu

Rúmfræðimyndin í miðju hringsins er fullkomin sönnun fyrir reglu Gougu (þekkt sem regla Pýþagorasar í vestri) sem kínverski stærðfræðingurinn Zhao Shuang setti fram á tímabili þriggja konungsríkja í Kína. Þessi rúmfræðimynd er líka merki kínverska stærðfræðifélagsins. Þess vegna vísar það bæði til hefðar í kínverskri stærðfræði og stærðfræðikennslu og stendur fyrir kínverska stærðfræðifélagið sem sér um ráðstefnuna.

Sveigarnir tveir, rauði og blái, tákna að Kína opnar faðm sinn og býður þátttakendur allsstaðar að úr heiminum velkomna um leið og þeir vísa til þess að Kína er að verða opnara land. Myndin í heild tekur á sig lögun S sem stendur fyrir Shanghai sem er borgin

þar sem ráðstefnan er haldin.

Neðarlega á myndinni hægra megin undir ICME 14 eru fjögur hefðbundin kínversk tákni (trigrams) notuð til að skrifa töluna 3744 í áttunda kerfi sem er 2020 í tugakerfi og gefur til kynna árið sem ráðstefnan er haldin. Að auki er hægt að lesa tvíundu töluna fyrir 2020 úr kínversku táknum fjórum (0) 11111100100. Áttunda kerfið og tvíunda kerfið tengja þannig saman forna siðmenningu Kína við nútíma tækni og vísindi.

Samkvæmt ofanrituðu er óhætt að segja að merki ráðstefnunnar ICME 14 sé úthugað og að í því mætast gamli og nýi tíminn.

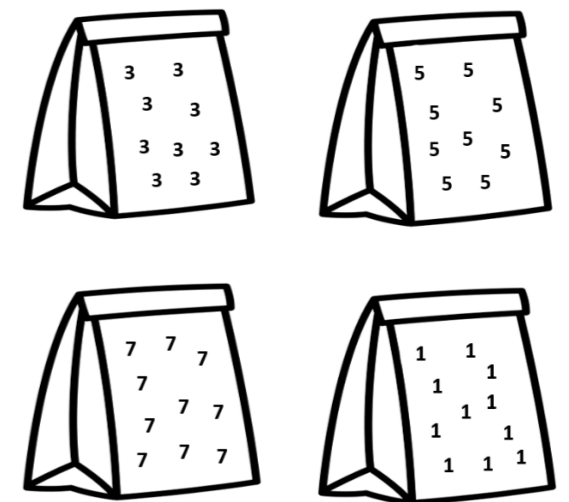
Heimild:

Tekið af vefsíðunni <https://www.icme14.org> 10. nóvember 2019.

PRAUT

Bland í poka

Í þessum pokum eru tölur, eins og sjá má á myndinni. Veljið tíu tölur, eins margar og þið viljið úr hverjum poka, þannig að summa talnanna verði 37.



FJÖLBREYTTAR LAUSNIR VIÐ VERÐUG VIÐFANGSEFNI

Turninn

Grein þessi er ein af þremur í greinaflokki um verðug viðfangsefni í stærðfræði sem birtust í tímaritinu Námnares á árunum 2016–18. Hinar tvær eru At dela smörgásar (Námnares 2016:3) og At völa glass (Námnares 2018:1).

Í greininni eru sýndar lausnir frá nemendum í 4. bekk og gerð grein fyrir því hvernig þeir setja fram lausnir sínar á ólíkan hátt.

Verðugt viðfangsefni fyrir 4.–7. bekk

Turninn

- Hve marga teninga þarftu til að byggja turninn á myndinni?
- Hve marga teninga þarftu til að byggja turn með hæðina 5?
- Hve marga teninga þarftu til að byggja turn með hæðina 100?



Verkefnið fjallar um mynstur og rúmshyggju. Þegar við unnum verkefnið með nemendum byggðu þeir turninn úr teningum ásamt því að reyna að teikna hann og alhæfa um hann þegar kom að mjög háum byggingum. Til þess að fá fram ólíkar hugmyndir í bekknum fengu sumir teninga að vinna með meðan aðrir voru hvattir til að rissa upp myndir til að finna lausn.

Hvað gerir þetta verkefni að verðugu viðfangsefni?

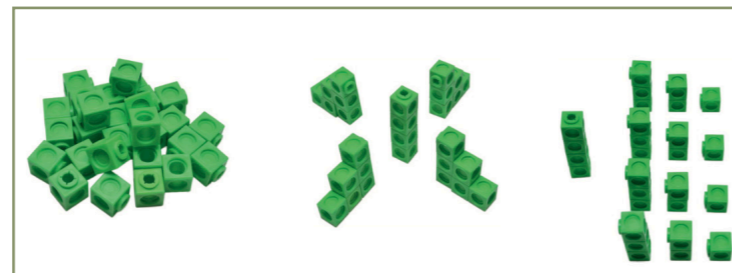
Verkefnið býður upp á að unnið sé með það á áþreifanlegan hátt sem gerir það að verkum að nemendur geta tekist á við það án þess að hafa tiltekna forþekkingu og vald á hugtökum. Ýmsar leiðir má einnig fara til að finna fjölda teninganna. Markmið verkefnisins er þrautalausn og þar er fengist við:

- talnamynstur og alhæfingar
- rúmshyggju
- framsetningarmáta.

Eitt verkefni – fjórir framsetningarmátar

ÁRAM líkanið er leið til að flokka lausnir nemenda eftir framsetningarmáta. Með hliðsjón af líkaninu gerum við grein fyrir þeim lausnum sem við höfum greint.

Áþreifanlegt (Á)

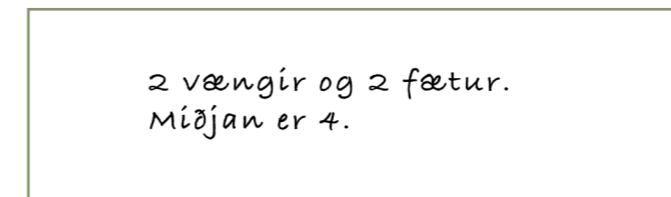


Við lausn verkefnisins notuðu sumir nemendur áþreifanlega hluti sem voru mislitir teningar. Allir þeir sem notuðu teninga skiptu turninum upp í hluta og töldu þá síðan einn og einn. Þetta gerði það að verkum að þeir áttu erfitt með að sjá mynstur og alhæfa um hærri turn. Einn hópur reyndi að taka tröppurnar af en fann ekki út hve margir teningar voru í hverri tröppu heldur taldi hann einnig teningana einn og einn. Hópurinn leysti verkefnið um turn með hæðina 5 á sama hátt en uppgötvaði að lausnaleiðin var takmörkuð þegar finna átti hve margir teningar væru í turni með hæðina 100. Hvað væri hægt að

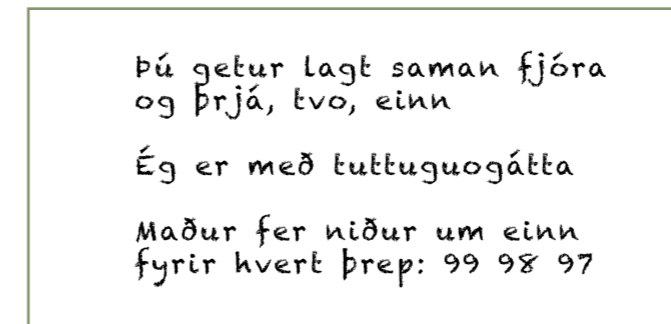
gera ef teningarnir væru ekki nægilega margir? Það vakti upp vangaveltur og nokkrar tilraunir til að finna lausnaleiðir meðal annars með að horfa á hverja hæð fyrir sig.

Rökrænt (R)

Nokkrir nemendur lýstu því með orðum hvernig þeir sáu turninn:



Aðrir nemendur byrjuðu á að reyna að færa rök fyrir svarinu bæði munnlega og skriflega. Þeir voru hvattir til að skrifa niður hvernig þeir hugsuðu, sérstaklega ef þeir voru að reyna að alhæfa. Í dæminu til vinstri er nemandi að rökræða um turninn í a lið (hæð 4) og í dæminu til hægri um tröppurnar í turninum í lið c (hæð 100). Hér sést að tungumálið er orðið verkfæri fyrir nemandann sem hann notar til að lýsa uppbyggingu og komast að lausn.



Algebrulegt /reikningur (A)

Reikningslegar lausnir nemenda sýna að hugsa má um turninn á ýmsa vegu.

Flestir nemendur nota leiðir þar sem lagt er saman og sumir byrja á að alhæfa um hærri turna. Við tókum eftir að það er margt líkt, en líka ólíkt milli flestra af leiðunum. Það er góður grunnur fyrir stærðfræðilegar umræður og fyrir skýrleika þeirra. Það hvernig

nemendur skrá útreikninga sína varpar einnig ljósi á kerfi og hugsunarhátt þeirra. Draga má þetta fram með því að láta einhvern greina frá hvernig hann heldur að sá sem framkvæmdi skráninguna hafi hugsað eða með því að ræða hvað breytist og hvað verður eins ef hæð turnsins breytist.

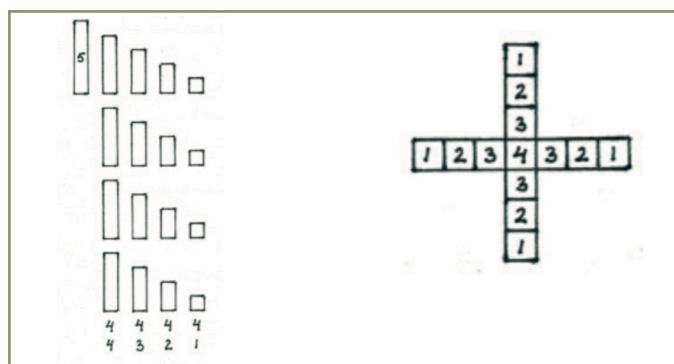
$6+4+6$	$6+6$	$16+12+28$	Turn með 4 í miðjunni gefur $4+6+6+6+6=28$
$6+6=12$	$6+12=18$	$18+6=24$	Turn með 5 gefur $5+10+10+10=45$
$24+4=28$			Turn með 6 gefur $6+14+14+14=62$
$1+2+3+4+3+2+1=16$	$4\cdot4=16$	$4\cdot3=12$	$4\cdot2=8$
$1+2+3+3+2+1=12$	Svar: 46		$4\cdot1=4$
			$\frac{2}{16}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{4}{46}$

Myndrænt (M)

Til þess að teikna turninn urðu nemendur að hugsa um turninn sem samsettan úr mismunandi hlutum. Þetta var hægt að gera á ýmsan hátt. Mismunandi skiptingar leiða einnig til ólíkra leiða við að reikna út heildarfjöldann.



Í mörgum myndrænum lausnum voru líka dæmi um kerfi sem nemendur komu sér upp. Hér að neðan eru tvö ólík dæmi um hvernig nemendur beina sjónum að hæðinni. Í lausninni til vinstri hefur nemandinn skipt turninum upp eftir hæð og flokkað og skráð fjöldann í hverri hæð. Í lausninni til hægri hefur nemandinn teiknað turninn eins og hann lítur út að ofan og skráð hæðina á hverjum stelli. Næsta skref gæti verið að draga þetta saman í töflu.



sýnt þeim hvernig þeir geta haldið utan um lausnir sínar með því að skrá þær í töflu.

Kennarinn sér fljótt að notkun teninga er ekki nóg ef ætlunin er að nemendur geti dregið ályktanir sem hafa alhæfingargildi. Fyrir yngstu nemendurna er það hjálplegt að nota tungumálið þegar þeir eru að færa rök fyrir og byrja að koma auga á mynstur. Það að finna ólíkar leiðir við að finna fjölda teninga í turni og að reyna að komast að hve margir teningar væru í turni með hæðina 100, var aha upplifun sem allir gátu tekið þátt í við lok kennslustundarinnar.

Þær framsetningar sem sýndar hafa verið eru í samræmi við það sem vænta má af nemendum í þessum aldurshópi. Það gefur einnig mynd af hvað væri viðunandi lausn á verkefninu og hvernig má með umræðum beina sjónum að þeim kerfum og reglum sem nemendur koma auga á. Þó kennarinn taki ekki til umræðu reglur eða formúlur er mikilvægt að varpa fram spurningum sem seinna geta leitt til alhæfinga. Í yngri bekkjunum gæti umræðan snúist um hvernig sjá má turninn sem samsettan úr ólíkum hlutum til að ýta undir að nemendur greini mynstur. Í framhaldi af því mætti ræða um mismunandi leiðir við að telja fjölda

Að fara á milli mismunandi framsetningarmáta

Einn framsetningarmáti er yfirleitt ekki nægilegur þegar leysa á verkefni og koma lausninni á framfæri. Í þessu dæmi kom fram að það var árangursríkt að tengja saman myndræna og algebrulega/reikningslega framsetningu. Teikning af turninum var fyrsta skrefið í að geta á kerfisbundinn hátt reiknað út heildarfjölda teninganna. Margir nemendur uppgötvuðu einnig að það var auðveldara að skrá fjölda teninga með því að nota tölur í stað þess að teikna hvern tening. Hér fengu nemendur tækifæri til að uppgötva notagildi stærðfræðilegs táknaðs. Kennarinn getur rætt við nemendur um hvað gerist ef hæðin eykst um einn og

ÁÞREIFANLEGT

$6+6=12$ $6+12=18$ $18+6=24$

$24+4=28$

Turn með 4 miðjum gefur $4+6+6+6+6=28$

Turn með 5 gefur $5+10+10+10+10=45$

Turn með 6 gefur $6+14+14+14+14=62$

$4 \cdot 4 = 16$ $4 \cdot 3 = 12$ $4 \cdot 2 = 8$ $4 \cdot 1 = 4$

Svar: 46

ALGEBRULEGT

RÖKRÆNT

Þú getur lagt saman fjóra og þrjá, tvo, einn

Ég er með tuttuguogátta

Maður fer niður um einn fyrir hvert þrep: 99 98 97

2 vængir og 2 fœtur. Miðjan er 4.

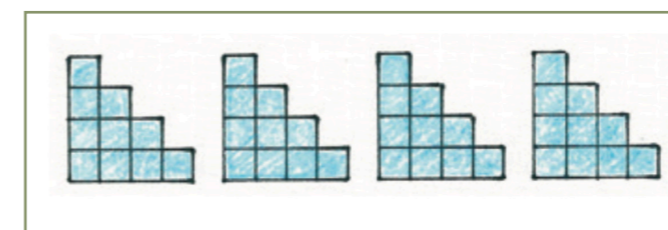
MYNDRÆNT

teninga og bera saman skráningar á útreikningum og leiðir við að skipta turninum upp. Í efri bekkjum gæti kennslan snúist meira um að skrá mynstur á táknaði algebrunnar og hvernig algebrustæðurnar tengjast ólíkum leiðum við að skipta turninum upp.

Vandamál við verkefnið

Mörg verðug viðfangsefni eru þess eðlis að taka má ýmsa þætti til umræðu í nemendahópnum. Þess vegna getur það verið mikilvægt að hugsa um hverju beina skuli sjónum að þegar unnið er með verkefnið í

tilteknum nemendahópi. Það hefur áhrif á hvernig verkefnið er kynnt og hvaða spurningar eru lagðar fyrir nemendur. Ef talið er mikilvægt að allir sjái verkefnið á sama hátt, getur verið gott að skipuleggja stuttar umræður um hvernig sjá má það fyrir sér á ýmsa vegu, hvort það séu teningar í miðju turnsins



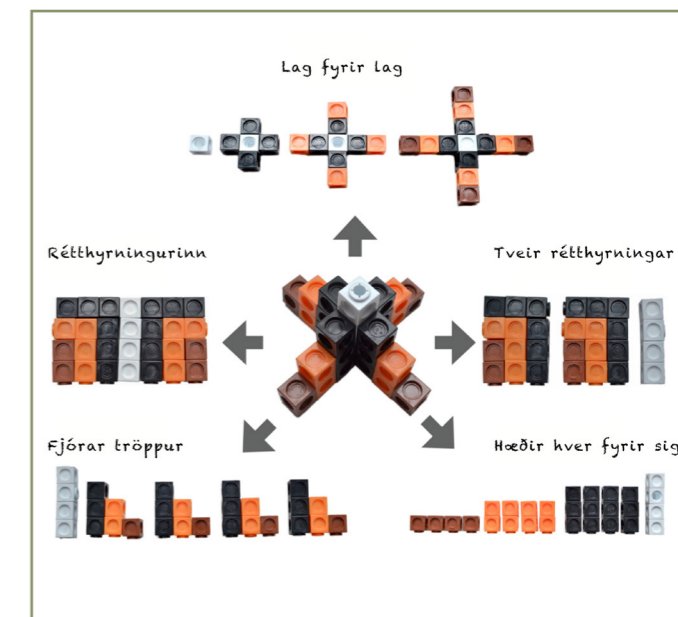
og hvernig megi skipta honum upp. Algeng villa er að miðturninn er talinn vera hluti af öllum tröppunum.

Mikilvægt er að leggja ekki of mikla áherslu á áþeifanlega hluti. Enginn af þeim nemendum sem notuðu teninga fann algilda reglu. Það er gott að nemendur fái að prófa sig áfram í fyrstu en síðan er mikilvægt að fara yfir í aðra framsetningarmáta. Að þurfa að teikna turninn var brú yfir í reikningslega framsetningu og mynstur.

Í fyrsta skipti sem nemendahópur vinnur með verkefni sem getur haft ólíkar lausnir getur verið erfitt fyrir suma nemendur að setta sig við að ekki sé ein rétt lausn. Þess vegna er það mikilvægt að kennarinn dragi fram ólíkar lausnir þannig að nemendur endurþekki sínar lausnir og fái staðfestingu á sínum leiðum. Í einum nemendahópi var ekki tekið undir hugmynd eins nemandans sem hélt því fram að það mætti byggja turninn lag fyrir lag. Það leiddi til þess að nemendur fóru á mis við að sjá turninn frá sjónarhorni sem hefði getað leitt til annars konar talnamynsturs.

Þó svo að hægt sé að gera það að viðeigandi verkefni fyrir 3. – 6. bekk, að sjá fyrir sér form turnsins og finna mynstur þá er reglan fyrir fjölda teninga frekar flókin því hún felur í sér stærð í öðru veldi: $n(2n - 1) = 2n^2 - n$. Við sáum að það var krefjandi fyrir flesta nemendur í 4. bekk að finna fjöldann í einni tröppu. Það var líka erfitt fyrir nemendur að umræða tröppunum

í réttthyrninga. Þetta getur verið auðveldara fyrir eldri nemendur og leitt til fleiri ólíkra lausna. Í efri bekkjum geta mismunandi möguleikar við að skipta turninum upp leitt til ólíkra algebrustæða. Það getur



verið upphaf að umræðum um að lýsa má mynstri með ólíkum stæðum og hvernig maður getur þá vitað hvort stæðurnar eru jafngildar.

Það eru margar leiðir við að vinna áfram með verkefnið. Nemendur geta til dæmis búið til eigin turna eða myndir og uppgötvað mynstur. Þegar nemendur eiga að búa til eigin verkefni getur það verið góður kostur að nota rúðunet sem passar við þá teninga sem notaðir eru, til dæmis rúðunet þar sem hver rúða er 2cm * 2cm. Það getur auðveldað nemendum að teikna þrívíða hluti. Hægt er að nálgast slíkan pappír að vef NCM, <http://ncm.gu.se/matematikpapper>.

Höfundar:
Rimma Nyman og Anna Ida Säfström
Þýðandi:
Guðný Helga Gunnarsdóttir

Heimildir:
Gleisner, F. (2014). Bilder och byggen är bra även för de bästa matematikeleverna – en studie om femteklassare som löser rika problem. Kalmar/Växjö: Linnéuniversitetet.
Hagland, K., Hedrén, R. og Taflin, E. (2005). Rika matematiska problem, inspiration till variation. Malmö: Elanders Berglings förlag AB.
Hedrén, R., Taflin, E. og Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till? Nämnaren 2005:1

Ritstjórapistill	3
<hr/>	
<i>Birna Hugufrún Bjarnardóttir</i>	
Fréttir af starfsemi Flatar	4
<hr/>	
<i>Þórunn Jónasdóttir</i>	
Sögur úr leikskóla	7
<hr/>	
<i>Valdís Ingimarsdóttir</i>	
Borðspilið SET eða Þrenna	11
<hr/>	
<i>Margrét S. Björnsdóttir</i>	
Óraviddir	14
<hr/>	
<i>Jóhanna Ásgeirsdóttir</i>	
Söguhornið - Flutningarúmfræði	21
<hr/>	
<i>Kristín Bjarnadóttir</i>	
Vinnustofa Peter Liljedahl	22
<hr/>	
<i>Guðbjörg Pálsdóttir</i>	
Áhugaverðar ráðstefnur og námstefnur	25
<hr/>	
Fjölbreyttar lausnir við verðug viðfangsefni	28
<hr/>	
<i>Rimma Nyman og Anna Ida Säfström</i>	
<i>Guðný Helga Gunnarsdóttir þýddi</i>	