FLATARmál

1. tbl. 15. árg. 2008

Málgagn
Flatar samtaka stærðfræðikennara

Ágætu lesendur
Nú lítur dagsins ljós 15. árgangur Flatarmála. Af ýmsum orsökum hefur blaðið verið nokkuð lengi í vinnslu og biðjum við afsökunar á því.

Efnið er að vanda fjölbreytt og vonandi finna sem flestir eitthvað við hæfi. Þar má finna viðtal sem Guðný Helga Gunnarsdóttir tók við Dr. Jo Boaler prófessor við háskólann í Exeter en hún var aðalfyrirlesari á námstefnu Flatar haustið 2007. Árið 2006 varði Dr. Kristín Bjarnadóttir doktorsritgerð um sögu stærðfræðimenntunar á Íslandi. Í blaðinu er ágrip úr ritgerðinni þar sem Kristín fjallar um hvernig stærðfræðimenntun þróaðist á fyrri hluta síðustu aldar. Sóley Sigurþórsdóttir úr Borganesi veltir fyrir sér muninum á námsbók og kennslubók og spyr hvort skipti meira máli að kennarinn kenni stærðfræði eða að nemendur læri hana. Saga Jónínu S. Marteinsdóttur úr skólastofunni um hvernig hún kennir rúmfræði á hlutbundinn hátt gefur okkur ágæta mynd af því fjölbreytta starfi sem á sér stað á vettvangi. Guðlaug Ósk Gunnarsdóttir úr Mosfellsbæ segir frá því þegar stærðfræðisafnið Mathematikum var fengið hingað til landsins og dóttir hennar lýsir heimsókn sinni á safnið. Einnig er í blaðinu kynning Ársæls Mássonar á bókinni Prime Obsession eftir John Derbyshire.

Að lokum viljum við minna ykkur á að senda inn efni í næsta blað en það er þegar farið að huga að því. Sögur úr stærðfræðitímum, áhugaverð verkefni eða kennsluaðferðir sem hafa reynst vel eiga erindi til okkar allra. Áhugaverðar bækur, greinar eða fólk með skoðanir á stærðfræði, stærðfræðinámi eða kennslu getur einnig verið áhugavert.

Fyrir hönd ritstjórnar, Hafdís Guðjónsdóttir

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til ritnefndar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og línurit skulu helst ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð í sér skrám. Í texta komi fram númer eða nafn teikningar. Ritnefnd tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

Útgefandi: Flötur, samtök stærðfræðikennara, Laufásvegi 81, 101 Reykjavík
Ritnefnd: Jónína Marteinsdóttir, miðstigskennari í Engidalsskóla
Hafdís Guðjónsdóttir, lektor í sérkennslufræðum við menntavísindasvið HÍ
Anton Már Gylfason, stærðfræðikennari í Borgarholtsskóla
Þórunn Bergþóra Jónsdóttir, stærðfræðikennari við Fjölbrautaskólann í Garðabæ.

Prófarkalestur: Guðbjörg Pálsdóttir og ritnefnd
Umbrot: Héðinn Björnsson
Kápa: Magnús Elvar Jónsson
Prentun: Prentsmiðjan Oddi hf.

http://flotur.ismennt.is - flotur@ismennt.is

Viðtal við Dr. Jo Boaler

Guðný Helga Gunnarsdóttir - Lektor við Háskóla Íslands

Dr. Jo Boaler, prófessor var aðalfyrirlesari á námstefnu Flatar á Hótel Selfossi 26.-27. október síðastliðinn. Guðný Helga Gunnarsdóttir, lektor við Háskóla Íslands tók stutt viðtal við hana daginn fyrir námstefnuna. Í inngangi er sagt frá starfsferli Jo Boaler og greint stuttlega frá nokkrum af þeim rannsóknum og ritum sem vísað er til í viðtalinu.

Dr. Jo Boaler starfar sem Marie Curie Prófessor í menntunafræðum við Háskólann í Exeter. Þar hefur hún starfað frá haustinu 2006.

Dr. Jo Boaler hóf starfsferil sinn sem kennari á unglingastigi í London. Hún tók við umsjón með samræmdum prófum og námsmati í Bretlandi við Háskólann í London. Hún fór fyrir hópi sem rannsakaði og hannaði samræmd próf í stærðfræði fyrir14 ára nemendur í Englandi og Wales. Jo stundaði meistara- og doktorsnám við Kings College í London og hlaut doktorsritgerð hennar viðurkenningu sem besta doktorsritgerð í menntunarfræðum það árið. Jo réðst til Stanford Háskóla í Bandaríkjunum árið 1998 og hlaut hún þar skjótan frama og var komin með fulla prófessorsstöðu árið 2005.

Í doktorsrannsókn sinni fylgdist Jo Boaler með stærðfræðikennslu á unglingastigi í tveimur skólum í Bretlandi. Í öðrum skólanum, sem hún kallar Amber Hill, var stærðfræðikennslan hefðbundin. Nemendur studdust við eina kennslubók, kennslustundir hófust með að farið var yfir heimavinnu. Því næst skýrði kennarinn fyrir nemendum viðfangsefni dagsins og að því loknu fórum nemendur að vinna við að leysa verkefni kennslubókarinnar upp á eigin spýtur. Langflest verkefni voru þannig að það tók nemendur mjög skamman tíma að leysa þau. Í hinum skólanum sem hún kallaði Phoenix Park voru viðhafðir annars konar kennsluhættir. Nemendur unnu að opnum þematengdum verkefnum sem þeir fengust við í 2-3 vikur. Þeir höfðu mjög frjálsar hendur varðandi skiplagningu verkefnisins og nýtingu tíma síns en þurftu að standa skil á niðurstöðum sínum að ákveðnum tíma loknum. Rannsóknin var langtímarannsókn sem tók til þriggja ára. Jo fylgdist með árangri nemenda á prófum og tók viðtöl við nemendur og kennara.

Í stuttu máli má segja að nemendur í Phoenix Park sýndu mun meiri framfarir en nemendur Amber Hill og viðhorf þeirra til greinarinnar voru einnig mun jákvæðari. Jo hefur skrifað um rannsókn sína í Bretlandi í bókinni *Experiencing School Mathematics*[1] en hún hefur verið gefin út bæði í Bretlandi og Bandaríkjunum.

Í Bandaríkjunum gerði Jo rannsókn sem var hliðstæð við þá rannsókn sem hún gerði í Bretlandi. Hún fylgdist með kennslu í þremur skólum á unglinga- og framhaldsskólastigi (high school) í fjögur ár. Í tveimur þeirra var kennslan mjög hefðbundin en í einum sem hún kallar Railside höfðu kennarar þróað breytta kennsluhætti þar sem mikil áhersla var lögð á hópvinnu og að nemendur fengjust við viðameiri verkefni. Það tók þá að meðaltali 10 mínútur að leysa hvert verkefni. Einnig var mikil áhersla lögð á að nemendur útskýrðu og rökstyddu lausnaleiðir sínar. Nemendur í Railside skólanum voru líka frábrugðnir nemendum í hinum skólunum hvað það varðar að félagsleg staða þeirra var mun lakari en nemenda í hinum skólunum tveimur. Að öðru leyti voru skólarnir svipaðir t.d hvað varðar nemendafjölda og menntun kennara. Á prófi sem lagt var fyrir allan hópinn við upphaf tímabilsins stóðu nemendur Railside skólans hinum töluvert langt að baki en strax við lok fyrsta ársins stóðu þeir þeim jafnfætis og við lok tímabilsins höfðu framfarir þeirra orðið mun meiri en nemenda hina skólanna tveggja. Það sem einnig var mikilvægt var að viðhorf þeirra til stærðfræðinámsins voru mun jákvæðari og mun stærra hlutfall þeirra hugðist leggja stund á stærðfræði eða tengdar greinar að loknum framhaldskóla. Jo Boaler hefur skrifað fjölda tímaritsgreina um rannsóknir sínar í Bandaríkjunum. Þær er hægt að komast í á heimasíðu hennar[2]. Ágætt og aðgengilegt yfirlit yfir áherslur í Railside skólanum má fá með því að lesa greinina *Urban Success. A Multidimensional mathematics approach with equitable outcomes* sem birtist í tímaritinu *Phi, Delta, Kappan* árið 2006. Jo var einn af aðalfyrirlesurunum á ICME-10 alþjóðlegri ráðstefnu um stærðfræðimenntun sem haldin var í Kaupmannahöfn sumarið 2004. Þar heyrði stór hópur íslenskra þátttakenda fyrst af rannsóknum hennar og hrifust margir af.

---

1. Boaler, J. (2002). Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and their Impact on Student Learning. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.
2. Heimasíða Dr. Jo Boaler (http://www.sussex.ac.uk/education/profile205572.html)

Jo Boaler gaf út bókina *Connecting Mathematical Ideas*[3] árið 2005 ásamt Cathy Humphreys. Í bókinni er greint frá því hvernig Cathy, sem er reyndur kennari 12 – 13 ára nemenda, tekst á við að breyta áherslum í stærðfræðikennslu sinni. Við það verkefni naut hún stuðnings Jo og voru allar kennslustundir teknar upp á myndband þannig að þær gátu rætt sín á milli hvernig til tókst og velt fyrir sér í sameiningu hvernig mætti þróa kennsluna áfram. Með bókinni fylgir mynddiskur þar sem fylgjast má með nokkrum kennslustundum hjá Cathy og í bókinni má lesa um vangaveltur hennar fyrir og í kjölfar kennslunnar sem og vangaveltur Jo Boaler um kennsluna. Bókin hefur verið notuð hér á landi með kennaranemum og á símenntunarnámskeiðum.

Jóhanna Eggertsdóttir, Þóra Þórðardóttir og Jo Boaler.

Ég byrjaði á að spyrja Jo hvers vegna hún hefði ákveðið að gera svipaða rannsókn þegar hún fór til starfa í Bandaríkjunum og þá sem hún gerði í Bretlandi.
Þetta er góð spurning. Mér fannst forvitnilegt að komast að því hvort ég fengi svipaðar niðurstöður í Bandaríkjunum og í Bretlandi. Ég vildi kanna hvort það væri munur á hefðbundinni kennslu milli landa og hvort þeir sem væru að breyta áherslum og kennsluháttum væru að gera sömu eða svipaða hluti. Ég komst að því að það er munur. Hefðbundna kennslan í Bandaríkjunum er í mun fastari skorðum en hún þó er í Bretlandi og það var líka munur á kennslunni hjá þeim sem hafa breytt áherslum. Mér fannst líka áhugavert að kynnast stærðfræðikennslu í Bandaríkjunum betur og þeim áhrifum sem kennslan hefur á nemendur enda var ég ný í starfi þar.

Þannig að þig hefur langað til að fá betri innsýn í kennslu í Bandaríkjunum?
Já, og mér fannst líka áhugavert að endurtaka rannsóknina og sjá hvort ég fengi sömu eða svipaðar niðurstöður. Ég held að það sé gott að fylgja rannsóknum eftir á þann hátt.

Fannst þér þú fá mikilvægar viðbótarupplýsingar við að endurtaka rannsóknina?
Já, mér fannst það vegna þess að bæði hefðbundna kennslan og breytta kennslan var öðruvísi. Í Railside skólanum unnu nemendur í hópum og í Bandaríkjunum er stærðfræðinni á efri stigum skipt upp í algebru og rúmfræði. Í Bretlandi er þetta ekki gert heldur fléttast þættir saman. Þetta var einnig gert í Railside og nemendur þar fengust við nokkuð umfangsmikil verkefni en þó ekki eins og í Englandi þar sem nemendur fengust við mjög umfangsmikil þematengd viðfangsefni í tvær til þrjár vikur. Það var töluverður munur á kennslunni og það hafði í för með sér að ég sá nýja hluti. Í Railside skólanum var markvisst unnið að því að auka jöfnuð milli nemenda. Þeir lærðu að bera virðingu hver fyrir öðrum og að vinna vel saman sem hópur. Í skólanum var fjölmenningarlegt samfélag og nemendur lærðu að vinna saman þvert á menningarleg mörk sem oft skipta nemendum í hópa í Bandaríkjunum og þeir lærðu einnig að vinna saman t.d. óháð kyni og stétt. Nemendur unnu saman á jafnréttisgrundvelli á allt annan hátt en ég hafði sé í Englandi. Það var nýtt fyrir mér og hef ég fjallað töluvert um það í skrifum mínum.

Kennslan í Railside var sem sagt í fastari skorðum en í Englandi?
Já, hún var í mun fastari skorðum. Kennararnir studdust við ákveðna kennsluaðferð sem þróuð hefur verið í Bandaríkjum og kölluð er *Complex instruction*[4]. Það er sérstök aðferð við hópvinnu sem ætlað er að stuðla að meiri jöfnuði og virðingu nemenda sem hafa ólíkan menningar- og félagslegan bakgrunn. Nemendur er mjög markvisst þjálfaðir í ákveðnum vinnubrögðum í hópvinnu þar sem hver og einn fær ákveðið hlutverk hverju sinni.

Hvernig myndir þú á grundvelli reynslu þinnar og rannsókna skipuleggja stærðfræðikennslu?
Á grundvelli reynslu minnar sem kennari og rannsakandi myndi ég að öllum líkindum ekki fara alveg eins að og kennararnir í Railside. Ég myndi líkast til ekki láta nemendur vinna alltaf í hópum því ég held að það sé gott að fá tækifæri til að vinna upp á eigin spýtur af og til. Ég myndi vera stundum með hópvinnu og þá myndi ég styðjast við sömu aðferðir og

3. BoalerBoaler, J. & Humphreys, C. (2005). Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching & Learning. Heinemann, Portsmouth, NH.
4. Bók þar sem lesa má um þessa aðferð er bæði til á bókasafni KHÍ og bókasafni Háskólans á Akureyri. Cohen, Elizabeth G. (1994) Designing groupwork : strategies for the heterogeneous classroom. New York : Teachers College, Columbia University.

kennararnir í Railside. Ég myndi ekki vinna með algebru sér og rúmfræði sér eins og gert var þar. Ég myndi nota þemavinnu eins og gert var í Englandi. Það er leið í kennslu sem ég aðhyllist mjög þannig að ég myndi leggja mikla áherslu á slíka vinnu. Ég tel að þemavinna þar sem hópar vinna eftir þeim leiðum sem lögð er áhersla á í *Complex instruction* væri góð leið. Það fer að vísu eftir þeim aðstæðum sem maður er í. Í Englandi finnst kennurum erfitt að vinna á þennan hátt vegna þeirrar prófáráttu sem þar ríkir.

En hvað um getuskiptingu?
Ég er algjörlega á móti getuskiptingu og hvers kyns röðun í hópa eftir getu. Ég myndi skipa nemendum í getublandaða hópa því ég tel að getuskipting haldi aftur af nemendum sem standa höllum fæti. Ég myndi örugglega vera með getublandaða hópa. Þegar ég kom aftur til Bretlands eftir dvöl mína í Bandaríkjunum sá ég að stjórnvöld, undir forystu Tony Blair, höfðu verið að tala fyrir getuskiptingu í neðstu bekkjunum einnig, en getuskipting var fyrst og fremst í efri bekkjunum. Þegar Gordon Brown núverandi forsætisráðherra Breta tók undir þessar hugmyndir daginn sem hann tók við völdum settist ég niður og skrifaði honum bréf. Ég bauðst til að kynna fyrir honum rannsóknir mínar þar sem sýnt er fram á að kennsla í getublönduðum hópur stuðlar bæði að betri árangri og meira jafnræði milli nemenda. Það leiddi til þess að mér er í næstu viku boðið til fundar í Downing stræti og þar þarf ég að rökræða þetta við hann.

Þetta er áhugavert. Þér finnst sem sagt mjög mikilvægt að nemendur vinni í getublönduðum hópum?
Já, svo sannarlega.

Hvernig finnst þér að við getum stutt kennara sem vilja þróa kennslu sína meira í átt að þeim kennsluháttum sem viðhafðir voru í Railside eða Phoenix Park?
Það fer eftir aðstæðum hve erfitt það er. Þeir þurfa að hafa aðgang að góðu námsefni. Það er búið að gefa út námsefnið sem kennararnir í Railside notuðu, svo það er aðgengilegt. En það er ekki nóg að hafa aðgang að góðu námsefni það eru svo ótalmargir aðrir þætti sem skipta máli í sambandi við kennsluhættina. Það tekur tíma að þróa og læra nýja kennsluhætti og mikilvægt er að gera það í samstarfi við aðra. Ég held að það sé erfitt að takast á við slíkt einn og því skiptir samstarf miklu máli. Ég tel líka að það geti verið mikill stuðningur að myndböndum. Ég þróaði myndbönd með kennurunum fjórum í Railside og með því að skoða þau er hægt að sjá hvernig þetta gengur í reynd. Ég held að kennarar þurfi að fá tækifæri til að kynnast þessum vinnubrögðum utan kennslustofunnar, feta sig síðan hægt áfram, prófa hugmyndir og ræða hvernig til tókst við aðra. Ég tel að þeir myndu þurfa töluverðan stuðning en það ræðst af sjálfsögðu af því hvaða kennsluhættir það eru sem þeir eru vanir og úr hverju þeir eru að breyta.

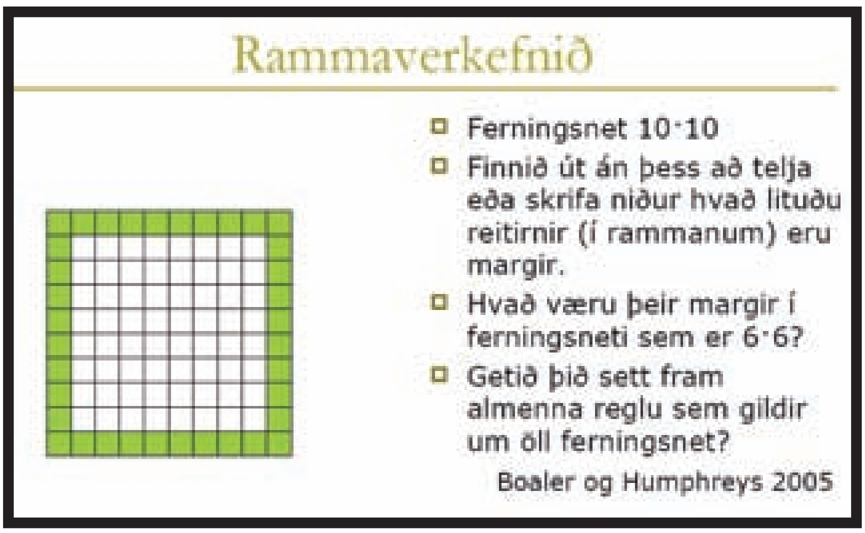
Eins og þú veist þá höfum við hér á landi notað bókina Connecting Mathematical Ideas með bæði kennaranemum og kennurum sem hafa verið í símenntun. Flestir þeirra hafa orðið mjög hrifnir af þeim leiðum sem þar er lýst og ég held að rammaverkefnið hafi verið prófað í mörgum íslenskum kennslustofum. Eitt af því sem margir velta fyrir sér er hvernig hægt sé að nota svona mikinn tíma í eitt verkefni. Þeir finna fyrir togstreitu milli þess sem þeir vildu vera að gera með nemendum og námskrárinnar. Hvernig er hægt að komast yfir allt það sem á að taka fyrir samkvæmt námskrá ef notaður er svona mikill tími í eitt verkefni?

Við Cathy höfðum smá áhyggjur af þessu þegar við gáfum út bókina en það er mikilvægt að hafa í huga að Cathy vinnur ekki alltaf á þennan hátt. Myndböndin þjóna ákveðnum tilgangi. Þeim er ætlað að kynna á hvern hátt Cathy vinnur að tilteknum verkefnum og hvernig hún stjórnar vinnu hópsins og stýrir umræðum bekkjarins í því samhengi. En hún vinnur ekki alltaf á þennan hátt. Hún beitir mjög fjölbreyttum kennsluaðferðum. Það einkennir hana sem kennara. Stundum vinna nemendur einstaklingslega og stundum í hópum. Hvað það snertir að komast yfir efnið þá kemur það oft upp í sambandi við kennsluhætti kennaranna í Railside og fólk hefur undrast hve löngum tíma er varið í hvert verkefni. En þegar kemur að prófum þá gengur nemendum betur. Kennurum í Kaliforníu er ætlað að fara yfir mjög mikið efni. Kennararnir skoðuðu það og ákváðu að velja ákveðin lykilhugtök og þróa kennsluna í kringum þau í stað þess að reyna að komast yfir allt. Þeir sáu að nemendur náðu betri og dýpri skilningi á þessum lykilhugtökum og þeir náðu einnig betri árangri á prófum en nemendur sem fóru yfir allt efnið og gleymdu líkast til öllu fljótlega aftur. Þeir höfðu því ekki áhyggjur þó þeir kæmust ekki yfir allt efnið. Nemendur lærðu líka að fást við stærðfræði á annan hátt. Þeir fara dýpra í efnið því þeir fá til þess nægan tíma og þeir læra líka við vinna stærðfræðilega sem gagnast þeim við aðrar aðstæður. Þegar til kastanna kemur þá er það þess virði að dvelja lengur við viðfangsefnin því nemendur öðlast betri og dýpri skilning á stærðfræðinni. Þeir öðlast einnig meira öryggi og hafa ánægju af því að glíma við viðfangsefnin. Þeim finnst gaman í stærðfræði svo það er sannarlega þess virði þó þeir nái ekki að fara yfir allt efnið. Ég veit að erfitt er fyrir kennara að taka ákvörðun sem þessa.

Já og mörgum kennurum finnst líka erfitt að virkja alla nemendur þegar þeir vinna á þennan hátt.
Hvað þetta varðar þá er sú leið sem farin var í Railside skólanum árangursríkari en sú leið sem Cathy fór. Sá nemendahópur sem Cathy tók við næst á eftir þeim hópi sem hún kenndi þegar við unnum að bókinni var mun verr búinn undir þessi vinnubrögð. Sá hópur stóð verr að vígi stærðfræðilega og var ekki vanur umræðum og með þeim hópi notaði hún mun meira hópvinnu eins og gert var í Railside. Þar er mikil áhersla á hópvinnu og nemendur upplifa að hópvinnan sé skynsamleg. Allir nemendur hafa tiltekið hlutverk, viðfangsefnin eru hönnuð á þann hátt að allir geti lagt eitthvað að mörkum og nemendur skynja að hópvinnan skili árangri. Á myndböndunum með Cathy er mikið um umræður þar sem allur bekkurinn er virkur. Það er mun erfiðara að stjórna umræðum í slíkum hópum en umræðum í litlum hópum. Bæði Cathy og annar kennari, sem ég hef unnið með, segjast nota umræður í minni hópum meira en bekkjarumræður þegar bekkirnir eru meira krefjandi.

Telur þú að allir nemendur hafi ávinning af kennsluháttum sem þessum?
Já, ég tel til dæmis að nemendur, sem eiga við námserfiðleika að etja, hafi mikinn hag af kennsluháttum eins og þeim sem viðhafðir voru í Railside. Þeir unnu alltaf með nemendum sem voru sterkir og þeir lærðu að allir gætu lagt eitthvað af mörkum og haft ávinning af því. Kennararnir í Railside opnuðu upp stærðfræðina og gerðu hana að breiðara viðfangsefni sem hægt er að takast á við á ýmsa vegu. Það getur enginn verið sterkur á öllum sviðum. Sumir geta eitt en aðrir annað. Þegar stærðfræðin er gerð að breiðara viðfangsefni á þennan hátt komast nemendur með námserfiðleika jafnvel að því að þeir eru góðir á sviðum þar sem aðrir eru ekki jafn góðir. Annað atriði sem skiptir máli er að mikil áhersla var lögð á að nemendur gætu rökstutt máli sitt og lausnir á stærðfræðilegan hátt. Það var eðlilegt að ræða málin og spyrja spurninga og nemendur gátu alltaf beðið einhvern um að útskýra og rökstyðja fyrir sér. Svo í raun voru 30 kennarar í 30 manna bekk því allir hjálpuðust að. Það er erfitt fyrir einn kennara að sinna nemendum með námserfiðleika nægilega vel ef hann er með nokkra slíka í bekknum og er einn um að sinna þeim.

Í þeim skólum sem þú hefur rannsakað og hafa verið að þróa og breyta kennslu sinni er greinilegt að kennararnir hafa starfað vel saman og myndað eins konar námssamfélag um verkefnið. Telur þú að það skipti miklu máli?
Já, í Railside var það mjög mikilvægt. Skólinn var undir smásjá skólayfirvalda og var ekki talinn standa sig nógu vel í samanburði við aðra. Það voru til dæmis fimm mismunandi skólastjórar á þeim fjórum árum sem við vorum við rannsóknir í skólanum. Sú staðreynd að kennararnir unnu saman og gátu stutt hver annan skipti mjög miklu máli. Stundum reyndu skólastjórar að fá þá til að breyta til hefðbundnari kennsluhátta en stærðfræðideildin var mjög samheldin og sterk og gat staðið slíkt af sér. Kennararnir voru líka í góðri stöðu vegna þess að nemendum gekk mun betur í stærðfræði en í öðrum greinum á samræmdum ríkisprófum, en venjulega er stærðfræðin sú grein sem nemendur ná lökustum árangri í. Þetta og það að þeir voru samhentur hópur hjálpaði þeim við að halda sínu striki.



Í báðum þessum skólum sem ég hef rannsakað og náð hafa góðum árangir þ.e. Railside og Phoenix Park hönnuðu kennararnir sjálfir sitt eigið námsefni. Þeir sömdu reyndar ekki sjálfir verkefni því það er til mikið af góðum verkefnum eins og til dæmis rammaverkefnið. Þeir ákváðu aftur á móti hverjar væru meginhugmyndirnar sem þyrfti að leggja áherslu á og völdu góð verkefni, sem þeir töldu að gætu stuðlað að því að nemendur næðu tökum á þeim hugmyndum. Kennararnir í Railside settu saman námsefni í algebru og rúmfræði og í Phoenix Park gerðu kennararnir í raun það sama. Þeir ákváðu hverjar væru meginhugmyndirnar og settu síðan upp þemaverkefni sem þeir töldu líklegt að gætu varpað ljósi á og dýpkað skilning nemenda á þessum meginhugmyndum. Þetta eru einu kennarahóparnir sem ég hef hitt sem hafa gert þetta. Flestir skólar og kennarar leita að góðum kennslubókum til að fara í gegnum með nemendum. Ég tel að þetta hafi skipt sköpum fyrir árangur þessara skóla.

Í báðum tilvikum lá fyrir umfangsmikil námskrá sem átti að fara eftir. Í Kaliforníu er hún mjög viðamikil með milljón atriðum sem taka á fyrir og það sama má segja um England. Þar eru langir listar af atriðum sem taka á fyrir. Á báðum stöðum völdu kennararnir úr þær meginhugmyndir sem þeir töldu mikilvægast að leggja áherslu á og byggðu kennsluna upp í kringum þær. Þeir vissu að þeir myndu ekki taka á öllum atriðum námskrárinnar en þeir höfðu ekki áhyggjur af því.

Það hefur ef til vill verið af því að þeir vissu að þeir voru líka að kenna nemendum ákveðin stærðfræðileg vinnubrögð sem gætu nýst þeim á öðrum sviðum.
Já þeir töldu að það væri mikilvægt að kenna nemendum vinnubrögð sem þeir gætu notað í lífinu og við aðrar aðstæður þar sem þeir þyrftu að beita stærðfræði.

Þú skrifar mikið um félagslegt réttlæti og jafnrétti í ritum þínum. Hvers vegna eru þetta mikilvægir þættir þegar kemur að stærðfræðimenntun?
Ég tel að stærðfræði sé mjög mikilvæg fyrir nemendur bæði samfélagslega og einnig vegna þess að stærðfræðikunnátta getur haft mikil áhrif á framtíð þeirra. Slök frammistaða í stærðfræðin virðist geta leitt til þess að nemendum finnist þeir heimskir. Hún virðist geta brotið niður sjálfstraust þeirra á allt annan hátt en slök frammistaða í öðrum greinum gerir. Ef þér gengur illa í öðrum greinum er það vegna þess að þú hefur ekki lagt þig nægilega fram er í stærðfræði er það vegna þess að þú hefur ekki hæfileika eða getur ekki lært hana. Því miður held ég að reynsla margra nemenda af stærðfræði mótist af mistökum og vanmætti og hún er þeim því ekki til neinnar ánægju.

Að geta haft ánægju af stærðfræðináminu skiptir miklu máli fyrir nemendur og framtíð þeirra. Það er því mikilvægt að þeir sem fást við stærðfræðimenntun leiti allra leiða til að gera stærðfræðinámið ánægjulegra fyrir alla nemendur hvaða bakgrunn sem þeir hafa. Ef litið er á tölfræðina kemur fram að góður árangur í stærðfræði er oft nátengdur samfélagsstöðu, kyni og menningarlegum bakgrunni. Það eru ákveðnir hópar sem standa höllum fæti og þetta er atriði sem þarf að taka á sérstaklega hvað stærðfræðina varðar. Þetta er ekki eins áberandi í öðrum greinum.

Þú fjallar töluvert um sjálfsmynd nemenda í skrifum þínum og þau áhrif sem stærðfræðinámið getur haft á hana. Telur þú að það stærðfræðinám sem við bjóðum nemendum upp á móti þá sem einstaklingar þegar til lengri tíma er litið?
Þetta er mjög áhugavert. Meðan ég bjó í Bandaríkjunum fór ég til Englands og tók viðtöl við nemendur sem tekið höfðu þátt í rannsókn minni í Englandi. Þetta var átta árum eftir að rannsókninni lauk og voru þeir orðnir um 24 ára. Ég ræddi við þá um á hvern hátt skólagangan hefði mótað þá og þeir ræddu af miklum ákafa um reynslu sína í stærðfræðikennslustofunni og hver áhrif hún hefði haft á þá sem fólk og nemendur.

Eitt af því sem kom mjög sterkt fram hjá þeim nemendum sem höfðu verið í skóla þar sem var getuskipting var hve mikil áhrif það hefði haft á þá. Þeir töluðu og töluðu um þetta. Þeir töluðu um hvaða áhrif það hefði haft á reynslu þeirra í skóla, hvert þeir hefðu farið að skóla loknum og á líf þeirra í heild. Þetta hvíldi mjög þungt á þeim og hjá fæstum var þetta jákvæð upplifun.

Hér lauk viðtalinu. Jo spurði mig í lokin hvort nemendum væri getuskipt í stærðfræði hér á landi. Ég reyndi að lýsa fyrir henni hvernig þessu er háttað og komst að því að það er í raun ekki auðvelt að gera í stuttu máli. Það er ef til vill ágæt spurning fyrir okkur að velta fyrir okkur. Er getuskipting í stærðfræði í íslenskum skólum og ef svo er hvers vegna?

Af hverju nám án nemendabókar?

Sóley Sigurþórsdóttir - Deildarstjóri yngri deildar við Grunnskólann í Borgarnesi

Á vorönn 2007 vann ég verkefni á námskeiði í KHÍ sem fólst í að rýna í handbók í stærðfræði sem heitir *Boxes Squares and other things*, eftir Marion Walter (Walter, 1995). Bókin er ætluð kennurum og inniheldur tillögur að kennslu í óhefðbundinni rúmfræði. Tilgangurinn er að gefa kennurum og nemendum hugmyndir um hvernig vinna má á skemmtilegan og sjónrænan hátt með rúmfræði. Við þessa skoðun fór ég verulega að velta fyrir mér hlutverki námsbóka í stærðfræði og lagði í framhaldi fram eftirfarandi spurningu: Námsbók eða kennslubók, hver er munurinn?

Ef við veltum fyrir okkur hvað stýrir stærðfræðikennslunni mætti segja að það séu margir þættir og flókið samspil þeirra en ef við nefnum nokkra má segja að það séu:

- Aðalnámskrá grunnskóla
- Námsefni og námsgögn
- Hefðir í stærðfræðikennslu
- Viðhorf heimilanna
- Rannsóknir og kenningar um hvernig börn læra

Ef ég ætti að raða þessum þáttum í röð sem segði til um mikilvægi þeirra gagnvart nemandanum og námi hans væru það rannsóknir og kenningar um nám en ég hef talsverðar áhyggjur af því að svo sé ekki í raunveruleikanum. Ég er hrædd um að hefðir í kennslu og viðhorf samfélagsins til þess hvað stærðfræði er, stýri mun meiru í skólastarfinu heldur en námskenningarnar, en einnig hefur framboð námsefnis mikið að segja. Rannsókn Ingvars Sigurgeirssonar frá árunum 1987-88 þar sem hann fylgdist með kennslu á miðstigi grunnskóla leiddi í ljós að í um 46.2% kennslustunda var verið að nota vinnubókarkennslu. Ingvar (2002) skilgreinir vinnubókarkennslu sem kennsluaðferð sem snýst að verulegu leyti um verkefnin í vinnubókinni og þau eru þungamiðja kennslunnar. Þegar kennslan er skipulögð út frá vinnubókum eins og hérlendar kennslubækur í stærðfræði fyrir 1.-5. bekk grunnskólans eru, þá er búið að ákveða svarformið fyrirfram. Oft festast kennarar í því að taka námsefnið í þeirri röð sem námsbókarhöfundurinn ákvað. Nemendum veitist oft léttara að vinna verkefni vinnubókanna þar sem þeir þurfa ekki að velta fyrir sé skipulagningu eða hvernig þarf að setja fram svarið, höfundurinn hefur gefið tóninn. Athuganir Ingvars (2002) leiddu á sínum tíma í ljós að oft leystu nemendur verkefnin án þess að skilja efnið, þeir sáu mynstur í svörunum og gátu því notað slembilukku við að setja fram rétta svarið. Auðvelt getur líka verið að herma eftir bekkjarfélögum þegar vinnubókarformið er notað. Einfalt er að sjá svarið og ekki er gerð krafa um að setja fram vinnuferlið að baki svarinu. Kennurum finnst vinnubókarformið þægilegt. Þeir eiga auðvelt með að fylgjast með hvað fram fór en þegar nemandinn yfirgefur skólann flytur hann þekkinguna ekki með sér út í lífið (Gardner,1995).

Margar rannsóknir hafa sýnt að nemendur t.d. í stærðfræði geta ekki leyst ný verkefni ef verkefnunum hefur verið breytt jafnvel þó breytingin sé mjög lítil. Gardner (1995) tekur mjög athyglisvert dæmi um hvernig nemendur geta jafnvel flaskað á ótrúlega léttu dæmi bara vegna þess að skilningurinn er ekki til staðar. Dæmið sem Gardner tekur er úr rannsóknum Lockhead, J og Clement, J frá Háskólanum í Massachusett, lítum á dæmið það var einfaldlega svona:

> „ef það eru sex sinnum fleiri stúdentar en prófessorar og ef það eru 10 prófessorar. Hve margir eru þá stúdentarnir? Nánast allir geta svarað samstundis að þá séu þeir 60 (Gardner,1995,bls.160).“

Þegar nemendurnir áttu svo að skrifa formúlu þar sem gefið var upp að S táknaði stúdenta og P prófessora, féllu ótrúlega margir í þá gryfju að segja 6•S = P sem segir okkur þá að ef stúdentarnir eru 60 þá verði prófessorarnir 360. Ástæðuna telur Gardner (1991) vera að nemendur hafi ekki raunverulegan skilning á algebrunni þ.e. að S tákni fjölda stúdenta og fara þeir í það far að álykta að vegna þess að talan sex sé á undan orðinu stúdentar í dæminu eigi þær stærðir að parast saman. Hvað segir þetta okkur um nemendurna? Hvað hafði þeim verið kennt? Hefðum við bara átt að breyta verkefninu og segja að fjöldi nemenda sé sex sinnum meiri en fjöldi prófessora? Hefðu þeir þá skilið verkefnið eða bara þekkt uppsetninguna?

Með stöðluðum verkefnum sem byggja á að nemandi fylli í þar til gerðar eyður í bók frekar en að rannsaka og komast að niðurstöðu eykst hættan á að við séum ekki að kenna til skilnings. Yfirfærsla þekkingar frá einu verkefni til annars verður takmörkuð og nemendur vita einungis, sem dæmi, að fyrsta talan á við orðið sem kemur næst á eftir í verkefninu (samanber dæmi Gardners). Þessum nemendum getur gengið vel á prófum en skildu þeir raunverulega það sem um ræðir eða lærðu þeir bara að svara spurningunni? Prófin eru oftast í sama móti og kennslubókarverkefnin. En höfum við skoðað af hverju hópur nemenda flaskar á ákveðnum dæmum í prófunum okkar? Er það vegna þess að við notuðum aðra orðauppbyggingu á spurningunni og nemandinn hefur ekki nægjanlegan skilning á viðkomandi efni til að hann geti yfirfært þekkingu sína á nýtt verkefni?

Gardner (1995) fjallar einnig í þessu samhengi um hvernig skólakerfið í dag tekur til stærri og breiðari hóps nemenda en á öldum áður. Þá var verið að kenna úrvalinu sem átti kannski auðveldara með yfirfærsluna. Jafnframt því að þekkingin og tæknin í samfélaginu var einhæfari og um leið auðveldara að sjá samhengið á milli skólanámsins og verkefni daglegs lífs. Gardner (1995) hefur einnig áhyggjur af því hvaða hópar fara í kennaranám. Það sé ef til vill ekki sams konar hópur og áður, kannski dálitlir fordómar, en þó sannleikskorn að ekki séu sömu gáfumennirnir í kennslunni þar sem nú fái þeir hærri og betur launaðar stöður. Ég veit nú ekki hvort ég skrifa undir þetta nema að því leyti að stærðfræði grunnskólans er orðin mun flóknari en áður. Of fáir kennarar hér á landi hafa sérfræðiþekkingu í stærðfræði (Svanhildur Kaaber og Heiðrún Kristjánsdóttir, 2005), þá þekkingu sem kennari þarf að hafa tök á til að treysta ekki bara á eyðufyllingabókina.

Handbók í stærðfræðikennslu setur kennara í allt aðra stöðu en vinnubókarefni. Kennarinn verður í fyrsta lagi að kynna sér allt efni hennar áður en hann fer af stað. Hann verður að skipuleggja hvar hann ætlar að byrjar í kennslunni. Kennarinn verður að átta sig á hversu hratt eða hægt er farið, þar sem ekki er búið að búa til ákveðinn fjölda verkefna og blaðsíðna fyrirfram. Nemendurnir verða að skipuleggja verkefnin þar sem ekki er búið að ákveða fullkomlega hvert leiðinn liggur. Um leið geta þeir gefið kennaranum mikilvægar upplýsingar um hvert eigi að stefna næst. Þar sem bók Walters byggir á óhefðbundinni rúmfræði verður hún eitthvað sem allir geta notað í kennslu án mikillar þekkingar á stærðfræði. Ég tel nú samt ekki að þessi bók ein og sér leysi vandann en hún getur í það minnsta gefið okkur sýnishorn um hvernig við getum breytt vinnubrögðum. Breytt í aðferðir þar sem nemandinn er raunverulega

í brennidepli, hann varpar fram spurningunum, aflar sér upplýsinga og vinnur úr eða með þær og að lokum dregur hann ályktanir. Staða kennarans er enn mjög mikilvæg. Hann þarf að vera tilbúinn til að spyrja nemandann spurninga, hvetja nemandann til að prófa tilgátur sína og draga ályktanir. Nemendur þurfa einnig að fá tækifæri til að vinna með öðrum þar sem hópvinna veitir m.a. þjálfun í tjáningu og rökræðu, þeir geta leiðbeint hvor öðrum og oft koma upp fleiri og fjölbreyttari sjónarhorn og dýpri skilningur (Ingvar, 2002) Við þurfum að hafa að leiðarljósi öll markmið stærðfræðikennslunnar en þau mikilvægustu eru ef til vill að:

- Auka hlut tjáningar í stærðfræðinni þannig að nemendum verði eðlilegt að nota stærðfræðihugtök í talmáli og ritmáli.
- Auka hlut lausnaleita og þann sköpunarkraft sem býr í hverjum einstaklingi til að auka hæfni til að nýta stærðfræði við að leysa þær "þrautir" sem þeirra bíða á lífsleiðinni í starfi jafnt sem einkalífi.
- Laða fram gagnrýna hugsun nemandans, sjálfstraust, forvitni og löngun til að rannsaka og leita lausna

(Aðalnámskrá grunnskóla, 1999).

Í þessu samhengi er athyglisvert að benda lesendum á að skoða niðurstöður rannsókna Jo Boaler við Stanford University og Megan Stamples við University of Connecticut (2005) en þær gerðu langtímarannsókn við nokkra framhaldsskóla í USA. Rannsóknin beindist m.a. að aðferðum kennara og útfrá þeim var skoðaður árangur nemenda og viðhorf þeirra til stærðfræðinnar.

Lokaorð

Við þurfum að hugleiða hvort við viljum kenna stærðfræðina eða að nemendur okkar læri hana? Þetta tel ég mikilvægasta verkefni næstu ára innan stærðfræðikennslunnar. Við þurfum að skoða okkur sjálf og nemendur okkar. Nauðsynlegt er að styrkja menntun allra þeirra er sinna stærðfræðikennslu í skólakerfinu. Við verðum að vinna saman frá upphafi skólagöngu og upp allt skólakerfið ef við eigum að ná árangri. En til að ná árangri verðum við einnig að hafa mynd af stöðunni eins og hún er. Því er mjög mikilvægt að fram fari rannsóknir á skólastarfinu, hvernig staða stærðfræðikennslunnar er og finna bæði styrkleika okkar og veikleika. Margir horfa til betri tíma með breyttu skipulagi á námsgagnaútgáfu sem er nýkomið í gegnum lagakerfið (Lög nr. 71, 2007). En er það nóg, höfum við fólk í samfélaginu sem hefur næga þekkingu á stærðfræðikennslu til að semja námsefni og þá meina ég aðra en þá sem nú eru að vinna og gera sitt besta? Höfum við kennara sem hafa þekkingu til að velja á milli námsefnisflokka? Ég er ekki viss. Gleymum ekki að sá sem á völina á einnig kvölina? Mér er mjög minnistætt þegar „Almenna stærðfræðin“ var þýdd úr sænsku og gefin út. Þá höfðum við val og hvað völdum við? Flestallir skólar tóku þetta námsefni upp þrátt fyrir að til væri á markaðnum mun betra efni þó svo að það hafi ekki verið fullkomið. Hvers vegna völdu kennarar „Almennu stærðfræðina“? Ef til vill vegna þess að það var auðveldara að kenna hana. Hægt var að komast upp með að undirbúa ekkert sérstaklega hvern einasta kennslutíma. Nægjanlegt var að rétta fram bókina og svo gátu nemendur farið að vinna. Sumir rökstuddu val sitt með því að nú gætu nemendur lært á eigin hraða og forsemdum. En hvar voru vangavelturnar, tilgáturnar, rannsóknirnar og hlutbundnu verkefnin? Hver varð yfirfærslan á þekkingunni? Eðlilegt er líka að velta því fyrir sér hvort hluti vandans felist í því að margir kennarar sjá ekki þörfina á breytingum. Þeir telja leti og áhugaleysi nemendanna vera orsök vandans en ekki framsetning kennslunnar. En hvers vegna eru nemendur latir og áhugalausir? Er það vegna þess að skólakerfið hefur tekið frá þeim sköpunargleðina og tækifærin til að uppgötva, rannsaka, skoða og nema?

Mig langar til að ljúka þessari umfjöllun með tilvitnun í orð hins mikla stærðfræðing Pólya sem ég rakst á á netinu. Textinn er af síðunni:
http://www.mathematicallysane.com/analysis/polya.asp, og er umritaður eftir fyrirlestri sem Pólya hélt um 1960 fyrir kennaranema. Hann fær okkur til að hugleiða hversu miklu fremri þeir voru í kennslunni gömlu meistararnir eins og Socrates en nemendur þeirra voru kannski færri og þekkingin afmarkaðri en nú er. Og njótið nú:

> „You cannot learn just by reading. You cannot learn just by listening to lectures. You cannot learn just by looking at movies. You must add from the action of your own mind in order to learn something. You can call this the Socratic method since Socrates expressed it two thousand years ago very colorfully. He said that the idea should be born in the student's mind and the teacher should just act as a midwife. The idea should be born in the student's mind naturally and the midwife shouldn't interfere too much, too early. But if the labor of birth is too long, the midwife must intervene. This is a very old principle and there is a modern name for it -- discovery method. The student learns by his own action. The most important action of learning is to discover it by yourself. This will be the most important part in teaching such that what you discover by yourself will last longer and be better understood. “ (Pólya,1960)

Heimildaskrá

Aðalnámskrá grunnskóla, Stærðfræði (1999). Reykjavík: Menntamálaráðuneytið.

Boaler, J, Staples, M. (2005). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School n press.. Sótt á vef þan 5.11.2007
http://www.sussex.ac.uk/education/profile205572.html

Gardner, H. (1995).THE UNSCHOOLED MIND, How Children Think and How School Should Teach. United Sates of America. Basic Books.

Ingvar Sigurgeirsson, (2002). Litróf kennsluaðferðanna. (3.prentun) Reykjavík, Æskan ehf.

Lög nr. 71 um námsgögn frá 28. mars, 2007.
http://www.stjornartidindi.is/Advert.aspx?ID=4af58cd9-03e2-46e2-b196-0a06000befd1,
Sótt á vef þann 23.4.2007

Pólya,1960.
http://www.mathematicallysane.com/analysis/polya.asp
Sótt á vef 23.4.2007

Svanhildur Kaaber, og Heiðrún Kristjánsdóttir.(2005). Ársskýrsla KHÍ. Reykjavík: Kennaraháskóli Íslands.

Walter, M. I. (1995). BOXES, SQUARES and OTHER THINGS. (5.prentun). United Sates of America. The National Council of Teachers og Mathematics,inc.

Stærðfræðiævintýri

Guðlaug Ósk Gunnarsdóttir - Stærðfræðikennari Varmárskóla

Einu sinni fyrir ekki svo löngu, kom ferðasafn stærðfræðisafnsins Mathematikum til Íslands, nánar tiltekið í Mosfellsbæinn. Forsagan þessa alls er í stuttu máli sú, að í júnímánuði 2004 fór undirrituð á ICME 10 (sem er hvorki meira né minna en heimsþing stærðfræðikennara) sem þá var haldið í nágrenni Kaupmannahafnar.

Ég gjörsamlega féll fyrir einum fyrirlestrinum sem einmitt var haldin af Dr. Beutelspacher sem er upphafsmaður stærðfræðisafnsins Mathematikum. Sú hugmynd, að vinna með og handleika verkefni sem eru þannig úr garði gerð að almenningur hafi áhuga á að borga sig inn á stærðisafn er frábær.

Haustið 2004 fann ég sálufélaga, Steinunn Jónsdóttir heitir hún, og saman undirbjuggum við ferð í Mathematikum. Ævintýraferð sem varð að heilu ævintýri sem ekki er séð fyrir endann á.

Skipulag og framkvæmd

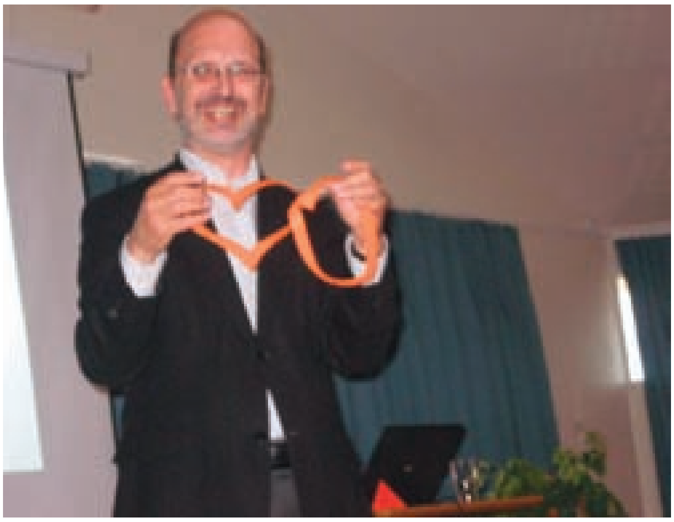
Alls má segja að 6 manns hafi borið hitann og þungann af komu safnsins hingað til lands, undirrituð, Steinunn Jónsdóttir sem nú er stærðfræðikennari við Borgarholtsskóla, Björn Þráinn Þórðarson sem er forstöðumaður skólaskrifstofu Mosfellsæjar, Sólborg Alda Pétursdóttir grunnskólafulltrúi, Ragnheiður Jóhannsdóttir grunnskólafulltrúi og síðast en ekki síst Guðbjörg Pálsdóttir lektor við KHI sem var okkur til halds og trausts. Einnig kom Ásta Steina Jónsdóttir skólastjóri Lágafellsskóla að undirbúningsferlinu.

Við funduðum reglulega veturinn 2006-7. Þegar búið var að festa leigutíma safnsins héldum við að allt væri í höfn en það var ýmislegt sm kom okkur á óvart til dæmis þarf að gera ráð fyrir tollskjölum þegar verið er að flytja hluti milli landa.

Vinna þurfti bækling, setja upp vefsíðu, rafrænt skráningskerfi, undirbúa komu safnins, undirbúa námskeiðin o.fl. sem tengist verkefni af þessu tagi.

Dr. Beutelspacher heiðraði okkur með nærveru sinni. Hann hélt fyrirlestur þar sem hann fór yfir sögu Mathematikum auk annars. Einnig gekk hann með gestum um safnið í lok fyrirlestrar þar sem viðfangsefnin voru skoðuð undir handleiðslu hans.

Úr bekkjarheimsókn.



Fyrirlestur dr. Beutelspacher.

Dr. Beutelspacher með leiðsögn á safni.

Alls voru haldin fjögur námskeið í tengslum við komu safnsins, þrjú ætluð grunnskólakennurum og eitt leikskólakennurum. Við Guðbjörg vorum umsjónarmenn námskeiðanna og völdum við að tengja viðfangsefni safnsins námskeiðunum. Til að mynda gerðu allir kviksjá og notuðu til þess spegilpappír, hálfa eldhúsrúllu, glærubút, pappírsræmum o.fl. Hér að neðan má sjá nokkra þátttakendur að störfum.

Námskeiðin voru tvíþætt. Annars vegar var nokkuð hefbundin uppsetning sem byggði á fyrirlestrum og verkefnavinnu og hins vegar var unnið á vettvangi, það er að segja á safninu sjálfu þar sem glímt var við safnmunina.

Boðið var upp á bekkjarheimsóknir þ.e. þeir kennarar sem sóttu námskeið gátu pantað tíma á safninu og komið með bekkinn sinn eða stærri hóp ef svo bar við. Gaman hefði verið að geta boðið fleiri skólum upp á slíkar heimsóknir.

Auk þess fóru allir nemendur í grunnskólum Mosfellsbæjar í skipulagða í heimsókn á safnið á skólatíma.

Heimsóknirnar gengu þannig fyrir sig að í byrjun var stutt kynning á viðfangsefnum safnsins. Nemendur fengu síðan úthlutað verkefni sem þeir glímdu við í 5 til 10 mínútur. Eftir það voru var frjáls tími á safninu.

Helgina 25. -26. ágúst var haldin bæjarhátíð Mosfellsbæjar *Í túninu heima haldin* og auðvitað var stærðfræðisafnið opið. Bæjarbúar sýndu framtakinu mikinn áhuga og sýndu það með því að koma og glíma við safnmunina. Sumir komu oftar en einu sinni.

Framhaldið ..

Við sem komum að þessu ævintýri vildum varðveita það sem þegar hafði áunnist með komu safnsins og námskeiðunum. Því var ákveðið að mynda alla safnmunina, auk leiðbeininga eða skýringa við hvern einasta safnhlut. Einnig þýddum við skýringarnar sem fylgdu hverjum hlut og bættum við athugasemdum og notuðum þá punkta sem komið höfðu fram á námskeiðunum. Magnús Elvar Jónsson sá um þann þátt og tók að sér að útbúa vefvíðu þar sem myndirnar og textabrotin verða aðgengileg þeim sem áhuga hafa á viðfangsefninu. Slóðin er:
http://truflun.net/eggert/maggi/matema/

Við höfum áhuga á að koma á laggirnar raunvísindasafni í Mosfellsbæ. Dr. Beutelspacher hefur sýnt áhuga á því að vera okkar mentor á þeirri vegferð. Þessa dagana er verið að vinna í hugmyndavinnu og þróunarferli sem vonandi leiðir til þessa að innan 5 ára verði þetta ævintýri lifandi og opið stærðfræðisafn.

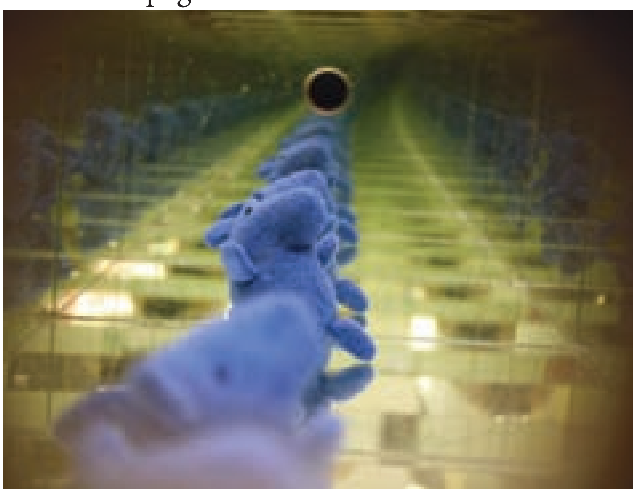
Ég hef persónulega áhuga á að þróa stærðfræðistofu Varmárskóla enn frekar og þá hugmyndavinnu sem ég lagði grunn að síðasta vetur. En vonandi verða lokaorð ævintýrisins þau að í Fleti birtist auglýsing þar sem stærðfræðisafnið í Mosfellsbæ er kynnt og ykkur er boðið á opnun þess.

Stærðfræðisafnið Mathematikum

Sigríður Ósk Indriðadóttir - Nemandi i 8. bekk Varmárskóla

Í sumar fór ég með foreldrum mínum til Giessen í Þýskalandi. Þar fór ég í stærðfræðisafnið Mathematikum. Mér fannst safnið mjög skemmtilegt og áhugavert. Ég hafði aldrei séð svona mikið af verklegum viðfangsefnum. Ég hafði bara séð svipuð viðfangsefni í Húsdýragarðinum.

Í ágúst 2007 kom ferðasafn Mathematikum til Íslands og auðvitað fór ég að skoða það bæði ein og með bekknum mínum. Það sem mér fannst skemmtilegast á stærðfræðisafninu var þrautaborðið. Þar voru alls konar verkefni. Mér fannst speglarnir líka áhugaverðir og það kom mér á óvart hvað hægt er að gera mikið með speglum.



Fyrst þegar ég kom á safnið sá ég bara sápukúlurnar. Ég sá það líka þegar ég kom með krökkum á safnið að sápukúluformin voru mest spennandi. Síðan fór ég að skoða fleiri viðfangsefni og komst þá að hvað það var auðvelt að gleyma hvernig setja átti verkefnin saman. Það var bara ekki hægt að læra hvernig átti að gera og þess vegna eru verkefnin alltaf spennandi og skemmtileg.

Ég myndi alveg vilja hafa svona safn hérna á Íslandi og skemmtilegast væri ef það væri stórt eins og Mathematikum í Giessen.

Saga stærðfræðimenntunar á Íslandi

Kristín Bjarnadóttir - Dósent við Háskóla Íslands

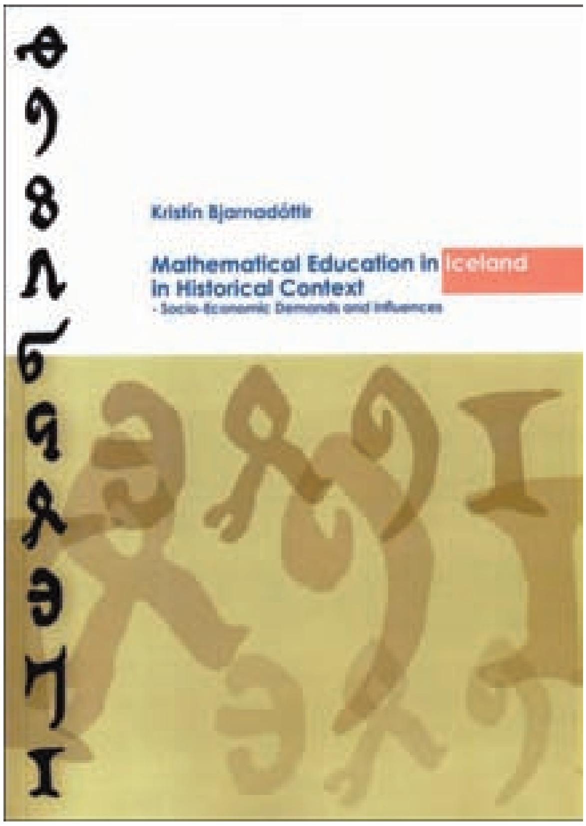
Ritgerð um sögu stærðfræðimenntunar á Íslandi var tekin til doktorsvarnar við Háskólann í Hróarskeldu nýlega, nánar tiltekið í febrúar 2006. Ritgerðin er á ensku og ber heitið *Mathematical Education in Historical Context – Socio-Economic Demands and Influences*. Hún hefur verið gefin út í bók hjá Háskólaútgáfunni. Höfundur hennar er Kristín Bjarnadóttir, dósent við Háskóla Íslands. Rannsóknarspurning ritgerðarinnar er:

> Að hvaða leyti hefur stærðfræðimenntun þróast líkt eða ólíkt á Íslandi og í nágrannalöndunum og hvaða skýringar eru á því?

Þegar leita á skýringa á því sem gerðist á seinni hluta tuttugustu aldar verða fyrir atburðir fyrri hluta aldarinnar, lög og reglugerðir. Tímamót urðu við fræðslulögin 1946 og 1907. Spurningar vakna. Af hvers konar rótum voru þessir lagabálkar sprottnir, hvers vegna voru þeir réttarbót á sínum tíma? Hvaða áhrif höfðu lög um uppfræðing barna í skrift og reikningi 1880? Hver voru áhrif upplýsingarinnar á stærðfræðinám og -kennslu á Íslandi? Ritgerðin varð að yfirgripsmiklu yfirliti yfir sögu íslenskrar stærðfræðimenntunar frá upphafi, krydduð hugleiðingum um ástæður fyrir stöðu mála hverju sinni. Í eftirfarandi ágripi verður lítillega greint frá næsta undanfara nútímans, tímabili nýstærðfræðinnar upp úr 1960, og það skoðað í samanburði við nágrannalöndin.

Fyrri hluti tuttugustu aldar

Almenningsfræðsla var á ábyrgð heimilanna á Íslandi fram á 20. öld, og í mörgum sveitum landsins að hluta til fram að setningu grunnskólalaganna 1974. Lög frá 1880 um uppfræðing barna í skrift og reikningi áttu þátt í því að margar kennslubækur í reikningi komu fram á sjónarsviðið allt frá þeim tíma og fram undir 1930. Þótt kennslubækurnar væru þunnar, í litlu broti og hefðbundnar að sniði buðu þær upp á nokkurn fjölbreytileika í framsetningu. Þetta breyttist er Ríkisútgáfa námsbóka var sett á stofn á kreppuárunum 1937 og tók til ókeypis dreifingar *Reikningsbók* Elíasar Bjarnasonar fyrir kennslu í 10-13 ára bekkjum. Þá varð ekki lengur rúm fyrir bækur annarra höfunda þótt til dæmis tvær aðrar kennslubækur i reikningi, eftir þá Sigurbjörn Á. Gíslason (1911–1914) og Steingrím Arason (1928), hafi hlotið löggildingu til kennslu í barnaskólum árið 1929. Á því varð ekki breyting fyrr en um 1970, þegar nýbylgjan í stærðfræðikennslu



var komin til sögunnar. Elías Bjarnason var merkur fulltrúi aldamótakynslóðarinnar sem braust til mennta við erfiðar aðstæður. Elíasi varð mikið úr þeim fáu stundum sem hann naut formlegrar skólagöngu og er ekki við hann að sakast þótt bækur hans væru notaðar langtum of lengi.

Dr. Ólafur Daníelsson nam stærðfræði við Hafnarháskóla í byrjun 20. aldar. Hann byggði upp stærðfræðikennslu við Kennaraskólann frá stofnun hans 1908 fram til 1920 er hann var fastráðinn að Menntaskólanum í Reykjavík. Smám saman dró úr stærðfræðikennslu við Kennaraskólann eftir fráhvarf hans. Starfinu var gegnt af stundakennurum fram til ársins 1962. Ólafur Daníelsson var mikilhæfur kennari og kennslubókarhöfundur. Þriðja útgáfa *Reikningsbókar* (1906, 1914, 1920) hans var sniðin að kennslu í neðstu bekkjum Menntaskólans í Reykjavík sem þá var sex ára skóli. Kennslubókin varð útbreidd í gagnfræða- og héraðsskólum, þrátt fyrir það að hún þætti nokkuð þung. Hefur vafalaust ráðið miklu að ýmsir reyndu að taka gagnfræðapróf menntaskólanna utanskóla til að setjast í lærdómsdeild. Landsprófi miðskóla var komið á með fræðslu -lögunum 1946 í þeim tilgangi að jafna aðgengi nemenda að langskólanámi og svipta menntaskólana jafnframt valdi til að velja nemendur sína. Prófið var haldið í skólum um allt land en námsefni annars bekkjar Menntaskólans í Reykjavík var gert að námsefni landsprófsins. Hélst það óbreytt að mestu í tvo áratugi en landsprófi miðskóla var fram haldið til ársins 1977. *Reikningsbók* og *Algebra* Ólafs Daníelssonar voru höfuðnámsefnið til landsprófs í stærðfræði.

Verkefni í bókum Ólafs og Elíasar urðu æ fjær veruleika nemenda þegar fram liðu stundir. Þau lýstu horfnum þjóðfélagsháttum, fólki sem ferðast á bátum og hestum og verslar með hey og hesta, og vinnukonum sem þiggja laun í kjólum og skóm. Tvær námsbókaraðir, ritaðar fyrir unglingastig gagnfræðaskólans, voru gefnar út á árunum 1950 og 1962 en snið þeirra og innihald voru með svipuðum hætti og bók Ólafs Daníelssonar þótt efni dæmanna hentaði betur breyttum tímum. Landsprófið, sem var í fyrstu réttarbót fyrir ungmenni dreifbýlisins, staðnaði í námsefni neðri bekkja Menntaskólans í Reykjavík eins og það var samkvæmt reglugerð frá 1937. Form prófverkefnanna og innihald breyttust mjög lítið, jafnt í stærðfræði sem öðrum greinum. Talið var eðlilegt að innan við 15% árgangsins næðu prófinu með einkunn sem veitti rétt til inngöngu í menntaskóla og kennaraskóla. Landsprófið varð að hindrun í þjóðfélagi sem hafði vaxandi þörf fyrir fjölbreytta menntun. Ekki bætti úr skák að kennslubækur frá þriðja áratug tuttugustu aldar voru einu námsgögnin í stærðfræði í boði fyrir efri deildir barnaskólastigsins. Þegar komið var fram um 1960 varð stöðnun í stærðfræðimenntun æ ljósari.

Nýbylgjan í stærðfræðimenntun um 1960

Í öðrum löndum Evrópu og Bandaríkjunum fór fram töluverð umræða á sjötta áratugnum og í upphafi hins sjöunda um endurnýjun stærðfræðikennslu. Undirstraumur þeirra var sterk krafa um menntun fyrir alla, sem eðlilega fól í sér stærðfræði fyrir alla. Krafan birtist í aukinni eftirsókn eftir menntun á efri skólastigum. Hugmyndum um endurnýjun og nýsköpun stærðfræðikennslu var stefnt saman á fundi stærðfræðinga, stærðfræðikennara og sérfræðinga um stærðfræðikennslu í ráðuneytum í Royaumont í Frakklandi 1959. Til fundarins var stofnað af hálfu OEEC, Efnahagssamvinnustofnunar Evrópu. Hugmyndir þeirra, sem stóðu að fundinum í Royaumont, voru að auka veg hagnýttrar stærðfræði, en raunin varð sú að áhrifamiklir aðilar komu því til leiðar að mengjafræði, rökfræði og abstrakt algebra færðust niður á menntaskólastig (Cooper, 1985: 160–161) og áform komu upp um að kynna þessar greinar stærðfræðinnar á yngri stigum. Þetta var upphaf alheimshreyfingar um svonefnda „nýstærðfræði“. Ísland, Spánn og Portúgal, ein aðildarlanda OEEC, áttu ekki fulltrúa í Royaumont. Upplýsingar um fundinn bárust íslenskum stærðfræðikennurum, s.s. Guðmundi Arnlaugssyni, frá dönskum kollegum, þeirra á meðal Svend Bundgaard, prófessor í stærðfræði við háskólann í Árósum.

Í ritgerðinni um stærðfræðimenntun á Íslandi er innleiðing nýstærðfræðinnar hér á landi borin saman við það sem gerðist í nágrannalöndunum Danmörku, Noregi og Englandi. Í öllum löndunum fjórum komu fram nokkur atriði sem talin voru réttlæta það að taka nýjar og framandi hugmyndir inn í skólastærðfræði. Skortur þótti á mannafla til kennslu og rannsókna á sviði raunvísinda og tækni og við hann tengdist ótti um að dragast aftur úr öðrum löndum á þeim sviðum. Yfirvöld höfðu væntingar um félagslegar og efnahagslegar framfarir, studdar af OEEC, sem síðar varð að OECD, Efnahags- og framfarastofnuninni. Kennarar gerðu sér vonir um að hin nýju hugtök yrðu til að dýpka skilning á stærðfræðinni. Þessar vonir voru byggðar á kenningum svissneska sálfræðingsins Piaget, en eftir honum var haft að myndbygging náttúrlegrar hugsunar væri nær nýstærðfræðinni en hinni hefðbundnu (Kristín Bjarnadóttir, 2006: 261, 336). Var þar væntanlega meðal annars átt við mengjahugtakið.

Guðmundur Arnlaugsson varð leiðtogi þeirra sem koma vildu á breytingum í íslenskri stærðfræðimenntun. Guðmundur kenndi stærðfræði við Menntaskólann í Reykjavík og við verkfræðideild Háskóla Íslands. Hann var námstjóri í stærðfræði á árunum 1964–1966. Hann gerði könnun á ástandi stærðfræðikennslu á skyldunámsstigi, sem því miður hefur ekki fundist en yrði merkileg heimild ef hún kæmi í leitirnar. Hann ritaði einnig kennslubókina *Tölur og mengi* sem tekin var til kennslu í landsprófsdeildum gagnfræðaskólanna árið 1966. Í formála bókarinnar segir Guðmundur:

> Áhersla á leikni og vélrænum vinnubrögðum hefur þokað fyrir kröfum um aukinn skilning. Þessi þróun hefur ýtt nokkrum grundvallarhugtökum úr rökfræði, mengjafræði og algebru niður á barnaskólastig. Reynsla víðs vegar að bendir til þess, að börn – og það jafnvel á unga aldri – eigi tiltölulega auðvelt með að tileinka sér þessi hugtök, sem áður voru eigi kynnt fyrr en á háskólastigi, og hafi gaman af þeim. Enn fremur virðast þau stuðla að auknum skýrleik og nákvæmni í hugsun og reikningi (Guðmundur Arnlaugsson, 1966: 4-5).

Formálinn endurspeglar þær væntingar sem menn höfðu um að nýstærðfræðin stuðlaði að bættri stærðfræðimenntun. Sama ár og bókin *Tölur og mengi* kom út hófst tilraun á vegum Fræðsluskrifstofu Reykjavíkur með nýtt námsefni í barnaskólum samkvæmt ábendingu Guðmundar. Efnið var eftir kennara í barnaskóla á Frederiksberg í Kaupmannahöfn, Agnete Bundgaard, systur Svends Bundgaard, sem Guðmundur Arnlaugsson þekkti vel. Efni fyrsta bekkjar var þá fullbúið en efni næstu tveggja ára var enn á tilraunastigi og samning annars ekki hafin. Strax næsta ár var ákveðið að allir skólar í Reykjavík ættu kost á að taka þetta efni upp. Alls sóttu 86 kennarar endurmenntunarnámskeið um nýja námsefnið og var það kennt í fjölmörgum sjö ára bekkjum í Reykjavík haustið 1967 (Kristinn Gíslason, 1978).

Eins og gefur að skilja varð mikið umrót af hinum snöggu umskiptum frá rótgrónu námsefni yfir í Bundgaard-efnið, sem var mjög fræðilegt. Margir voru hrifnir, a.m.k. fyrst í stað. Aðrir lentu í vandræðum og nokkrir skiptu yfir í hefðbundið námsefni eftir fyrstu árin. Einungis fimm ár liðu þar til tekið var að huga að nýju efni. Tíu árgangar fengu Bundgaard-efnið og meðal fjögurra þeirra, sem fæddir voru á árabilinu 1962–1965, nutu um 40% árgangsins þessa námsefnis öll barnaskólaárin.

Ferli nýstærðfræðinnar

Frumkvæði að því að innleiða nýju stærðfræðina kom frá háskólakennurum í öllum samanburðarlöndunum og þeir höfðu mest að segja um innihaldið en ekki kennararnir sem sáu um kennsluna í barna- og gagnfræðaskólunum. Í Noregi voru ákvarðanir um að breyta námsefni skyldunámsstigsins teknar eftir skipulegt ferli sem tók nokkur ár. Á meðan náði endurskoðunarbylgjan hámarki og tók að fjara út. Á Íslandi voru ákvarðanir teknar með skjótum hætti og Bundgaard-námsefnið fór óheft út í kennslu í barnadeildum eftir einungis eins árs prófun með völdum kennurum. Ferlið var vanþróað og fór að hluta til úr böndunum, til dæmis þegar ákveðið var taka Bundgaard-efnið til almennrar kennslu áður en námsefnið fyrir 10-12 ára börn hafði verið gefið út í Danmörku.

Í öllum löndunum fjórum voru áberandi einstaklingar sem sýndu mikið frumkvæði og fylgdu endurskoðuninni eftir af mikilli sannfæringu. Meðal þeirra voru Svend Bundgaard og Bent Christiansen í Danmörku og Guðmundur Arnlaugsson og Björn Bjarnason á Íslandi. Þessir menn hrifu aðra með sér, sáu þeim fyrir aukinni menntun og fólu þeim verkefni.

Í samanburðarlöndum var tvenns konar kennaramenntun og tvenns konar skólahefð. Töluverð skil voru einnig hérlendis á milli námskrár, kennslu og menntunar kennara í menntaskólum og í landsprófsdeildum annars vegar og í skyldunámi hins vegar. Umræðan var ólík sem og hugmyndir um kennslu og námsefni. Þetta leiddi til þess að menn upplifðu breytingarnar á ólíkan hátt.

Í mörgum tilvikum litu kennarar svo á að nýstærðfræðin fælist einungis í breytingum á inntaki námsefnisins og hugmyndir um breytta hugsun um stærðfræði náðu skammt. Guðmundur Arnlaugsson ritaði til dæmis í grein í Menntamálum árið 1967:

> ... ég [er] hræddur um, að sumir átti sig ef til vill ekki nógu rækilega á því nýja, sem nú er á döfinni, sjái þar aðeins eina aðferðina enn til viðbótar við allar þær gömlu
> (Guðmundur Arnlaugsson, 1967: 43).

Það var ólíkt með löndunum fjórum að í samanburðarlöndunum hafði þróunarvinna staðið yfir. Í Noregi og Danmörku var búið að undirbúa nýjar námskrár í stærðfræði (Gjone, 1983; Høyrup, 1979) og í Englandi var hafið samstarf við áhrifamikla aðila á sviði iðnaðar og atvinnureksturs (Cooper, 1985). Nýstærðfræðin truflaði þetta starf. Á Íslandi hafði endurskoðun fræðslulaganna eftir seinni heimstyrjöld aðeins varðað ytri umbúnað skólanna og stærðfræðimenntunin hafði staðnað í kennslubókum þriðja áratugarins. Nýstærðfræðin olli því ekki röskun á þróunarstarfi heldur vakningu um að hefja slíkt starf.

Aldursbilið 10-13 ára reyndist viðkvæmast fyrir breytingunum í öllum löndum. Á Íslandi fylgdu breytingunum nýjar reikniaðferðir sem foreldrar þekktu ekki og hvorki gátu né máttu aðstoða börn sín við stærðfræðinámið. Ferlið leiddi til árekstra en einnig til samræðu milli ólíkra kennarahópa og leysti upp stéttamörk. Ferlið varð til þess að bæta stærðfræðimenntun íslenskra kennara sem vanrækt hafði verið. Fjöldi kennara, ekki síst konur, sóttu endurmenntunarnámskeið og tóku að skrifa námsefni á vegum Skólarannsóknadeildar Menntamálaráðuneytisins.

Samantekt

Endurnýjun skólastærðfræðinnar á sjöunda áratugum var innifalin í kröfunni um menntun fyrir alla. Margt var líkt með ferli því sem átti sér stað á Íslandi og í öðrum löndum við innleiðingu hennar. Hún var drifin áfram af hugsjónum einstaklinga og vakti vonir um efnahagslegar og félagslegar framfarir og um dýpri skilning á stærðfræðinni. Vonirnar rættust aðeins að litlu leyti og þá mun síðar en vænst var. Endurnýjunin stuðlaði að samræðu milli skólastiga um stærðfræðimenntun. Í ritgerðinni eru færð rök að því að hún hafi verið farvegur fyrir frumkvæði og sköpunarkraft kennara á öllum skólastigum á Íslandi. Hún varð einnig upphafið að stærðfræðimenntun sem fræðigrein um heim allan.

Heimildir

Anna Kristjánsdóttir (1996). Stærðfræðinám. Meginstefnur og viðfangsefni. Reykjavík, Kennaraháskóli Íslands.

Cooper, B. (1985). Renegotiating Secondary School Mathematics. A Study of Curriculum Change and Stability. London, The Falmer Press.

Elías Bjarnason (1927–1929). Reikningsbók I-II. Reykjavík, Bókaverslun Guðm. Gamalíelssonar.

Elías Bjarnason (1937). Reikningsbók (endurútgefin í 4 heftum). Reykjavík, Ríkisútgáfa námsbóka.

Gjone, G. (1983). “Moderne matematikk” i skolen. Internasjonale reformbestrebelser og nasjonalt læreplanarbeid, I–VIII. Oslo.

Guðmundur Arnlaugsson (1966). Tölur og mengi. Reykjavík, Ríkisútgáfa námsbóka.

Guðmundur Arnlaugsson (1967). Ný viðhorf í reikningskennslu. Menntamál 40(1), 40–51.

Høyrup, J. (1979): Historien om den nye matematik i Danmark – en skitse. Í P. Bollerslev (ritstj.): Den ny Matematik i Danmark, 49–65. Copenhagen, Gyldendal.

Kristinn Gíslason (nóvember 1978). Nýja stærðfræðin, óprentuð skýrsla til fræðslustjórans í Reykjavík.

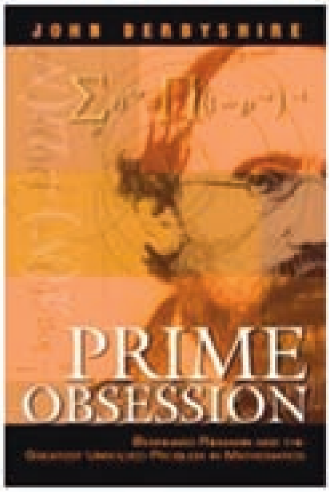
Kristín Bjarnadóttir (2006). Mathematical Education in Iceland in Historical Context – Socio-Economic Demands and Influences. Reykjavík, Háskólaútgáfan.

Ólafur Daníelsson (1920). Reikningsbók, 3. útgáfa (endurútgefin til 1956). Reykjavík, Arinbjörn Sveinbjarnarson.

Ólafur Daníelsson (1927). Kennslubók í algebru (endurútgefin til 1971). Akureyri, Bókaverslun Þorsteins M. Jónssonar.

Sigurbjörn Á. Gíslason (1911–1914). Reikningsbók I–VI. Reykjavík, Bókaverslun Sigfúsar Eymundssonar.

Steingrímur Arason (1928). Reikningsbók handa alþýðuskólum, 4. útgáfa endurbætt og aukin. Reykjavík, Gutenberg.



Ársæll Másson: Um bókina *PRIME OBSESSION*, eftir John Derbyshire

Joseph Henry Press, 500 Fifth Street, NW, Washington, DC 20001

Bókin *Prime Obsession* er tilraun til að gera fleirum en útvöldum stærðfræðingum mögulegt að skilja meginatriðin sem liggja að baki hinni frægu tilgátu Riemanns og gefa einhverja mynd af þeim rannsóknum sem átt hafa sér stað frá því að tilgátan var sett fram. Undirtitill bókarinnar er *Bernard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, og leggur bókin því töluverða áherslu á Riemann sjálfan og hugmyndasögu kringum tilgátu hans. Höfundur bókarinnar, John Derbyshire, er Breti búsettur í Bandaríkjunum, stærðfræðingur og málfræðingur. Sú hugmynd að skrifa bók eins og þessa þætti flestum fráleit, en staðreyndin er sú að hún gengur upp, a.m.k. hvað það varðar að það er til fólk sem er tilbúið að lesa bækur af þessu tagi. Ég held reyndar að það sé óhófleg bjartsýni að ætla sér að kynna tilgátu Riemanns fyrir fólki sem hvorki kann veldareglur né þekkir deildun og heildun, og ef einhver lesandi bókarinnar fékk sinn fyrsta kúrs í veldum í þessari bók þá held ég að sá maður hafi ekki klárað bókina. En þrátt fyrir það þá sýnir höfundurinn ótrúlega hæfileika í að útskýra skriflega hvað felst í formúlum og stærðfræðilegum texta, bæði þegar hann útskýrir nákvæmlega hvað í táknunum felst og líka þegar hann lýsir hlutunum á alþýðumáli. Bókin er vel skrifuð og hefur framvindu sem minnir fremur á skáldsögu en stærðfræðirit eða sögubók, en þessi bók er sitt lítið af hvoru. Sérstök rækt er lögð við að útskýra hvað liggur að baki formúlum og útreikningum öllum, og gerir það bókina mun léttari og skemmtilegri aflestrar, því útskýringarnar eru einkar læsilegar og vel fram settar. Ég rek hér meginatriðin í efni bókarinnar til þess að gefa þeim lesendum sem ekki þekkja efnið einhverja hugmynd um hvað málið snýst. Sögulegi þráðurinn, sem reyndar er líka bæði merkilegur og skemmtilegur, mætir þó afgangi. Í bókinni er hann rakinn og ýmsum skemmtilegum sögum og útskýringum fléttað saman við frásögnina.

Frumtalnasetningin og tilgáta Riemanns

Frumtalnafallið π

Fallið $\pi(n)$ er skilgreint fyrir allar náttúrlegar tölur, og fallgildi tölunnar n er fjölda frumtalna sem eru minni eða jafnar tölunni n. Við getum sett upp töflu fyrir fallið og séð nokkur fallgildi.

n	$\pi(n)$
1	0
2	1
5	3
10	4
100	25
1.000	168
1.000.000	78.498
1.000.000.000	50.847.534
1.000.000.000.000	37.607.912.018

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

sem þýðir að fjöldi frumtalna minni eða jöfn n nálgast brotið á hægri hlið hlutfallslega eftir því sem n stækkar. Við fáum úr þessu sambandi jafngildar fullyrðingar á einfaldan hátt:

Stærð n-tu frumtölunnar er $\sim n \cdot \log n$

Líkur þess að náttúrleg tala n sé frumtala eru $\sim \dfrac{1}{\log n}$

Þessi gerð frumtalnasetningarinnar, sem er komin upphaflega frá Gauss, var seinna endurbætt með aðferðum stærðfræðigreiningar. Búið var til fall, $Li(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{\log t}$, en samkvæmt þessari skilgreiningu uppfyllir $Li(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ (líkja má heildinu við það að lagðar séu saman líkur þess að sérhver tala t á bilinu 0 til x sé frumtala), svo nú fæst stærðfræðigreiningarhæf útgáfa af frumtalnasetningunni,

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

Ath: Einhverjir kunna að hafa áhyggjur af því að fallið $\dfrac{1}{\log x}$ sé ekki skilgreint í $x = 1$, en ef x er stærra en 1 verður heildið endanleg tala á „eðlilegan" hátt. Hægt er að skilgreina Li-fallið með því að heilda frá 2 upp í x, en það er óneitanlega skemmtilegra að fá út rétt gildi fyrir $x = 2$ (núllstöð Li-fallsins er í $x \approx 1,451$).

Frumtalnasetningin var sönnuð árið 1896 (Hadamard, Poussin), með aðferðum tvinnfallagreiningar. Almennt var talið að ekki væri gerlegt að sanna hana öðruvísi, en árið 1949 fann Norðmaðurinn Atle Selberg sönnun sem ekki nýtir tvinnföll.

Tilgáta Riemanns

En hversu gott mat á fjölda og dreifingu frumtalnanna fæst með frumtalnasetningunni? Í grein sinni *Um fjölda frumtalna minni en gefin tala* frá 1859, þá setur Riemann fram mat á skekkjuliðnum sem fall af öllum ekki augljósu núllstöðvum Zeta-fallsins. Ennfremur setur hann fram hina frægu tilgátu sína,

Allar ekki augljósu núllstöðvar Zeta-fallsins hafa raunhlutann ½.

Þá er að segja aðeins frá Zeta-fallinu. Fyrir rauntölur stærri en 1 dugir upphafleg mynd þess (og reyndar líka fyrir allar tvinntölur með raunhluta stærri en 1):

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

Hvað er það sem tengir saman Zeta-fallið og frumtalnasetninguna? Umskrift Eulers gegnir lykilhlutverki í þeim tengslum, en hann skrifaði óendanlegu summuna sem óendanlegt margfeldi yfir frumtölurnar, og þarmeð felur Zeta-fallið í sér upplýsingar um dreifingu frumtalnanna.

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}\quad (p \text{ er frumtala})$$

Flestir myndu halda að meiriháttar reikninga þurfi til að breyta óendanlegri summu yfir náttúrlegu tölurnar í óendanlegt margfeldi yfir frumtölurnar, en í höndum Eulers var þetta ekki flókið. Ef summan er margfölduð með liðnum $\frac{1}{2^s}$, þá fæst summan

$$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\ldots$$

Mismunur þessarar summu og þeirrar upphaflegu fæst með því að strika út alla liði sem hafa nefnara sem fyrsta frumtalan, 2, gengur upp í. Þetta getum við skrifað svona,

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\varsigma(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\ldots$$

Nú endurtökum við sama leikinn með næstu frumtölu, tölunni 3. Ef summan í hægri hlið jöfnunnar er margfölduð með $\frac{1}{3^s}$, þá fæst summa þar sem allir nefnararnir eru margfeldi af 3, og ef við drögum þá frá þessari summu, þá hverfa allir þeir liðir. Það að taka summuna alla og draga frá henni margfeldi hennar með $\frac{1}{3^s}$ svarar til þess að margfalda summuna með $\left(1-\frac{1}{3^s}\right)$,

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\varsigma(s)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\ldots$$

Þeir sem þekkja sáldur Eratosþenesar sjá nú hvað er á ferðinni. Þegar við tökum næst frumtöluna 5, þá margfaldast vinstri hliðin með $\left(1-\frac{1}{5^s}\right)$ en hægra megin hverfa þeir liðir sem hafa nefnara sem 5 gengur upp í og jafnan verður þá svona:

$$\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\varsigma(s)=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\ldots$$

Ef við höldum svona áfram fyrir allar frumtölurnar, þá verður vinstri hliðin margfeldi yfir frumtölurnar sinnum $\varsigma(s)$, en hægri hliðin verður bara talan 1. Þá þarf bara að einangra $\varsigma(s)$ og umskrifa lítillega,

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\ldots\cdot\varsigma(s)=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\varsigma(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\ldots}=\frac{1}{\left(1-2^{-s}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-3^{-s}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-5^{-s}\right)}\cdot\ldots$$

$$\Updownarrow$$

$$\varsigma(s)=\prod_{\substack{p\text{ er}\\ \text{frumtala}}}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$$

Mikilvægi greinar Riemanns, *Um fjölda frumtalna minni en gefin tala*, er fólgið í hugmyndum þeim sem koma þar fram, og ein þeirra er Riemann-tilgátan sjálf. Sannanirnar á frumtalnasetningunni sjálfri 37 árum seinna byggðu til dæmis á þeim hugmyndum sem hann hafði sett fram í þessari grein. Til þess að geta sett fram tilgátu Riemanns, þá þarf að útvíkka Zeta-fallið yfir á allt tvinntalnaplanið (nema s = 1), og það út af fyrir sig er þó nokkur fyrirhöfn og er gert í nokkrum áföngum. Þegar því er lokið kemur í ljós að allar rauntölur sem eru núllstöðvar eru neikvæðu, sléttu heiltölurnar (-2, -4, -6, . . .). Það eru augljósu núllstöðvarnar. Aðrar núllstöðvar, sem ekki teljast augljósar, eru líka óendanlega margar og hafa raunhluta sem er á milli 0 og 1. Tilgátan segir að raunhluti þeirra allra sé ½. Einnig gildir að þær eru spegilmyndir um raunásinn, þ. e. ef $z=a+ib$ er núllstöð, þá er $\bar{z}=a-ib$ það líka, og ef tilgátan stenst ekki, þ. e. til er núllstöð $z=\frac{1}{2}+a+ib$ með $a\neq 0$, þá er $z=\frac{1}{2}-a+ib$ einnig núllstöð, þ. e. þær speglast þá um línuna x = ½. Fjölmargar núllstöðvar eru nú þekktar, og þeim þekktu fjölgar stöðugt.

Síðan kemur í ljós að þessi dreifing á ekki augljósu núllstöðvum Zeta-fallsins er langt frá því að vera einstök. Má nefna að eigingildi hermetískra slembifylkja, en slík fylki koma við sögu í eðlisfræði, lúta sömu dreifingu og einnig er hægt að setja upp mörg fleiri módel sem dreifast á sama hátt. Því tengjast sífellt fleiri og fleiri svið rannsóknum á Riemann-tilgátunni, svo ráðist er að henni á mörgum ólíkum vígstöðvum.

Fullyrðingar jafngildar Riemann-tilgátunni

Ein aðferð til að fá fram fullyrðingu sem er jafngild Riemann-tilgátunni er eftirfarandi (sjá bls. 245-251):

$$\frac{1}{\varsigma(s)}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\ldots$$

Þótt ekki sé árennilegt við fyrstu sýn að margfalda uppúr svigunum, þá má þó sjá að ef valinn er liðurinn 1 úr öllum svigunum fæst 1, og ef valinn er liðurinn 1 úr öllum svigum nema einum fæst neikvæður sá liður sem ekki er 1, svo við fáum liðina

$$1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}-\frac{1}{11^s}-\frac{1}{13^s}-\ldots$$

síðan verða þeir liðir jákvæðir sem innihalda slétt margfeldi af frumtölum í nefnaranum, en neikvæðir hinir sem eru margfeldi af oddatölufjölda frumtalna,

$$1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}-\frac{1}{11^s}-\frac{1}{13^s}-\ldots$$

$$+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{14^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{22^s}+\ldots$$ (nefnarinn er margfeldi tveggja frumtalna)

$$-\frac{1}{30^s}-\frac{1}{42^s}-\frac{1}{66^s}-\frac{1}{70^s}-\frac{1}{78^s}-\ldots$$ (nefnarinn er margfeldi þriggja frumtalna)

o.s.frv. Röðum liðunum nú í stærðarröð og fáum að

$$\frac{1}{\varsigma(s)}=1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{10^s}-\frac{1}{11^s}-\frac{1}{13^s}+\frac{1}{14^s}+\frac{1}{15^s}\ldots \qquad (*)$$

og í hægri hliðina vantar einungis þá liði þar sem nefnarinn er náttúrleg tala sem er ferningstala, eða margfeldi af ferningstölu. Á þessu stigi málsins þarf að kynna til sögunnar fall sem kennt er við August Ferdinand Möbius. Möbiusfallið er skilgreint á eftirfarandi hátt:

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{ef } n=1\\ 0 & \text{ef } n \text{ inniheldur ferningsþátt}\\ -1 & \text{ef } n \text{ er margfeldi oddatölufjölda mismunandi frumtalna}\\ 1 & \text{ef } n \text{ er margfeldi slétts fjölda mismunandi frumtalna}\end{cases}$$

Með því að nota Möbiusfallið verður jafnan (*)

$$\frac{1}{\varsigma(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

Að lokum, til að einfalda framsetninguna enn frekar, notum við fall Mertens, en fallgildi þess í n er summa Möbiusfallsins frá 1 upp í n,

$$M(n)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)$$

Nokkur gildi Mertensfallsins eru:

n	1	2	3	4	1000	2000	1.000.000	2.000.000	3.000.000
$M(n)$	1	0	-1	-1	2	5	212	-247	107

Nú gildir, að eftirfarandi fullyrðing,

$$M(k)=O\left(k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \text{fyrir öll } \varepsilon>0$$

er jafngild Riemann-tilgátunni.

Glöggur lesandi hefur sjálfsagt tekið eftir að til þess að útskýra þessa fullyrðingu þurfti í sjálfu sér ekki annan aðdraganda en að skilgreina Möbiusfallið og Mertensfallið, án formálans um að margfalda uppúr svigunum. En það er einmitt þar sem tengingin er við Riemann-tilgátuna. Báðar fullyrðingarnar lýsa dreifingu núllstöðva Zeta-fallsins. En það er samt athyglisvert að upplýsingarnar um dreifingu núllstöðvanna virðast færast yfir í Mertensfallið eingöngu í gegnum formerki liðanna þegar margfaldað er uppúr $\frac{1}{\varsigma(s)}$.

Bókin er í stórum dráttum byggð þannig upp að kaflar með oddatölunúmeri innihalda stærðfræðilega umfjöllun en sagan er rakin í köflum með sléttu númeri. Það er mikill kostur við hana að það er hægt að lesa hana sér til ánægju og gagns án þess að kafa ofan í sérhverja frásögn og formúlu í smáatriðum. Kaflarnir eru líka sumir ansi sjálfstæðir, svo hægt er að lesa þá eina og sér, eða hlaupa yfir kafla og kafla. Ég las töluvert af söguköflunum síðast, og kom það ekki að sök. Ég get tvímælalaust mælt með þessari bók fyrir alla þá sem hafa gaman af stærðfræðisögu, og efni bókarinnar höfðar örugglega til flestra stærðfræðikennara á framhaldsskólastigi, auk annarra.

Flatarmál - Ummál

Jónína S. Marteinsdóttir - Kennari við Engidalsskóla Hafnarfirði

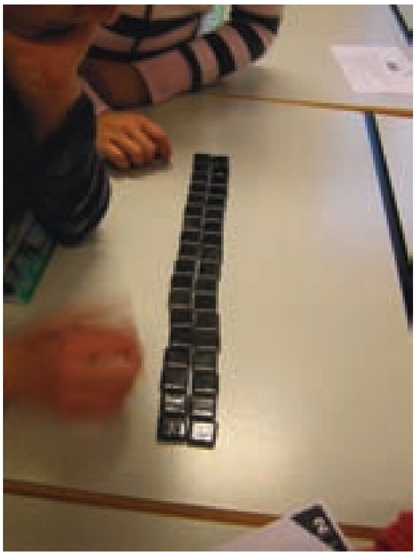
Ég hef mikla trú á hlutbundinni vinnu þegar kemur að rúmfræðinámi. Meðfylgjandi verkefni er í miklu dálæti hjá mér því það opnar augu nemenda fyrir muninum á hugtökunum flatarmál og ummál, sem eilíflega flækist fyrir börnum.

Ég hef lagt verkefnið fyrir í miðdeild og hafa nemendur í 7. bekk, sem ekki hafa unnið sambærilegt verkefni jafnmikið gagn af vinnunni og nemendur í 5. bekk. Mér finnst gott að geta vísað í flísarnar þegar ég ræði síðar um flatarmál og ummál við krakkana því það kallar fram mynd í huga þeirra úr vinnunni.

Umræður um mismunandi ummál þótt flatarmálið sé alltaf það saman kalla fram vangaveltur. Tenging við margföldunartöflurnar og þætti tölunnar 36 eru hvort tveggja mikilvæg atriði, sem koma fram í umræðunni um verkefnið.

Sama flatarmál – Mismunandi ummál

Kennsluaðstæður: 3-4 í hópi.
Efni: 36 mósaikflísar, rúðustrikað blað eða reikningshefti, skriffæri.



1. Búið til eins marga misstóra rétthyrninga úr öllum flísunum og hægt er. Teiknið myndirnar af þeim í reikningsheftin ykkar.
2. Skráið hliðarlengdir rétthyrninganna við myndirnar.
3. Skráið ummálið við hverja mynd.
4. Hvert er flatarmál myndanna? Hvers vegna?
5. Hvenær er ummálið minnst?
6. Að hvaða niðurstöðu komust þið um samband flatarmáls og ummáls?
7. Prófið nú með 16 flísum. Farið eins að (sjá lið 1-4).
8. Hvers vegna skyldu tölurnar 36 og 16 hafa orðið fyrir valinu?

FLATARmál

1. tbl. 15. árg. 2008

Flötur
SAMTÖK STÆRÐFRÆÐIKENNARA