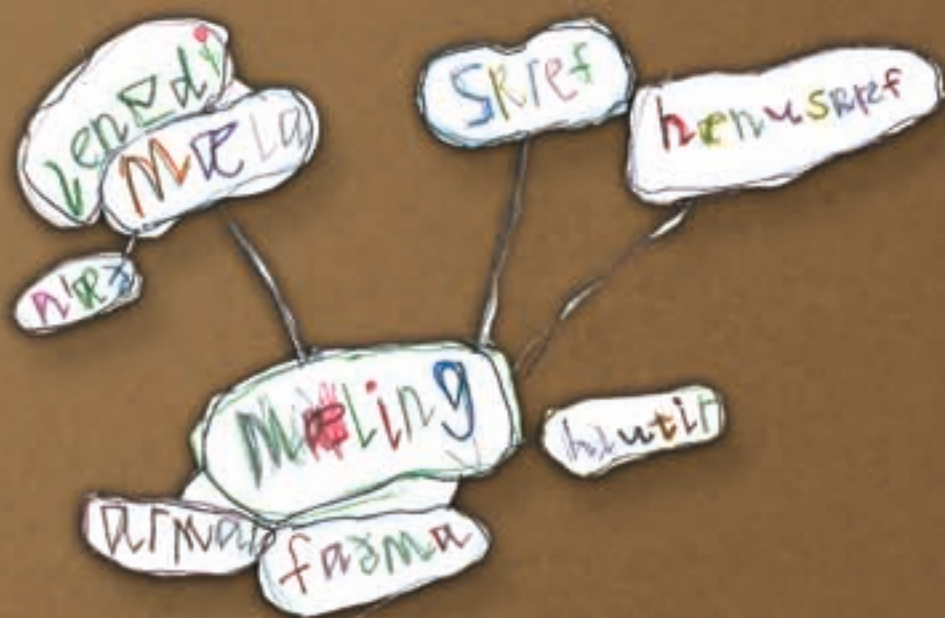


FLAFTARMÁL

2010

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆÐIKENNARA
I. TBL., 17. ÁRG.



Flatarmál 1. tbl., 17. árg.
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2010 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Rannveig Þorvaldsdóttir *formaður*
Öldutúnsskóla
Martin Kollmar *gjaldkeri*
Verzlunarskóla Íslands
Borghildur Jósúadóttir *ritari*
Grundaskóla
Ingólfur Gíslason *vefumsjón*
Háskólanum í Reykjavík
Laufeig Einarisdóttir *ritstjóri Flatarmála*
Korpuskóla
Rannveig A. Guðmundsdóttir *meðstjórnandi*
Breiðagerðisskóla
Þórgunnur Óttarsdóttir *meðstjórnandi*
Brekubæjarskóla

Ritnefnd Flatarmála

Laufeig Einarisdóttir *ritstjóri*, Korpuskóla
Þórgunnur Óttarsdóttir, Brekubæjarskóla


Prófarkalestur

Guðbjörg Pálsdóttir
Birna Hugrún Bjarnardóttir

Umbrot og myndvinnsla

Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

Prentun

Oddi ehf. 

Mynd á forsiðu

Nemendur í 1. GP
Brekubæjarskóla

Veffang / netfang

flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

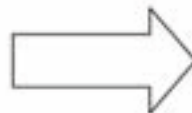
Til höfundu greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.



Heil og sæl!

Stærðfræði og listir tengjast á margan hátt og má segja að um sé að ræða tvær mismunandi leiðir að sama markmiði, þ.e. þörf mannsins til þess að skilja og greina umhverfi sitt.



Listir ná yfir vitt svið. Má þar nefna myndlist, leiklist, höggmyndalist, tréskurðarlist, textíl, byggingarlist, dans, bókmenntir og tónlist.

Auðvelt er að samþætta stærðfræði við allar þessar greinar. Oft er það jafnvel svo að tengslin á milli stærðfræði og lista eru það mikil að erfitt er að greina á milli hvar annað endar og hitt byrjar.

Stærðfræði og listir

Að venju er fjölbreytt efni í Flatarmálum og ættu allir að finna eitthvað við sitt hæfi. Þar á meðal má lesa um tengsl stærðfræði og tónlistar.

Næsta námstefna Flatar verður haldin á Hótel Selfossi dagana 1. - 2. október 2010.

Þar verður m.a. fjallað um listir í stærðfræði og stærðfræði í listum.

Sjáumst á næstu námstefnu Flatar



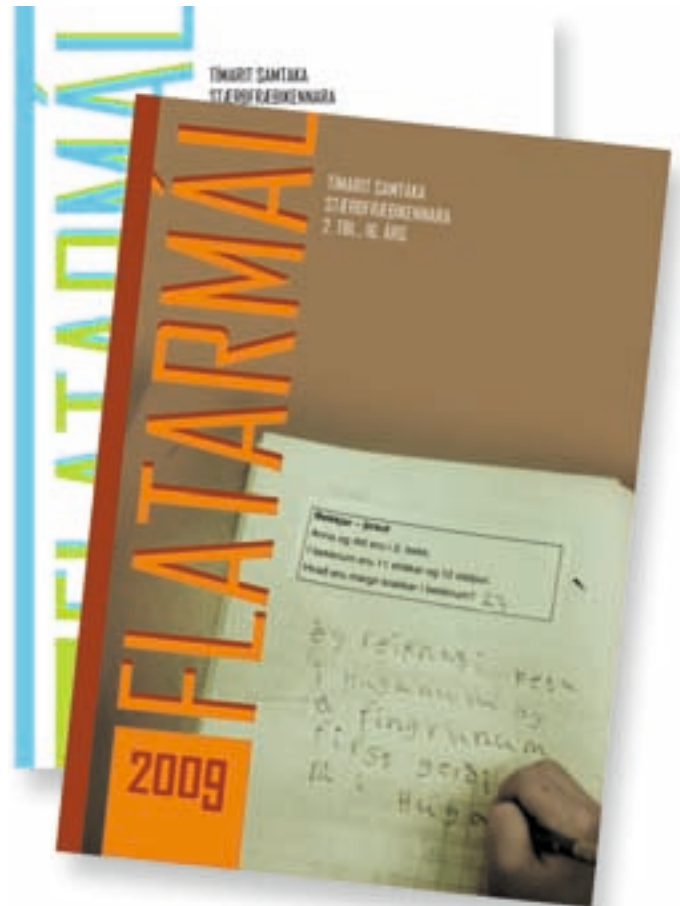
Bestu kveðjur,
Laufeig

um FLÖTUR frá FLÖT til FLETI til FLATARMÁLA

Flötur er samtök stærðfræðikennara á Íslandi. Þau voru stofnuð 3. mars 1993. Markmið Flatar eru m.a. að styðja við þróunarstarf á sviði stærðfræðimenntunar, að efla menntun stærðfræðikennara, að skapa vettvang fyrir umræður um stærðfræðikennslu og að veita kennurum stuðning þegar þeir takast á við ný og breytt viðfangsefni og vinnubrögð. Með þessum hætti vilja samtökin sameina íslenska stærðfræðikennara á öllum skólastigum í starfi og umfjöllun um stærðfræðimenntun.



flotur.ismennt.is



Flötur stendur fyrir ýmsum viðburðum en þar ber hæst árleg námstefna Flatar sem og Dagur stærðfræðinnar sem nú er haldinn fyrsta föstudag febrúarmánaðar ár hvert. Flötur gefur einnig út tímaritið *Flatarmál* sem er málgagn félagsmanna Flatar, samtaka stærðfræðikennara. *Flatarmál* er vettvangur fyrir fræðigreinar, viðtöl, reynslusögur kennara úr skólastofunni og kynningar á viðfangsefnum og vinnubrögðum í stærðfræðinámi og -kennslu. Það er mikilvægt að félagsmenn og aðrir áhugamenn um stærðfræði og stærðfræðimenntun birta greinar og pistla í *Flatarmálum*. Ný og gömul tölublöð má nálgast í bóksölu kennaranema, Háskóla Íslands við Stakka-hlíð, boksala@khi.is, eða hjá ritstjóra Flatarmála.

Allir félagsmenn Flatar fá tímaritið *Flatarmál* sent frítt. Félagsmenn fá einnig aðgang að fyrirlestrum og aðalfundum sem haldnir eru í boði félagsins. Auk þess fá þeir niðurgreitt námstefnugjald á hina árlegu námstefnu Flatar. Nýir félagar eru velkomnir í Flöt og geta þeir skráð sig með því að senda tölvupóst til Flatar, flotur@ismennt.is, og gefa upp nafn, heimilisfang og netfang.

Starfsþróun & bjargir kennarans

Kennarastarfið er krefjandi og hverjum degi fylgir ný áskorun. Alltaf koma upp óvænt atvik sem kennarinn þarf að bregðast við, bæði í nemendahópnum og í samfélaginu. Rannsóknir á námi og kennslu hafa verið að eflast og hafa leitt til þess að nýjar hugmyndir og kenningar hafa komið fram.

Árangursrík og farsæl starfsþróun byggist á því að kennari hafi tækifæri til að ígrunda og þróa eigin reynslu á grundvelli þekkingar á rannsóknnum og hugmyndum fræðimanna. Samkvæmt kjarasamningi er kennurum ætlaður tími til símenntunar. Mikilvægt er að sá tími sé virtur bæði af kennurum sjálfum og skólayfirvöldum og að kennarar nýti hann vel til að afla sér aukinnar þekkingar og vinna úr eigin reynslu. Kennarar þurfa að fá tækifæri til að sækja fræðslufundi, námskeið og framhaldsnám.

Kennarar þurfa að greina eigin kennslu og skipuleggja framhaldið út frá niðurstöðu þeirrar greiningar. Oft er gott að velja afmarkaðan þátt til að skoða hverju sinni. Það getur verið eitthvað í eigin fari, viðbrögð nemenda, notkun nemenda á tilteknum náms-

Guðbjörg Pálsdóttir

lektor í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið HÍ

gögnum, samskipti nemenda, vinnubrögð nemenda, röksemdafærsla, tjáning eða námsmat. Mörgum reynist auðveldara að greina mikilvæg atriði á grundvelli skráningar og einbeita sér að því að skoða þau frá fleiri en einu sjónarhorni. Með því að taka upp hljóðið í kennslustund getur kennari skoðað hvers konar spurninga hann spyr og hvort viðbrögð nemenda eru ólík eftir því hvaða gerð spurninga er notuð. Kennari þarf að velja meðvitað hvernig hann orðar spurningar eftir því hvert markmið hans er með því að spyrja. Sem dæmi má nefna að spurningin: „Hve margar hliðar hefur ferningur?“ reynir á minni en spurningin: „Hvað er líkt/ólíkt með ferningi og rétthyrningi?“ ýtir á að nemendur hugsu sig um og ræði stærðfræðilega saman og styrki þannig hugtakaskilning sinn. Í töflunni eru gefin dæmi um hvernig spurningar má nota eftir því hvert markmiðið með spurningunum er.

Viðbrögð nemenda má líka skoða með því að leggja verkefni fyrir á ólíkan hátt og greina/skrá hvernig þeir bregðast við á ólíkan hátt eftir verkefnagerð. Áhugavert er að sjá hvað gerist í nemendahópnum þegar lögð

eru fyrir útiverkefni, verkefni sem reyna á rúmskyn eða tjáningu, samvinnuverkefni, farið er í leiki eða unnið með kubba. Þá má greina hvaða leiðir nemendur þekkja, reyna að greina námsstíl hvers og eins og hvaða leiðir þeir velja til að tileinka sér nýja þekkingu. Með því að leggja fyrir fjölbreytt verkefni getur kennari safnað miklu magni af gögnum og fengið yfirgripsmikla þekkingu og skilning á stöðu og námi nemenda sinna. Þannig getur hann skapað sér heildstæða mynd af stærðfræðikennslu sinni og því stærðfræðinámi sem hún gefur færi á og byggt áframhaldandi kennslu sína á þeim grunni.

BJARGIR KENNARA

Mikið er skrifað af efni fyrir stærðfræðikennara þó ekki sé margt til á íslensku. Aðgengi að efni hefur stórkostleg aukist með tilkomu upplýsingatækni. Landsaðgangur að vefnum Hvar.is hefur gefið kennurum stórkostleg tækifæri til að nálgast efni úr tímaritum um stærðfræðimenntun. Leitarvélarnar *Proquest 5000* og *Ebsco Host* hafa reynst vel. Tímarit eru ólík, sum hafa að geyma langar og ítarlegar fræðigreinar þar sem greint er frá rannsóknum eða settar eru fram kenningar meðan í öðrum er sjónum beint að skólastofunni og hvernig megi nýta hugmyndir í kennslu. Slík tímarit nýtast kennurum vel í dagsins önn meðan fræðitímaritin krefjast meiri

Markmið kennara og viðeigandi spurningar	
<p>Skýra hugmyndir og ferli Getur þú endursagt þetta með eigin orðum? Ertu að segja að ...? Getur einhver sagt mér hvað hópurinn ykkar ætlar að gera? Hver getur lýst ferlinu við vinnu á stærðfræðisetrinu?</p>	<p>Skoða og draga ályktanir Hvað sástu? Hverju tókstu eftir þegar ----? Hvaða niðurstöðu getur þú dregið?</p>
<p>Bera saman hugmyndir eða hugtök Hvað er líkt með ---- og ----? Hvað er ólíkt? Hvað eiga ---- og ---- sameiginlegt? Hver er munurinn á ---- og ----?</p>	<p>Spá fyrir um niðurstöðu Áætlaðu svarið. Útskýrðu mat þitt. Um það bil hve margir --- myndu passa? Hvað telur þú að svarið gæti verið ef ---?</p>
<p>Tengja hugmyndir öðrum hugmyndum Hvað minnir þetta þig á? Hvenær hefur þú séð eitthvað þessu líkt? Getur þú fundið dæmi úr raunveruleikanum um þetta? Hvernig er þetta skylt því sem við gerðum í síðustu viku?</p>	<p>Setja fram frekari hugmyndir Svo, hvernig gætum við byggt á þessari hugmynd? Hver er áætlun þín við að finna lausn? Hver getur svarað spurningu Birtu?</p>
<p>Útskýra ferli Hvernig leystir þú þessa þraut/þetta dæmi? Hvaða skref tókstu við lausnarferlið?</p>	<p>Ígrunda eigin hugsun (metacognition) Hvernig fannstu það út? Hvernig komstu að niðurstöðu? Lýstu því sem þú varst að hugsa. Hvað var erfitt við að ná skilningi á hugtakinu?</p>
<p>Réttlæta lausnir og ferli Af hverju er það svarið? Hvers vegna heldur þú það? Hvers vegna gerðir þú þetta svona? Hvort er betra? Hvers vegna? Sýndu fram á að svar þitt/ykkar sé rétt. Hvers vegna er þetta hentug nálgun við að leysa þessa þraut?</p>	<p>Bregðast við hugmyndum annarra Myndi áætlun Andra ganga upp? Ertu sammála Sunnu?</p>
<p>Setja fram upplýsingar og/eða endurkalla hugmyndir Hvað er ----? Segðu mér hvað það þýðir. Hvert er einkenni á ----? Lýstu ---</p>	<p>Draga saman hugmyndir Getur þú dregið saman það sem við höfum lært? Hverjar eru lykilhugmyndirnar?</p>

Susan O'Connell, 2005:43

tíma og ígrundunar. Mörg tímarit eru til á bókasafni Menntavísindasviðs og þar er líka til allgott sívaxandi safn bóka um stærðfræðimenntun. Samtök stærðfræðikennara og stofnanir um stærðfræðimenntun halda mörg úti öflugum heimasíðum þar sem finna má efni sem sérstaklega er sniðið fyrir stærðfræðikennara. Flötur, samtök stærðfræðikennara á Íslandi, er með heimasíðu og gefur út tímaritið *Flatarmál*. Flötur var stofnaður árið

1993 og hafa samtökin gefið *Flatarmál* út frá upphafi. Þar hefur því safnast saman töluvert af efni um stærðfræðikennslu á Íslandi frá kennurum og hafa ýmsar hugmyndir um stærðfræðinám og -kennslu verið kynntar. Gagnlegt er að kennarar og skólar séu áskrifendur að einhverjum tímaritum. Það er hvetjandi og gefur nýjar hugmyndir og efni til umhugsunar að fá nýtt tímarit í hendur.

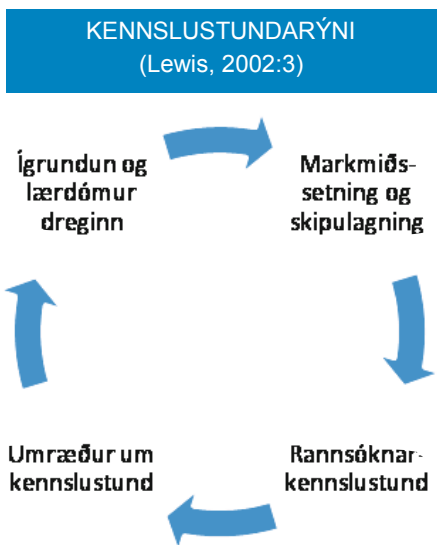
Erfitt getur verið að velja hvað á að skoða og lesa. Enginn getur fylgst með öllu sem kemur út. Á Norðurlöndunum eru gefin út tímarit fyrir stærðfræðikennara. Þar er að finna áhugaverðar greinar fyrir kennara á öllum skólastigum. Töluvert af efni þessara tímarita má finna á netinu en einnig eru þau til á bókasafni Menntavísindasviðs. Í Noregi er gefið út tímaritið *Tangenten*, í Danmörku heitir tímaritið *Matematik* og í Svíþjóð er það *Nämnaren*.

Bandarísku stærðfræðikennarasamtökin gefa út þrjú kennaratímarit fyrir kennara sem kenna 5 - 11 ára, 11 - 14 ára og 14 - 18 ára. Tímaritin heita *Teaching Children Mathematics*, *Mathematics Teaching in the Middle School* og *Mathematics Teacher*. Fræðilegar greinar um stærðfræðimenntun er til dæmis að finna í tímaritum eins og *NOMAD* og *Educational Studies in Mathematics*. Áhugavert er fyrir kennara að fylgjast með rannsóknum og hugmyndum og eru tímarit oft hentugur vettvangur til þess. Kjörið er fyrir kennara að mynda leshópa og ræða saman um tímaritsgreinar.

SAMSTARF KENNARA

Algennt er að kennarar vinni saman að skipulagningu og uppbyggingu kennslu. Flétta má saman starf og símenntun t.d. með því að stunda starfendarannsóknir eða með því að lesa saman og ræða um eigið starf á þeim grunni. Það eykur oft starfsáhugann að prófa nýja hluti í kennslu og ræða þá og ígrunda með öðrum. Ef aðrir kennarar eru að prófa svipaða hluti er hvetjandi og gagnlegt að ræða saman með því að hittast eða nýta upplýsingatækni til að miðla hugmyndum, ræða vandamál og skiptast á reynslusögum. Þetta má gera bæði á formlegan og óformlegan hátt. Margir kennarar sækjast eftir því að komast á námskeið þar sem þeir fá hvatningu og stuðning við að þróa eigin hugmyndir. Undanfarin ár hefur hugmyndin um kennslustundaryni (Lesson Study) verið kynnt á kennaranámskeiðum og í kennaranámi hér á landi. Hugmyndin byggir á að kennarahópur með stuðningi frá sérfræðingi þrói kennsluáætlun fyrir eina kennslustund (Takahashi og Yoshida, 2004). Uppbygging kennslustundarinnar og hlutverk kennarans er oft það sem sjónum er sérstaklega beint að. Kennslustundaryni má lýsa sem hringferli (sjá mynd). Byrjað er á því

að ræða hvert inntak kennslustundarinnar á að vera. Þegar ákvörðun um það liggur fyrir rannsaka þátttakendur viðfangsefnið, bæði með tilliti til hvað felst í að skilja inntakið og hvernig má nálgast viðfangsefnið í kennslu. Þátttakendur hafa sjálfir valdið og taka ákvarðanir um ferli. Einn kosturinn við kennslustundaryni er að þeir dýpka þekkingu sína á efninu og kennslu-



EFRI MYND Kennarar úr Korpuskóla í Reykjavík kynna sér starfshætti Giljaskóla á Akureyri í febrúar 2010.

NEDRI MYND Starfsfólk Korpuskóla og Hrafnagilsskóla í kaffipásu frá umræðum um nám og kennslu í febrúar 2010.



háttum. Þeir ræða, rannsaka, vinna saman, taka ákvarðanir, skipuleggja kennslu og upplifa kostina við að vera þátttakendur í námssamfélagi.

Rannsóknarkennslustundin er kennd af einum þátttakanda þar sem hinir eru viðstaddir og skrá athugasemdir. Eftir kennsluna ræða þátttakendur saman og sérfræðingur um efnið bætist í hópinn. Á grunni þessara viðræðna er kennsluáætlunin endurskoðuð og kennslustundin kennd aftur svipuðum hópi. Þetta má síðan endurtaka nokkrum sinnum.

Mörgum kennurum vex ásmegin og kjarkur til að prófa ný viðfangsefni ef þeir eru í samstarfi og það ýtir undir frumkvæði og framkvæmdir að taka ákvarðanir og gera áætlun um kennslu saman. Fleiri hugmyndir koma líka oft fram, til dæmis um hvernig leysa má vandamál sem upp koma þegar fara á nýjar leiðir. Það krefst bæði mikillar vinnu og þekkingar að þróa hugmynd yfir í viðfangsefni í stærðfræðikennslu fyrir tiltekinn hóp nemenda, ekki síst ef í henni felst breyting á siðum og venjum í skólastofunni. Breytt hlutverk kennara kallar á breytt hlutverk nemenda og þar með nýjan samning milli nemenda og kennara um hvað sé við hæfi að gera í stærðfræðitímum og fleiri félagsstærðfræðilega þætti. Nemendur eru oftast fljótir að bregðast við nýjum væntingum kennara en muna þarf eftir að gefa forráðamönnum þeirra og skólayfirvöldum upplýsingar um breytingar. Skólayfirvöld ættu alltaf að styðja kennara í því breytingastarfi sem þeir setja af stað því fátt er vænlegra til árangurs í starfi en brennandi áhugi kennara.

Starf stærðfræðikennara er samsett úr mörgum þáttum. Sú staðreynd gefur kennaranum ríkuleg tækifæri til sköpunar og þróunar sem gæfuríkt er fyrir stærðfræðikennara að nýta til að fá gleði úr starfi sínu.

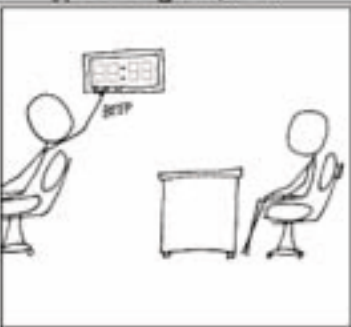
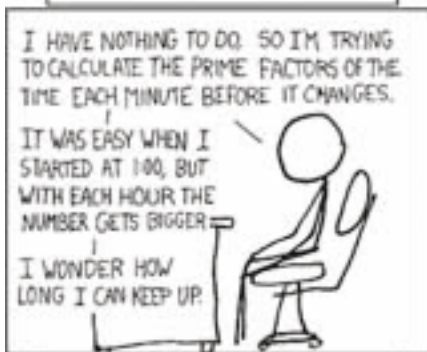
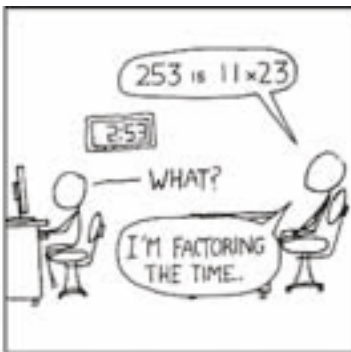
Heimildir:

Lewis, C.C. (2002). *A Handbook of Teacher-Led Instructional Change*. Philadelphia, PA: Research for Better Schools.

O'Connell, S. (2005). *Now I Get It - Strategies for Building Confident and Competent Mathematicians, K-6*. Portsmouth NH: Heinemann.

Takahashi, A, og M. Yoshida. (2004). *Ideas for Establishing Lesson-Study Communities*.

Teaching Children Mathematics. (maí 2004) bls. 436-443.

**Nokkrar áhugaverðar heimasíður****Veffang**

	Nokkrar áhugaverðar heimasíður	Veffang
ÍSLAND	Flötur, samtök stærðfræðikennara Námsháskóla Íslands	flotur.ismennt.is nams.is
DANMÖRK	Dönsku stærðfræðikennarasamtökin (Danmarks matematiklærerforening)	matematik.ffw.dk
NOREGUR	Norsku stærðfræðikennarasamtökin, LAMIS Caspar Forlag, útgefandi tímaritsins <i>Tangenten</i> Þjóðarsetur um stærðfræðinám Þjóðarvefsetur fyrir stærðfræði	lamis.no caspar.no matematikkcenteret.no matematikk.org
SVÍÞJÓÐ	Sænsku stærðfræðikennarasamtökin Þjóðarsetur um stærðfræðimenntun sem gefur út tímaritið <i>Nämnaren</i> .	smal-matte.com ncm.gu.se
HOLLAND	Freudenthalsstofnunin	fi.uu.nl/en
BANDARÍKIN	Bandarísku stærðfræðikennarasamtökin (National Council of Teachers in Mathematics)	nctm.org

Dig where you stand

– Ráðstefnurit ráðstefnunnar *On-going Research in the History of Mathematics Education* sem haldin var í Garðabæ dagana 20. - 24. júní 2009 á vegum Rannsóknarstofu Menntavísindasviðs HÍ um stærðfræðimenntun.

Fyrsta alþjóðlega ráðstefnan sem haldin hefur verið eingöngu um yfirstandandi rannsóknir á sviði sögu stærðfræðimenntunar, náms og kennslu, var haldin 20. - 24. júní 2009 í Fjölbautaskólanum í Garðabæ, á vegum Rannsóknarstofu um stærðfræðimenntun, Menntavísindasviði Háskóla Íslands. Ráðstefnuna sóttu nitján fræðimenn sem héldu átján fyrirlestra. Þar af voru tveir fræðimenn við Háskóla Íslands, Þorsteinn Vilhjálmsson prófessor og Kristín Bjarnadóttir dósent.

Ráðstefnuritið *Dig Where You Stand*, er nú komið út. Nálgast má ritið í Bóksölu kennaranema, Háskóla Íslands við Stakkahlíð, boksala@khi.is, og í Bóksölu stúdenta, Háskólatorgi. Verð ritsins er kr. 2980.

Greinar í ritinu og höfundar þeirra:

Amy Ackerberg-Hastings: John Playfair in the natural philosophy classroom

Kristín Bjarnadóttir: Björn Gunnlaugsson – Life and work. Enlightenment and religious philosophy in nineteenth century Icelandic mathematics education

Fulvia Furinghetti: The evolution of the journal *L'Enseignement Mathématique* from its initial aims to new trends

Livia Giacardi: The Italian contribution to the International Commission on Mathematical Instruction from its founding to the 1950s

Hans Christian Hansen: From descriptive history to interpretation and explanation — a wave model for the development of mathematics education in Denmark

Bernard R. Hodgson: ICMI in the post-Freudenthal era: moments in the history of mathematics education from an international perspective

Iason Kastanis and Nikos Kastanis: Toward a cognitive historiography of mathematics education

Jeremy Kilpatrick: The social efficiency movement in the United States and its effects on school mathematics

José Manuel Matos: Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal

Marta Menghini: The teaching of intuitive geometry in early 1900s Italian Middle School: Programs, mathematicians' views and praxis

Johan Prytz: Professional debate and social structure in Swedish mathematics education, 1905-1962. The case of geometry instruction at the lower secondary level

Pauline Romera-Lebret: Teaching new geometrical methods with an ancient figure in the nineteenth and twentieth centuries: the new triangle geometry in textbooks in Europe and USA (1888-1952)

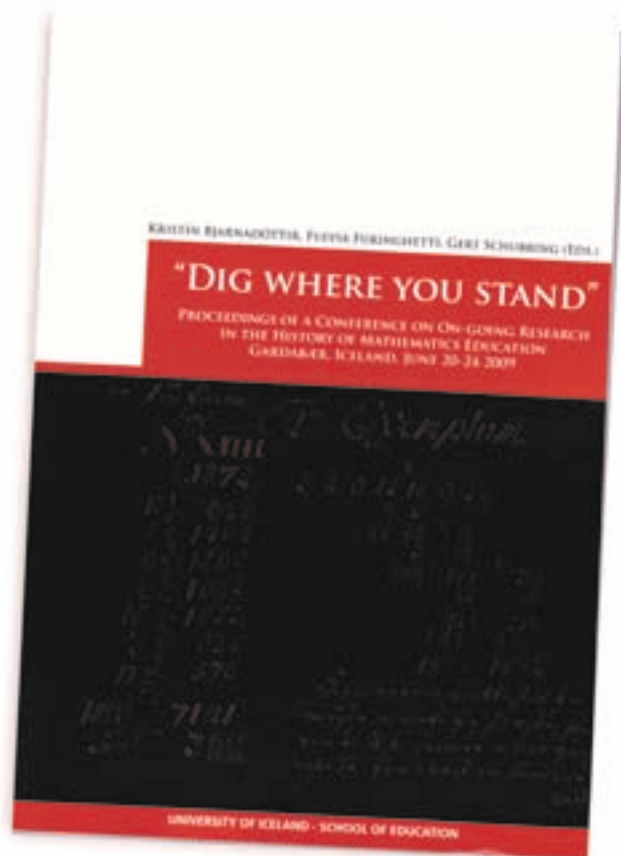
Gert Schubring: How to relate regional history to general patterns of history? – The case of mathematics

Man Keung Siu: Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times

Harm Jan Smid: Foreign influences on Dutch mathematics teaching

Wagner Rodrigues Valente: History of mathematics education in training teachers of mathematics: considering its potentialities

Thorsteinn Vilhjálmsson: Budding mathematical science: An example from the Old Norse



Sjöunda námstefna Flatar var haldin á Hótel Selfossi dagana 2. - 3. október 2009. Að venju var námstefnan opin öllum áhugamönnum um stærðfræðinám og -kennslu. Þátttakendur voru rúmlega fimmtíu manns af öllum skólastigum og komu víðsvegar af landinu.

námstefnugestir að prófa hin ýmsu spil. Húgó Rasmus var með sýningu á kennsluvefnum Rasmus.is fyrir námstefnugesti. Hægt er að lesa meira um efni nokkurra vinnustofa í síðasta tölublaði Flatarmála.

Á föstudagskvöldinu komu þátttakendur saman og borðuðu hátíðarkvöldverð undir veislustjórn Borghildar Jósúadóttur. Nafnagáturnar



NÁMSTEFNA FLATAR 2009

Aðalfyrirlesari var Richard Noss, prófessor við Institute of Education í London. Hann var með inngangsfyrirlestur um notkun stærðfræði í ýmiss konar atvinnustarfsemi. Einnig var hann með kynningu á tölvunotkun í stærðfræðikennslu barna.

Á námstefnunni voru auk þess fjölbreyttar vinnustofur. Freyja Hreinsdóttir, Menntavísindasviði HÍ, kynnti hugbúnaðinn GeoGebra og fengu þátttakendur einnig að spreyta sig á nokkrum verkefnum í forritinu. Helena Óladóttir verkefnastjóri hjá Náttúruskólanum var með útikennslu og Richard Noss og Ingólfur Gíslason leiddu vinnustofu fyrir framhaldsskólakennara. Haraldur og Þóra Einarsbörn, kennarar við Heiðarskóla í Reykjanesbæ, voru með vinnustofu um hugtakakort og hjá Spilavinum fengu

voru á sínum stað auk þess sem „actionary“ leikur var á milli borða. Að borðhaldi loknu var gestum boðið upp á danskennslu.

Að venju lauk námstefnunni eftir hádegi á laugardag með pallborði undir yfirskriftinni: „Stærðfræði í lífi og starfi“. Frummælendur í pallborði voru Guðmundur K. Birgisson lektor við HÍ, Benedikt Jóhannesson hjá Talnakönnun og Trausti Gylfason hjá Álverinu á Grundartanga. Að loknum erindum frummælenda voru fjörugar umræður.

Aðstaðan á Hótel Selfossi var til fyrirmyndar og þátttakendur voru almennt ánægðir með námstefnuna í heild.



Næsta námstefna Flatar verður haldin á Hótel Selfossi dagana 1.-2. október 2010. Við hvetjum alla sem láta sig stærðfræðimenntun varða að sækja námstefnuna. Nánari upplýsingar verða að finna á vef Flatar:

flotur.ismennt.is



Hérinn, hundurinn og tófan

SÖGUHORNID

Kristín Bjarnadóttir
Menntavísindasviði HÍ

Landspróf miðskóla var haldið árin 1946 - 1976. Það var inntökupróf í menntaskólana sem lengst af þessa tímabils voru aðeins þrjú. Síðustu árin var það sameinað samræmdu gagnfræðaprófi og var undanfari samræmdra grunnskólaprófa sem tóku við árið 1976. Lengi gengust einungis þeir nemendur undir landsprófið sem ætluðu að ganga „menntavegin“ eða hugðu á „langskólanám“ og var prófið því fremur snúið. Í stærðfræðinni voru oft snilldarlega samín orðadæmi.

Ekki alls fyrir löngu var ég að skoða gömul próf og staldraði við eftirfarandi dæmi:

Hundur eltir tófu. Tófan er í upphafi 100 tófustökkum á undan hundinum. Tófan fer fimm stökk á meðan hundurinn fer fjögur. Hlutfallið milli stökk lengda hunds og tófu er 5:3. Eftir hve mörg stökk tófunnar nær hundurinn henni? (Landspróf miðskóla og samræmt gagnfræðapróf vorið 1973).

Mér fannst þetta bráðsnjallt dæmi og raunveruleikatengt en viðmælandi minn lét sér fátt um finnast. Eða hvernig væri hægt að sannreyna stökkhraðann og stökk lengdina? Eða höfðu borgarborn á 21. öld séð hund og tófu saman á stökki? Nokkru síðar fletti ég *Reikningsbók* eftir Ólaf Danielsson, 5. útgáfu frá 1938. Þar er eftirfarandi dæmi:

Héri er 50 hérastökkum á undan hundi. Hérinn stekkur 4 stökk á meðan hundurinn stekkur 3, en 2 hundsstökk eru að lengd jöfn 3 hérastökkum. Hve mörg stökk þarf hundurinn að stökkva til að ná héranum? (Ólafur Danielsson, 1938: 143).

Í sviga aftan við dæmið stendur að það hafi verið prófdæmi til burtfararprófs úr Flensborgarskólanum 1916. Hugmyndin er því ekki alveg ný af nálinni. Árið 1916 höfðu unglingar ef til vill meiri afskipti af dýrum en gerðist árið 1973. Dæmið hefur því getað verið nokkru raunveruleikatengdara þá en á vorum tímum. Ekki er samt vitað til þess að hérar hafi hafst við á Íslandi, hvorki árið 1916 né síðar, enda var hérinn orðinn að tófu í landsprófsdæminu.

Leið nú og beið. Í hendur mínar barst *Treviso Arithmetic* (Swetz, 1987), ensk þýðing á elstu prentuðu reikningsbókinni, *L'arte dell'abbaco*, frá árinu 1478. Þar rakst ég á eftirfarandi dæmi svipað hinum fyrri, en við bættist að lausn dæmisins er sýnd:

Héri er 150 skrefum á undan hundi sem eltir hann. Hérinn stekkur 6 stökk á meðan hundurinn stekkur 10. Vita þarf hve mörg skref hundurinn tekur áður en hann nær héranum.

Mismunurinn á 6 og 10 er 4 sem er deilirinn. Fylgið nú reglunni eins og hér segir:

150	
10	
1500	<i>Hundurinn tók 375 skref</i>
Skref: 375	<i>þegar hann hljóp héranum uppi.</i>

Ef þú vilt sanna það finndu þá skrefin sem hérinn tekur, þannig:

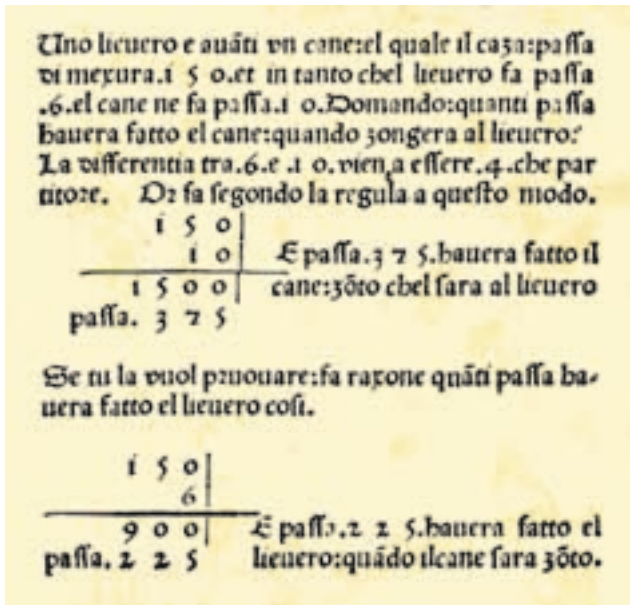
150	
6	
900	<i>Hérinn tók 225 skref þar til</i>
Skref: 225	<i>hundurinn hafði hlaupið hann uppi.</i>

Bætið við þessi 225 skref þeim 150 skrefum sem hérinn var á undan og niðurstaðan er 375. Þannig að samanlögð fjarlægðin sem hérinn fór og forskot hans er fjöldi skrefa sem hundurinn fór. Þannig að dæmið er búið. (Swetz, 1987: 160–161).

Nú fór ég að athuga málið. Var þetta eitt af gömlu flökkudæmunum sem skjóta upp kollinum öld fram af öld? Ég leit í yfirlitsrit yfir sögu reikningsbóka: *Geschichte der Elementarmathematik* eftir Johannes Tropfke (1989). Er nokkuð að finna þar um hund og héra? Fjórði kafli bókarinnar fjallar um hagnýtta stærðfræði og grein 4.2 um *Unterhaltungsmathematik*, skemmtistærðfræði. Í undirgrein 4.2.1.4. er að finna hreyfingardæmi. Þar segir að frá tíma ritsins *Propositiones ad acuendos juvenes* (viðfangsefna til að skerpa ungmenni), sem til er í handriti frá um 1143–1160 (Tropfke, 1989: 663), sé að finna hreyfingardæmi í öllum

evrópskum dæmasöfnum, til dæmis hjá Leonardo Fibonacci, og í handritum 14. og 15. aldar. Dæmið um hund og héra sé sérstaklega vinsælt. Stundum sé það þó um úlf og hund. Um þrjár gerðir er að ræða:

1. Skref beggja dýra eru jafnlöng, en fjöldi þeirra á sama tíma mismunandi.
2. Hundur og héri stökkva jafnmörg skref á sama tíma en lengd þeirra er mismunandi.
3. Bæði lengd og fjöldi skrefa héra og hunds eru mismunandi (Tropfke, 1989: 597).



Dæmið um hérann og hundinn í *L'arte dell'abbaco* (1478).

Ritið *Propositiones ad acuendos juvenes* er eignað Alcuin (735–804) frá Jórvík sem var menntaráðgjafi Karls mikla Frakkakonungs, Karlamagnúsar (Tropfke, 1989: 663; Katz, 1993: 267). Dæmi Alcuins er svohljóðandi:

Völlur nokkur er 150 fet langur. Öðrum megin hans er hundur og hinum megin er héri. Hundurinn elti héra. Á meðan hundurinn fór 9 fet í skrefi fór héri bara 7. Hve mörg fet og hve mörg stökk tók það hundurinn að elta flýjandi héra þar til hann náðist? (Alcuin, um 800).

Þetta mun vera fyrsta evrópska dæmið af þessu tagi. Hið áhrifamikla rit Leonardo Pisano Fibonacci, *Liber Abaci*, kom fram árið 1202. Í tólfta kafla þess er þetta dæmi:

Um hund og ref... refur á flóttu, hann er 50 skrefum á undan hundi, fer 6 skref fyrir hver 9 skref hundsins sem eltir... þú dregur 6 frá þessum 9; 3 ganga af sem þú deilir í margfeldið af 6 og 50; kvótinn er 100 skref... hundurinn nær refnum eftir að refurinn fer 100 skref... (Fibonacci, 2003: 276).

Í þessu dæmi Leonardos frá 1202 eru skepurnar hundur og refur eins og í landsprófsdæminu 1973, þó dæmið sé einfaldara: það er af fyrstu gerð samkvæmt flokkun Tropfkes en landsprófsdæmið af þriðju gerð.

Það er því ljóst að dæmið um hundinn og tófuna í landsprófinu árið 1973 var ekki fundið upp af landsprófsnefndarmanni á vegum menntamálaráðuneytisins heldur á það sér langa sögu í margvíslegum búningi.

Langlífi dæmisins og annarra dæma, sem skjóta upp kollinum í reikningsbókum öld fram af öld, benda til þess að þau hafi almenna skírskotun, óháð tíma og umhverfi. Það er verðugt umhugsunarefni þegar hugað er að hvers konar viðfangsefni höfða til unglinga. Áhugahvöt kann að vera fólgin í tærum einfaldleika dæmanna, hvað sem aldri þeirra líður.

Heimildir:

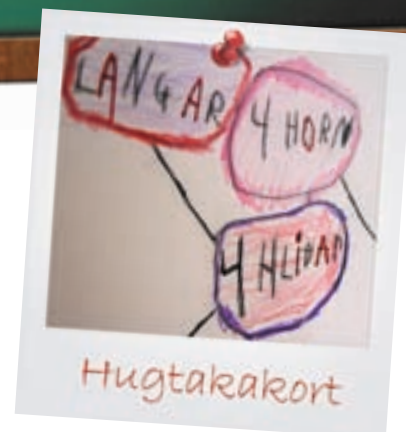
- Alcuin (um 800). *Propositiones ad Acuendos Juvenes*. http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_acuendos_juvenes, sótt 28. janúar 2010.
- Katz, V. (1993). *A history of mathematics. An introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.
- Landspróf miðskóla og samræmt gagnfræðapróf vorið 1973. *L'arte dell'abbaco* (1478). Höfundur óþekktur. Rituð á máli Feneyinga. Vefbók: <http://www.republicaveneta.com/doc/abaco.pdf>. Sótt 5. janúar 2010.
- Ólafur Daníelsson (1938). *Reikningsbók*. (5. útgáfa). Reykjavík: Arinbjörn Sveinbjarnarson.
- Propositiones ad Acuendos Juvenes*. Í *Wikipedia*, frjálsa alfræðiritinu. http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_acuendos_juvenes#cite_note-a-1, sótt 5. janúar 2010.
- Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and Arithmetic. The new math of the 15th century. Including the full text of the Treviso arithmetic of 1478*. La Salle: Open Court.
- Tropfke, J. (1989). *Geschichte der Elementarmathematik. Band I. Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet bei K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin: Walter de Gruyter.

Dagur stærðfræðinnar 2010

Markmið:

- vekja nemendur og sem flesta aðra til umhugsunar um stærðfræði almennt
- hvetja nemendur til að sjá stærðfræðina í víðu samhengi

Dagur stærðfræðinnar er fyrsti föstudagur í febrúar og að þessu sinni bar hann upp á 5. febrúar. Markmið með degi stærðfræðinnar er tvíþætt; í fyrsta lagi er hann haldinn til að vekja nemendur og sem flesta aðra til umhugsunar um stærðfræði almennt og í öðru lagi er tilgangurinn að hvetja nemendur til að sjá stærðfræðina í víðu samhengi. Lagt er til að unnið sé með ákveðið þema á hverju ári og í ár var þemað stærðfræði og hugtakakort. Hugmyndin með þemanu var að fá nemendur til að tengja saman stærðfræði og tungumál. Á vef Flatar má finna safn hugtakakorta og ýmsar skemmtilegar þrautir sem settar voru inn á vefinn í tilefni dagsins. Látum hér eina þraut fylgja með: Það tekur 3 mínútur að sjóða 3 egg. Hve langan tíma tekur að sjóða 5 egg?



Á DEGI STÆRÐFRÆÐINNAR í ár var þemað hugtakakort. Okkur í 1. GP í Brekkubæjarskóla leist vel á það þar sem nemendur voru orðnir nokkuð þjálfaðir í gerð hugtakakorta og ljóst að við gætum tekið virkan þátt í þessari vinnu. Mikill kostur er að börn læri snemma að gera hugtakakort. Þau sem ekki eru farin að skrifa geta einfaldlega teiknað hugtakakortið sitt og það gerir sama gagn fyrir þau. Hugtakakort er fyrst og fremst tækni við að skrá þekkingu. Hún flokkar hugsanir og upplýsingar og tengir þær saman ásamt því að tengja fyrri þekkingu við nýja. Síðast en ekki síst eru hugtakakort myndræn, sem auðveldar flestum skilning og nám.



Á degi stærðfræðinnar var ákveðið að nýta viðfangsefni stærðfræðinnar sem unnið hafði verið með í 1. bekk við gerð hugtakakortanna. Nemendum var skipt niður í þriggja manna hópa og fékk hver hópur A3 blað sem hann vann hugtakakortið sitt á. Hóparnir fengu mismunandi viðfangsefni eins og t.d. formin, samlagningu, mælingar og talnalínu. Þessi vinna gekk mjög vel í alla staði og var mikið um gagnlegar umræður. Stundum var ljóst hvað ætti að skrifa eða teikna og stundum þurftu nemendur að rökstyðja mál sitt til að koma sannfæringu sinni inn á hugtakakortið. Auk þess að þjálfast í gerð hugtakakorta þjálfuðust nemendur einnig í að koma viðfangsefnum stærðfræðinnar í orð, sýna hvert öðru tillitssemi og vinna saman svo eitthvað sé nefnt.

Ein ástæða þess að svo vel tókst til er sú að nemendur kunnu til verka þegar kom að því að vinna hugtakakort. Því ber einkum að þakka lestrarkennslu-aðferðinni *byrjendalæsi* sem unnið hefur verið eftir undanfarin ár við Brekkubæjarskóla. Þessi aðferð miðar að því að vinna jafnt með lestur, hlustun, tal og ritun í lestrarnáminu og eru hugtakakort ríkur þáttur í ritunarkennslunni. Leikni í lestri veltur á ýmsu og þar vegur þungt skilningur á merkingu orða og hugtaka og sambandi þeirra við hugmyndir og hugtök.

Guðrún Guðbjarnadóttir,
kennari í Brekkubæjarskóla á Akranesi.



Í TILEFNI AF degi stærðfræðinnar, sem tileinkaður var hugtakakortum, ákváðum við í 4. bekk að gera hugtakakort um rúmfræðina þar sem við höfðum verið að leggja áherslu á þann þátt stærðfræðinnar vikurnar á undan. Nemendur hafa unnið með hugtakakort í gegnum árin, þekkjja þau ágætlega og finnst gaman að vinna með þau. Í þessu tilfalli var þetta í raun ágætis námsmat, því þarna kom í ljós hvað þau höfðu tileinkað sér af rúmfræðinámi síðustu vikna. Mörgum nemendum líkar vel hvað hugtakakortin eru sjónræn og listrænir hæfileikar þeirra fá að njóta sín við gerð kortanna.

Árný Hulda Friðriksdóttir,
kennari í Grundaskóla, Akranesi.

VIÐ Í 4. BEKK gerðum hugtakakort í rúmfræði á degi stærðfræðinnar 5. febrúar. Við höfðum verið að læra mikið í rúmfræði í nokkrar vikur.

Við vorum með ýmsa hluti fyrir framan okkur, ég var t.d. með varalit, sumir voru með kubba og aðrir með lítil hús. Við teiknuðum eftir hlutunum og mældum þá. Síðan fundum við rúmfræðina sem tengja má hlutunum, t.d. flatarmál, ummál og form. Að lokum bjuggum við til hugtakakortið. Þið getið séð mynd af vinnunni okkar hér fyrir ofan.

Helena Dögg Einarsdóttir,
fyrir hönd nemenda í 4. bekk
Grundaskóla á Akranesi.

Skyrta sjómannsins



Dagur stærðfræðinnar, 5. febrúar, var haldinn hátíðlegur í Hörðuvallaskóla í Kópavogi. Allir nemendur skólans fengust við fjölbreytt stærðfræðiverkefni. Á yngsta stigi voru unnin verkefni í tengslum við rúmfræði. Hér er ætlunin að segja frá einu þeirra, en það verkefni nefnum við „skyrtu sjómannsins“. Aðalmarkmið verkefnisins var að nemendur lærðu að fylgja fyrirmælum á pappírsbrotum, þar sem stærðfræðileg hugtök væru notuð. Í vinnuferlinu var mikilvægt að muna fyrirmælin í rétttri röð. Auk þess var áhersla á hlutbundna nálgun og að vekja áhuga nemenda á margskonar brotum.

Aðdragandinn að verkefninu var nokkuð langur þar sem sú hugmynd kviknaði á haustdögum að gaman væri að allir nemendur á yngsta stigi, um 250 börn, myndu vinna sama verkefni á degi stærðfræðinnar. Hugmyndina að verkefninu fengum við í bókinni *Young Children Learn Measurement and Geometry*. Í þeirri bók er að finna margar aðrar skemmtilegar og mjög góðar hugmyndir að fjölbreyttum stærðfræðiverkefnum. Í verkefninu

sem við tókum fyrir útbjuggu nemendur hatt með því að brjóta saman dagblað með vissum brotum, hattinum var síðan breytt í bát og að lokum var honum breytt í skyrtu. Verkefnið endaði svo á því að nemendur klæddu sig í skyrtu sjómannsins. Ákveðið var að safna bæklingum frá Krónunni og Elko en bæklingarnir þeirra eru í stærð A2 sem er afar hentug stærð til að „skyrtu sjómannsins“ verði nægilega stór.

Lýsing á verkefninu

Nemendum er sögð saga um sjómann sem fór á veiðar. Hann þurfti að sjálfsögðu að vera með sjóhatt til að verjast veðrinu. Hattur er búinn til með pappírsbroti:

1. Undirstöðubrotið er kross á miðju blaðinu. Blaðinu er skipt í fjóra jafnstóra hluta með tveimur brotum, annað skiptir blaðinu í tvennt lóðrétt og hitt

lárétt. Gæta þarf þess sérstaklega að hornin mæti hvert öðru. Þessar brotalínur eru svo nýttar til stuðnings við pappírsbrotin.

2. Blaðið er brotið í tvennt þannig að lengri hlið blaðsins er brotin til helminga.
3. Hornin eru brotin að brotalínu í miðju og þá myndast tveir þríhyrningar.
4. Neðsti hluti blaðsins er brotinn upp báðum megin og myndar

skipsbroti í miklu óveðri. Bátur verður að skyrtu:

1. Stefni bátsins brotnar af; þríhyrningur er rifinn framan af bátnum.
2. Áhöfnin reynir að bjarga bátnum, en mistekst og skutur bátsins skemmist einnig; þríhyrningur er rifinn aftan af bátnum.
3. Til allrar óhamingju brotnar stýrishús bátsins líka af;

vinnunni var að nemendur fengu að segja frá því hvernig þeir bjuggu hattinn til og sýndu það í leiðinni.

Útkoman úr verkefninu kom nemendum á óvart og höfðu þeir mjög gaman af þessari vinnu. Nemendum fannst líka mjög skemmtilegt að enda verkefnið á að klæðast skyrtu sjómannsins og það var föngulegur hópur sem raðaði sér í stiga skólans íklæddur sjómannaskyrtum.



ílangan réttþyrning.

5. Hornin á réttþyrningnum eru brotin inn báðum megin, þannig að stór þríhyrningur myndast.
6. Þríhyrningurinn er opnaður og hatturinn er tilbúinn.

En sjómaðurinn þarf að sjálfsögðu líka að hafa góðan bát. Hattur verður að báti:

1. Hvössu hornin á þríhyrningunum eru lögð saman þannig að til verður ferningur.
2. Hornin beggja vegna eru brotin alveg upp að brún.
3. Þá er kominn þríhyrningur sem aftur er breytt í ferning.
4. Loks er ferningurinn opnaður með því að draga hornin út til beggja hliða og þá kemur í ljós bátur.

Þegar báturinn er tilbúinn siglir sjómaðurinn af stað en báturinn lendir í

toppurinn á þríhyrningnum inni í bátnum er rifinn af.

4. Hvað er þá eftir af bátnum og áhöfninni? Nemendur eru spurðir að því hvað þeir haldi að hafi fundist á ströndinni og þeir fá tækifæri til að koma með ágiskanir. Eftir nokkrar getgátur gefur kennarinn þeim svarið með því að taka í sundur það sem eftir er af pappírsbátnum. Þá sjá nemendur skyrtu sjómannsins sér til óvæntrar ánægju.

Vinna nemenda

Nemendur byrjuðu á að reyna sjálfir að finna út hvernig hatturinn væri búinn til með því að fá sýnishorn sem þeir skoðuðu, brutu í sundur og reyndu að setja saman aftur. Síðan bjuggu þeir til sinn eigin hatt. Nemendum var bent á að þarna hafi þeir búið til þrívíðan hlut úr tvívíðum eða rúmfræðilegan hlut úr sléttum pappír. Mikilvægur þáttur í

Með kveðju frá Hörðuvallaskóla,

Þóra Þórhallsdóttir,
umsjónarkennari í 1. bekk
og
Þórunn Jónasdóttir,
deildarstjóri á yngsta stigi

Heimild:

Van den Heuvel-Panhuizen, M og Buys, K. (ritstj.). 2005. *Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary School.* Utrecht, Freudenthal Institute, Utrecht University.

NORSMA⁵

Ráðstefna um stærðfræði og sérkennslu

Dagana 14. - 16. október 2009 var haldin norræn ráðstefna um stærðfræði og sérkennslu í húsnæði Menntavísindasviðs við Stakkahlíð.

Ráðstefnan var haldin á vegum norrænna samtaka fagmanna, rannsakenda og kennara, sem starfa undir heitinu *Nordic Research network on Special Needs Education in Mathematics*.

Að þessu sinni var sjónum beint að kennaramenntun og því hvernig mennta má kennara svo þeir geti komið til móts við alla nemendur á þeirra forsendum. Þema ráðstefnunnar var *Challenges in teaching mathematics, becoming special for all*.

Þátttakendurnir voru 61, þar af 26 frá Norðurlöndunum, einn frá Bretlandi og einn frá Bandaríkjunum. Aðalfyrirlesarar ráðstefnunnar voru fjórir: Prófessor Anna Kristjánsdóttir, dr. Barbara Jaworski, dr. Hafdís Guðjónsdóttir og dr. Robert Siegler. Á ráðstefnunni voru auk þess flutt 21 erindi í málstofum og fjögur veggspjöld voru kynnt.

Áður en ráðstefnan hófst var boðið upp á fjögur námskeið þar sem hluti af þátttakendum ráðstefnunnar héldu vinnustofur fyrir kennara. Þátttakendur í vinnustofum voru 72. Þema ráðstefnunnar var skoðað frá mörgum hliðum og leitast var við að fá sjónarhorn mismunandi fræðasviða sálfræði, sérkennslu og stærðfræðimenntunar. Meðal þess sem aðalfyrirlesarar fjölluðu um voru tengsl sálfræðikenninga við stærðfræðikennslu og þá sérstaklega fjallað um þá nemendur sem hafa fengið litla örvun í uppeldi sínu, hvernig við getum undirbúið og stutt kennara til að geta kennt

öllum börnum, um börnin sem eru á gráu svæði í stærðfræðinámi og fá ekki aðstoð eða þjónustu og hvernig kennarar geta rýnt í eigið starf til að bæta kennslu sína. Erindin á málstofunum voru einnig fjölbreytt og endurspegluðu umfangunarefni þeirra ólík sjónarhorn þessa fræðasviða.

Ráðstefnan heppnaðist vel og fengu þátttakendur tækifæri til að ræða við fólk á ólíkum fræðasviðum um stærðfræðikennslu fyrir alla nemendur. Ráðstefnurit verður gefið út á vef ráðstefnunnar www.stofnanir.hi.is/norsma og mun verða aðgengilegt fyrir alla í sumari.



Norsma samtökin munu halda sína sjöttu ráðstefnu í Kristiansand í Noregi 2. - 4. nóvember 2011 og hvetjum við alla sem áhuga hafa á stærðfræðikennslu fyrir alla nemendur til að taka þátt í henni. Ráðstefnan verður auglýst þegar nær dregur á vefsíðum Norsma, Flatar og Sérkennarafélagsins.

Jónína Vala Kristinsdóttir, lektor við menntavísindasvið HÍ

Hafdís Guðjónsdóttir, dósent við menntavísindasvið HÍ

Edda Óskarsdóttir, sérkennari við Grunnskóla Seltjarnarness

Þuríður Ástvaldsdóttir, grunnskólakennari við Lindaskóla í Kópavogi.



FRÁSÖGN RÁÐSTEFNUGESTS

Puríður Ástvaldsdóttir
grunnskólakennari
við Lindaskóla, Kópavogi

*Svigrúm fyrir alla, svigrúm fyrir
einn: Notkun opinna rannsóknar-
verkefna í stærðfræðikennslu.
(Special for all, special for one:
developing an inquiry culture in
mathematics teaching.)*

Barbara Jaworski,
Loughborough University

Í fyrirlestri sínum fjallaði Barbara um hvernig hægt er að sinna mismunandi þörfum nemenda með því að skapa rannsóknar- eða leitarnámsumhverfi í kennslustundum eða eins og Barbara orðaði það:

„... vinna með rannsóknir og opin verkefni í stærðfræðitímum getur ýtt undir fjölbreytileika og viðurkenningu á margbreytileika í aðferðum og getu ... [.] Tækifæri fyrir alla, gefur einum svigrúm til að vera öðruvísi.“

Þegar nemendur vinna verkefni sem eru þannig uppbyggð að þeir geta notað eigin leiðir til að leysa verkefni þá fá þeir nemendur sem ekki fylgja straumnum um leið tækifæri til að leysa sömu verkefni út frá sínum forsendum. Barbara telur að rannsóknarvinna í stærðfræðitímum sé mikilvæg leið til að ná til sem flestra nemenda og ef sú leið er farin sé hægt að stefna að því að allir nemendur glími við stærðfræðina. Barbara telur að rannsóknarleiðin í stærðfræðinámi geti opnað heim stærðfræðinnar fyrir nemendum, og jafnframt telur hún að þessi aðferð opni nýjar víddir í stærðfræðikennslu fyrir kennara.

En hvað ber að hafa í huga þegar valin eru verkefni sem eiga að gefa öllum tækifæri? Verkefni verða að gefa öllum nemendum tækifæri á að hefja vinnu, gefa svigrúm fyrir fjölbreyttar

lausnarleiðir, vera sveigjanleg og gefa færi á stærðfræðilegum vangaveltum.

Hlutverk kennarans í vinnuferlinu er að hvetja alla nemendur til þátttöku, styðja við þá einstaklinga sem hugsa á öðrum brautum en félagarnir, veita aukinn stuðning þar sem hans er þörf, ögra nemendum og hvetja þá áfram stærðfræðilega.

Að lokum sagði Barbara að kennarar þurfi að vinna saman eða fá aðstoð við að þróa vinnubrögð og hanna viðfangsefni af þessu tagi, eða með orðum *Barböru Jaworski*:

„Ég tel að til að ná árangri þurfi kennarar og þeir sem mennta kennara að taka höndum saman við að skoða og þróa kennsluhætti sem virða markmiðið stærðfræði fyrir alla.“

Fyrirlestur Barböru var einstaklega áhugaverður og vil ég hvetja kennara til að kynna sér hann nánar á vefsíðu Norsma.

FRÁSÖGN NÁMSKEIÐS- ÞÁTTTAKANDA

Birna Hugrún Bjarnardóttir
deildarstjóri í Vatnsendaskóla

Myndir eru nauðsynlegar í stærðfræðinámi.

Michael Wahl Anderson,
lektor við Professionshøjskolen
UCC í Danmörku

Michael Wahl var með fróðlegan fyrirlestur. Hann byrjaði á að fara yfir það í grófum dráttum hvernig mannsheilinn virkar og vísaði þá bæði til hlutverka langtímaminnis og skammtímaminnis og hvernig þau vinna saman. Hann fjallaði um tengsl tungumáls og mynda og sagði að flest þau orð sem við notum í innra máli okkar áður en við tölum eða skrifum setningu finnist sem sjónrænar myndir í vitund okkar, það er að segja við hugsam í myndum. Hann kom líka inn á að sum orð vekja upp mismunandi myndir og getur þá

skipt máli í hvaða samhengi orðið er sett fram og hvaða einstaklingur á í hlut. Sem dæmi nefndi hann hugtökin „fall“ og „neikvæð“ tala. Michael Wahl kallar samspil langtíma- og skammtímaminnis „vinnsluminni“ (arbejdshukommelse). Hann sagði að til þess að nám fari fram þurfi að draga mynd úr langtímaminni í skammtímaminni. Hann talaði um að „vinnsluminnið“ væri miðlægur þáttur í allri hugsun og að það gæti bæði unnið með myndir og orð. Hann taldi hugarreikning gagnlegan til að virkja skammtímaminnið.

Michael Wahl lagði áherslu á að ekki væri hægt að æfa upp skilning í stærðfræði heldur þyrfti að byggja hann upp. Hann talaði um að það þyrfti að leggja áherslu á þrennt í því samhengi; teikningar, talað mál og tákn. Með teikningum er hægt að sýna *hlutbundna* reynslu (t.d. teikna öll skópörin í forstofunni heima), með *orðum* (munlega eða skriflega) er hægt að lýsa sömu reynslu, hægt er að *tákngera* reynsluna með teikningum (teikna strik fyrir hvern skó ef spurt var um fjölda þeirra) og síðan er hægt að *alhæfa* um reynsluna með táknmáli stærðfræðinnar. Þegar skilningi er náð er hægt að sleppa fyrstu skrefunum og jafnvel nota táknmál stærðfræðinnar eingöngu.

Michael Wahl talaði um að undirstaða þess að kunna að reikna sé að kunna að telja. Hann sagði að gott væri að nota talnalínu á fjölbreyttan máta til að ná tökum á talningu. Þannig verður ferlið gert myndrænt og auðveldara verður að skilja það.

Michael Wahl sýndi okkur töflu yfir vinnuferli með áherslu á lestur og þrautalausnir og hann talaði um sterk tengsl milli lestrarferlisins og þess að leysa stærðfræðiverkefni.

Hann ræddi um að kennarar þurfi að fylgjast vel með nemendum við vinnuna og breyta verkefninu ef nemendur ráða ekki við einhverja þætti þess.

Mér fannst þessi fyrirlestur Michaels Wahls afar áhugaverður fyrir þær sakir að hann tengdi umfjöllun um það hvernig við lærum stærðfræði við það hvernig mannsheilinn vinnur. Hann lagði áherslu á hversu mikilvægir þættir málskilningur, myndir og tákn eru í stærðfræðinámi og sagði nemanda ná smám saman betri tókum á stærðfræðinni þegar hann væri búinn að leggja vinnu í að skilja hana.

LEIKIR OG SPIL

Dóróþea Reimarsdóttir
sérkennari við Dalvíkurskóla
og

Póra Rósa Geirsdóttir
M.Ed, sérfræðingur við

Skólaþróunarsvið Háskólans á Akureyri

Markmið verkstæðisins *Leikir og spil* var að beina athygli þátttakenda að stærðfræðinni sem má finna í daglegu lífi barna, leikjum þeirra og spilum. Tilgangurinn var tvíþættur. Annars vegar að þátttakendur gætu bæði séð og nýtt sér stærðfræðina í leik og spilum og hins vegar að þeir gætu nýtt skemmtileg viðfangsefni sem uppsprettu stærðfræðináms.

Greining stærðfræðinnar í leikjum og spilum barna felst í að finna svör við eftirfarandi spurningum:

- Hvaða stærðfræði felur leikurinn eða spilið í sér?
- Hvaða hugtök væri hægt að vinna með?
- Hvaða spurninga þarf kennarinn að spyrja til að ná stærðfræðinni fram?

VINNUFERLI - tveir og tveir vinna saman	X
Lesna verkefnið upphátt (A les)	
Endursegja verkefnið með eigin orðum (B endursegir)	
Teikna mynd	
Um hvað er verkefnið og hvernig er hægt að leysa það: Hver er spurningin? Hvað vitum við? Hvað vitum við þar fyrir utan?	
Velja lausnarleið	
Giska á svarið	
Reikna	
Bera svarið saman við spurninguna og ágiskun ykkar	

Þátttakendur smiðjunnar, sem voru um það bil 60, unnu í hópum við að greina nokkur viðfangsefni.

Að hoppa París var tekið sem dæmi um leik sem hægt er að nýta í stærðfræðikennslu. Taflan hér að neðan sýnir hvernig kennarar geta unnið greiningu á leiknum. Með slíkri greiningu gera kennarar sér betur grein fyrir þeirri stærðfræði sem leikurinn býr yfir og hvaða spurninga er hægt að spyrja til að ná henni fram. (Athugið að ekki er um tæmandi lista að ræða).

Á sama hátt var skoðað hvernig form sem koma fram í frjálsri vinnu nemenda með Polydron kubbana geta verið uppsprettu viðfangsefna er tengjast rúmfræði. Á bls. 16 má sjá kennara að fást við það verkefni.



Hvaða stærðfræði er í viðfangsefninu?	Stærðfræðihugtök til að vinna með	Lykilspurningar
Tölur Talning Lengd Form Ummál Flatarmál	Ferhyrningur Rétthyrningur Ferningur Hringur Ræðtölur Tugátölur Samanburðarhugtök, s.s. styttri, lengri Staðsetningarhugtök, s.s. fyrir framan, fyrir aftan Ummál Flötur	Hvaða form sérðu? Hvað er kastið langt? Hvernig er hægt að mæla kastið? Hvert er ummálið? Hvernig er hægt að mæla ummálið? Hvar ert þú í röðinni? Hvernig völduð þið tölur í Parísinn? Hver er fyrir framan þig? ...

Þátttakendur æfðu sig í að koma auga á stærðfræðina í daglegum athöfnum. Bakstur, steinasöfnun og rannsóknir á formum í umhverfinu eru dæmi um slík viðfangsefni og var piparköku-bakstur krufinn á sama hátt og þarisinn hér að ofan. *Skutlukeppni* var kynnt sem dæmi um hvernig útfæra má stærðfræðileg viðfangsefni sem leik. Markmiðið er þá að vinna með tugabrot og mælingar ásamt því að kynna hugtök í tölfræði eins og meðaltal og miðgildi. Skutlukeppnin er notuð sem inngangur að þessum þáttum stærðfræðinnar. Nær öll spil hafa tengingu við stærðfræði og rökhusun. Á verkstæðinu var *Lúdó* spilið skoðað út frá sjónarhorni stærðfræðinnar. Einnig var athygli vakin á því hvernig hægt er að þjálfra plúsheití og ólíka samsetningu talna upp í 14 með spilinu *Kasínu*.

Lokaverkefnið var umræða um mikilvægi þess að kennarar séu meðvitaðir um hvaða stærðfræði er unnið með í hverjum leik og spili fyrir sig og einnig að það sé skipulega og markvisst skráð. Þátttakendur í smíðjunni fengu sýnishorn af útfærslu á slíkri skráningu þar sem viðfangsefnin voru krufin með tilliti til inntaksmarkmiða aðalnám-skrár.

STÆRÐFRÆÐI UNDIR BERUM HIMNI

Ingileif Ástvaldsdóttir

*M.Ed, skólastjóri Þelamerkurskóla
og*

Þóra Rósa Geirsdóttir

*M.Ed, sérfræðingur við
Skólaþróunarsvið Háskólans
á Akureyri*

Stærðfræði undir berum himni er heiti á námsefni sem er ætlað til stærðfræðikennslu grunnskólabarna og er gefið út í nokkrum heftum fyrir hvert skólastig. Námsefnið er norskt og er gefið út af Didaktiv AS. Þróunarsjóður námsgagna styrkti þýðingu efnisins árið 2009 og nú á vorönn 2010 kemur námsefnið fyrir yngsta stig grunnskólans út hér á landi. Þýðendur eru

Ingileif Ástvaldsdóttir og Þóra Rósa Geirsdóttir. Námsefnið er safn verkefna sem unnin eru utan dyra og hafa öll skírskotun til daglegs lífs. Með námsefninu er hægt að kaupa bakpoka með ýmsum hjálpartækjum, svo sem snæri, boltum, keilum, skeiðklukkum, mælitækjum og öðru sem þarf að hafa við höndina þegar verkefnin eru unnin.

Hugmyndafræði námsefnisins

Hugmyndafræði verkefnanna má finna í orðum Vygotsky: *Við lærum í samfélagi við aðra með athöfnum og samtölum*. Einnig í orðum Dewey: *Við lærum þegar við gerum hlutina og öðlumst þar með eigin reynslu*. Í stærðfræðikennslu togast á fræðin og hagnýtt gildi þeirra. Stærðfræðinám byggir á að hagnýtingin og tileinkunin náist þegar unnið er eftir fræðunum. Kennsluáferðin sem námsefnið *Stærðfræði undir berum himni* byggir á reynir á margskonar færni og sköpunargleði barnanna. Öll verkefnin eru verkleg og lögð er áhersla á þrautalausnir og samvinnu nemenda við lausn þeirra. Ennfremur byggir kennsluáferðin á samræðum um verkefnin og mismunandi lausnir barnanna.

Verkefnin hafa fræðilega skírskotun og eru tengd bæði inntaks- og aðferðarmarkmiðum aðalnámsskrár grunnskóla. Samræðurnar sem einkenna verkefnavinnuna eru lyklatríði kennsluáferðarinnar og eru leið til að dýpka skilning nemendanna. Hlutverk kennarans í samræðunum er tvíþætt; hann nýtir eigin þekkingu til að leiðbeina nemendum jafnframt því sem hann er trúr rannsóknarvinnu þeirra.

Öll verkefnin eru lögð fyrir munnlega og lögð er áhersla á munnlega þátttöku nemenda í rannsóknunum. Viðfangsefnin eru tengd daglegu lífi og uppistaða efniviðarins er náttúran sjálf. Góður tími er gefinn til að kanna og ræða mismunandi leiðir nemenda við lausnir og er sá þáttur mikilvægur við lausnaleitina. Með því að tengja stærðfræðina daglegu lífi og nánasta umhverfi nemenda er hún gerð þeim

nærtækari og um leið skiljanlegri en ella. Markmið verkefnanna er að við lausn þeirra komi saman þekking kennarans, hugmyndaflug hans og nemenda og barnsleg gleði yfir rannsóknum.

Verkstæðið

Byrjað var á að kynna heftin fyrir yngsta stig litillega. Heftin eru *Mælingar*, *Rúmfræði* og *Tölur og tölfræði*. Því næst var farið yfir hugmyndafræði verkefnanna. Stærsti hluti námskeiðsins var verkleg vinna kennara þar sem unnin voru verkefni utan dyra. Verkefnin voru tekin úr heftunum fyrir miðstigið (5. - 7. bekk) og elsta stigið (8. - 10. bekk). Unnin voru verkefni í algebru, rúmfræði/mælingum og tímamælingum/nákvæmni.

Í lokin söfnuðust þátttakendur saman og ígrunduðu upplifun sína. Þar kom fram að við vinnuna höfðu kennararnir fundið á eigin skinni að verkefnin gefa tækifæri til margbreytilegra lausna og umræðna sem opna möguleika kennarans til leiðsagnar á hinu virka námssvæði hvers nemanda. Kennararnir sögðu að við lausn verkefnanna hefðu einnig verið miklar samræður þar sem allir í hópnum tóku þátt með röksemdafærslum byggðum á skilningi þeirra á viðfangsefninu. Kennararnir fundu að til að geta gert sig skiljanlega reyndi á þekkingu þeirra á hugtökum stærðfræðinnar og þjálfun þeirra í að útskýra eigin leiðir að lausnunum.

Stærðfræði & tónlist

Tónlist og stærðfræði eru nátengd fyrirbæri. Sjálfsgagt er allur heimurinn byggður upp á stærðfræði og því eðlilegt að tónlistin sé það líka sem partur af alheiminum en þó er stærðfræðin einhvern veginn svo stór hluti tónlistarinnar að mann rennir í grun að eitthvað sérstakt samband sé á milli þessara tveggja fyrirbæra.

Öll uppbygging tónlistar lýtur ákveðnum lögmálum. Tónar eru hljóðbylgjur sem sveiflast eftir mismunandi tíðni þar sem hver tónn hefur sína tíðni. Bilið á milli tóna lýtur stærðfræðilegum lögmálum og er greinilegt að fegurð tónlistar hefur mjög mikið með stærðfræði tónlistar að gera. Hljóðbylgjur þurfa líka að mynda saman áferðarfallegar bylgjur til þess að tónlistin verði falleg.

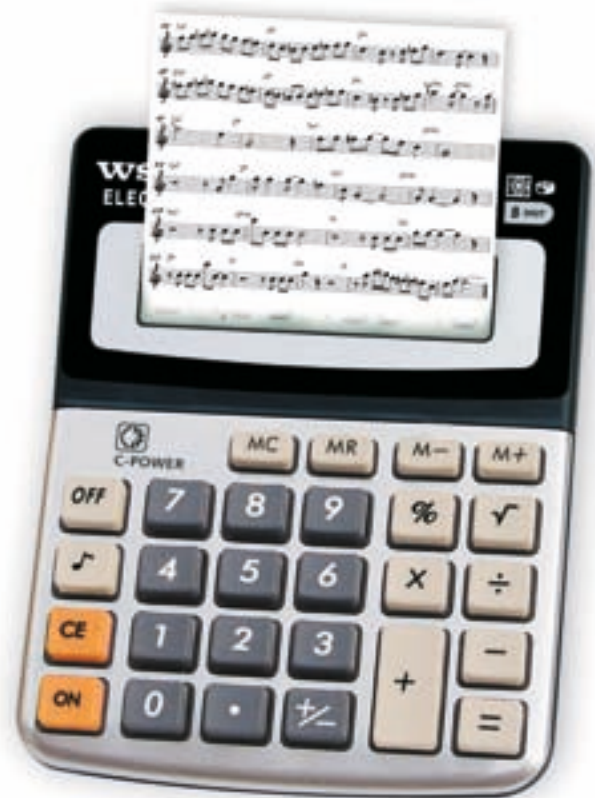
Ef skoðaðar eru myndir af hljóðbylgjum má greinilega sjá hvernig hljóðbylgjur tóna sem mynda hljóm verða áferðarfallegri þeim mun „fegurri“ sem hljómurinn er. Bylgjur þurfa að ná þannig saman að þær gæli við hljóðhímnuna á þann hátt að við kunnum að meta það. Mikil fræði liggja að baki uppbyggingu hljóma og stærðfræðilegra tengsla því tengdu og geta menn, ef þeir hafa nennu og áhuga til, sökkt sér djúpt ofan í þau fræði og haft mikið gaman af, auk þess sem þannig má þróa tónlist til fullkomunar hins hreina tóns, sem margir hafa leitað að.

Menn áttuðu sig mjög fljótlega á þessum eiginleikum tónlistar og strax á 6. öld fyrir Krist fór gríski heimspekingurinn Pýþagóras, ásamt lærisveinum sínum, að velta fyrir sér þessum hlutum. Þeir mynduðu saman hóp sem fékk samheitið Pýþagóringar. Þeir rannsökuðu heiminn og það sem í honum var út frá tölum og þá helst

Jarl Sigurgeirsson

tónlistarkennari og kennaranemi,
Vestmannaeyjum

tölunum 1, 2, 3 og 4. „Þeir höfðu tekið eftir því að þægilegur samhljómur myndaðist, þegar slegirnir voru saman jafngildir strengir í ákveðnum lengdarhlutföllum, en aðrir tónar hljómuðu illa saman. Samhljómar komu fram þegar hlutföllin milli strengjanna voru 1:2, 1:3, 1:4, 2:3 og 3:4, en það voru einmitt öll hugsanleg hlutföll milli talnanna í ferndinni 1, 2, 3 og 4“ (Kristín Bjarnadóttir 1992 bls.16).



RYTMI OG NÓTNAGILDIN

Mun fleiri birtingarmyndir stærðfræðinnar er að finna í tónlistinni. Öll uppbygging laga, þegar kemur að rytma, er hlaðin stærðfræðilegum formúlum. Líklega er þar að finna þau atriði sem hljómlistarmenn tengja fyrst við stærðfræði á vegferð sinni um undraveröld tónlistarinnar. Lengdargildi nótna markast algerlega af stærðfræði og kennsla á því sviði er hrein og klár stærðfræðikennsla. Grunnur tónfræðinnar liggur í lengdargildi nótnanna, sem er einmitt eitt það fyrsta sem kennt er í þeim fræðum.

Heiti nótnanna gefa til kynna þá stærðfræði sem þar liggur að baki. Við höfum heilnótu sem telur fjögur slög. Hálfnútu sem telur þá tvö slög og er því helmingur af heilnótu, fjórðapartsnótu sem er eitt slag, áttundapartsnótu, sextánduparta og svo koll af kolli. Skilningur á þessari uppbyggingu á lengdargildi nótna hjálpar til við skilning á hlutfallareikningi og þá sérstaklega í almennum brotum og öfugt.

Allar þessar nótur eru byggingarefni tónlistarinnar hvað varðar allan rytma. Þeim er raðað í ákveðna kassa sem nefnast taktar, en það eru nokkurs konar nótnamót sem hvert um sig tekur einungis við fyrirfram ákveðnu lengdargildi. Hvert lag er síðan byggt upp af þessum tóktum. Hver taktur hefur sinn taktboða sem segir til um hversu mörg slög eru í þeim takti.

Algengt er að taktur sé fjórskiptur og er þá talið 1, 2, 3, 4. Hver taktur er þá fjögur slög og rúmar hann eina heilnótu eða sambland af nótnagildum sem saman mynda fjögur slög. Sé þessum stærðfræðireglum ekki fylgt eftir kemur villa í lagið svo jafnvel algerlega lag- og taktlausir menn átta sig á því að þarna muni ekki allt með felldu. Taktarnir þurfa því að fylgja stærðfræðilegum reglum til þess að tónlistin fái að hljóma mönnum til ánægju.

Allar mögulegar útgáfur eru til af tóktum. Fjórskipti takturinn, 4/4, er eins og áður sagði algengastur en einnig er þrískiptur taktur, 3/4, algengur og má þar nefna valstaktinn sem margir kannast við og hafa tekið við snúning. Tvískiptur 2/4 taktur er þekktur í mörsum og á það vel við þá staðreynd að við höfum tvo fætur og þægilegast er að stíga í þá til skiptis þegar ganga skal skrudgöngur. Í skrudgöngum þekktist einnig sexskiptur taktur, 6/8, sem ætla mætti að væri ekki mjög þægilegt að ganga eftir nema þá helst fyrir skorkvikindi með sex fætur. Galdurinn við sexskipta marseringartaktinn er að þrjú slög eru slegin í einu og úr verður tvískiptur taktur með þremur áttundapartsnótum í hverju slagi (1, 2, 3 / 4, 5, 6). Við þessa taktbreytingu í mörsum breytist áferð lagsins, hlustandinn heyrir greinilegan mun en áttar sig þó ekki á því hver breytingin er þar sem enn er um tvískiptan takt að ræða. Þarna er það stærðfræðin sem er að verki og skapar þennan undraheim takta og tóna.

UPPBYGGING LAGA OG STÆRÐFRÆÐI

Reglur stærðfræðinnar stjórna tónlistinni á margan hátt og er langt því frá allt upptalið enn. Nótur hafa ákveðin lengdargildi sem lúta lögmálum stærðfræðinnar um hlutföll af heild og eru þau minnstu einingar tónlistarinnar. Þá koma taktarnir sem halda utan um nóturnar og er bara pláss fyrir nákvæmlega ákveðið magn af nótum í hverjum takti. Fjórskiptur taktur 4/4 getur þannig einungis innihaldið nótur og þagnir sem samanlagt gefa fjögur slög, ekki minna og ekki meira. 6/8 taktur inniheldur þá ígildi sex áttundapartsnótna, 5/4 taktur fimm fjórðupartsnótna og þannig mætti lengi telja. Taktarnir sjálfir mynda svo



Útreikningur á tónbilum tóna er heillandi heimur og uppbygging

tónlistar með tilliti til samsetningar takts og tóna er verkefni sem stærðfræðipenkjandi tónlistarmenn ættu ekki að láta fram hjá sér fara.

lagið og enn og aftur kemur upp stærðfræði. Þegar taktarnir í laginu eru taldir kemur fram mynstur. Tölurnar 4, 8, 12, 16 o.s.frv. koma oft við sögu. Mjög algengt er að lög byggist upp af nokkrum 8 takta hrinum. Inngangurinn að laginu telur oft fjóra takta og svo koma yfirleitt nokkrar 8 takta kippur þar á eftir.

Þessi uppbygging laga lætur vel í eyrum og er greinilegt að lagið verður ekki í lagi ef þessum formúlum er ekki fylgt. Þarna kemur mengjafræðin inn í og verður hver átta takta hrina mengi sem önnur mengi í laginu taka ákveðið mið af. Út frá þessum formúlum geta menn samið lög sem samkvæmt stærðfræðilegum forsendum eiga að falla í kramið hjá sem flestum. Afkastamikil tónskáld fara eftir þessum formúlum, breyta þeim örlítið en fylgja

í meginatriðum þessum línunum. Þannig verða til formúlur fyrir alls kyns lögum. Vel þekkt er hið dæmigerða Eurovision lag sem allir vilja ná að semja. Þá er farið eftir ákveðnum formúlum sem menn telja að virki vel til vinsælda í þeim efnum. Það virðist þó enn koma mönnum á óvart þegar stigataflan sýnir ekki alveg sömu útkomu og reikningsdæmið gaf til kynna fyrir keppnina, en það er kannski annað mál.

TÍÐNI TÓNA OG HLJÓMAR

Eins og fram hefur komið eru tíðnisvið tóna og rytmi laga bundin stærðfræðilegum formúlum. Tónsmíðar geta falist í reikningsdæmum og er þá hægt að láta reglur stærðfræðinnar gilda til að ná fram æskilegum áhrifum tónlistarinnar. Þetta hafa menn notfært sér og er vel þekkt hvernig menn nota sér gullinsnið og Fibonacci tölur bæði hvað varðar uppbyggingu og tíðni hljóma og einnig varðandi rytmiska uppbyggingu laga. Þá eru tónbil stillt þannig að hlutfall milli tóna myndi gullinsnið og svo er rytmísk uppröðun lagsins einnig látin taka mið af því. Þá er einnig vel þekkt að lög sem hljóma vel í eyrum eiga sér einhverja tengingu við gullinsnið, Fibonacci tölur eða aðrar þekktar vellíðunarstærðir stærðfræðinnar, án þess að tónsmíðurinn hafi áttað sig á því að um þessar formúlur væri að ræða (sbr. Wikipedia 2009).

Ég hef hér aðeins tæpt á tíðni tóna og rytmískri uppbyggingu laga og hvernig stærðfræðin tengist þar inn í. Uppbygging hljóma í lagi lýtur einnig lögmálum stærðfræðinnar. Þekkt fyrirbrigði eru hljómagangar sem ganga aftur og aftur í lögum. Hægt er að syngja fjölda laga við sama hljómaganginn og virðist á stundum að um sama lag sé að ræða og er þá mönnum borið á brýn að hafa stolið áður sömdu lagi. Svo þarf þó alls ekki að vera enda kannski erfitt að raða þremur hljómunum í lagi saman í röð sem enginn annar hefur áður gert. Þessi uppbygging laga gerir það að verkum

að auðvelt er fyrir menn, sem þokkalega eru að sér í tónlist, að spila lög sem þeir jafnvel hafa aldrei heyrt. Nægir að heyra part úr laglínunni sungna til að geta spilað undir hljómana sem við á. Þetta getur komið sér afskaplega vel þegar mikið liggur við og spila á uppáhaldslag ömmu í 90 ára afmæli, lag sem enginn hefur heyrt í 40 ár. Eins gott að geta uppfyllt óskirnar sem sumar hverjar geta orðið hinar hinstu. Stærðfræðin með sínar reglur kemur þarna til bjargar.

Þessi eiginleiki tónlistarinnar gerir það einnig að verkum að einfalt er að gera tónlistarforrit þar sem hægt er að búa til lög úr tilbúnum töktum. Þá verður lagasmíðin lík því að setja saman kubba. Mörg mjög skemmtileg forrit eru til þar sem möguleikarnir á samsetningu takta og tóna eru „óendanlegir“ en þó innan þess ramma sem stærðfræðin setur tónlistinni. Regluleg uppbyggingin verður þá til þess að hægt er að búa til taktaknippi sem geta staðið ein eða með öðrum töktum og þannig myndað lag. Þannig er hljómagangurinn, rytminn og þar með allur undirleikurinn nánast tilbúinn. Það er bara að velja taktinn og hljóðfærin og setja síðan saman eins og hver vill. Útkoman verður alltaf áheyrileg þar sem forritið fer eftir helstu grunnreglunum um hljómagang og fjölda takta. Forritið getur svo sett yfir þetta einhverja þægilega laglínu enda lítið mál fyrir tölvuna að reikna út laglínu sem einhvern gæti langað til að hlusta á.

Eins og minnst var á í upphafi þá er hljómfærin þakin stærðfræði. Ég sagði að líklega væru fyrstu kynni hljómlistarmanna af stærðfræði í tónlist í gegnum rytmann en hljómfærin er staðurinn fyrir stærðfræðinginn að staldra við. Stærðfræðingar og hljómlistarmenn hafa keppst um að laga til tónbilin á milli tónanna út frá rökum stærðfræðinnar. Þarna er um að ræða hlutfallareikning og eru til margar útgáfur af hlutföllum milli tóna í tónstígum og hljómunum. Eins og áður segir

hafa menn velt fyrir sér þessum hlutföllum milli tóna allt frá dögum Pýþagórasar. Fljótlega fóru menn að mæla tíðnina en það er sú bylgjulengd sem hljóðgjafinn býr til með titringi sínum.

Stærðfræðingar geta í tíðnisviðum tónlistar komist inn í heim stærðfræði þar sem endalaust er hægt að grafa dýpra og dýpra í fræðin. Hlutföll milli tóna og blæbrigðamunurinn sem mismunandi tíðnir og tíðnibil gefa eru mörgum umhugsunarefni. Mismunandi hljómar gefa mismunandi upplifun. Flestir heyra vel muninn á dúr og moll. Moll er með litilli þríund á meðan dúrinn hefur stóra. Mollinn gefur sorglegan tón sem oft er notaður í rólegum og angurværum lögum, dúrinn er harðari en lætur afskaplega vel í eyrum. Munurinn á dúr og moll er vel þekktur en sá munur sem tónlistarmenn og stærðfræðingar hafa velt vöngum yfir er blæbrigðamunur á hljómunum miðað við mismunandi stillingar á tónum í tíðnisviðinu. Það eru fræði sem hinn almenni tónlistarmaður er kannski ekki mikið að sökkva sér í nema þá að áhuginn á stærðfræðinni á bak við tónlistina sé til staðar.

LOKAORÐ

Ég hef í þessari samantekt litillega rakið tengsl stærðfræði og tónlistar. Alveg er eftir umfjöllun um það hvort stærðfræðingar séu áhugasamari en aðrir um tónlist eða hvort tónlistarmenn séu meiri áhugamenn um stærðfræði en gengur og gerist. Lengi hafa menn bent á að tenging sé á milli þessara tveggja áhugasviða og að þeir sem séu í tónlist séu áberandi klárir stærðfræðingar. Rannsóknir styðja þó ekki þessar getgátur manna, en þó má leiða líkum að því að sá sem nær langt á tónlistarsviðinu með einum eða öðrum hætti hljóti að vera þokkalega vel greindur og því í betri aðstöðu en aðrir til að geta náð árangri á öðrum sviðum sem krefjast hugarleikfimi og þá þar með talið stærðfræði.

Mér hefur fundist sem áhrif tónlistarinnar hafi oft verið oftúlkuð þegar kemur að því að ætla mönnum áhuga og getu á sviði stærðfræðinnar. Mönnum eru gerðir upp stærðfræðihæfileikar fyrir það eitt að geta skammlaust sungið vísu eða spilað á hljóðfæri. Víst er um, eins og ég hef hér rakið í þessari grein, að áhrif stærðfræðinnar í tónlistinni eru mikil, en það er þó ekki þar með sagt að þau áhrif nái að smita tónlistarmanninn af stærðfræðiákefð og áhuga. Tónlistarmaðurinn hefur kannski engan áhuga á öðru en að gera góð lög og texta án þess að hafa snefil af áhuga á þeirri stærðfræði sem þar liggur að baki, ekki frekar en margir aðrir sem vinna við hluti er klárlega tengjast stærðfræði.

Þrátt fyrir það þá er alveg morgunljóst að stærðfræðin er eitt aðalbyggingarefni tónlistar hvort sem menn átta sig á því eður ei. Sá sem semur og/eða flytur tónlist stundar mikla stærðfræði hvort sem hann gerir sér grein fyrir því eða ekki. Fyrir þá sem hafa áhuga á stærðfræði er tónlistin frábær uppspretta endalausra möguleika. Útreikningur á tónbilum tóna er heillandi heimur og uppbygging tónlistar með tilliti til samsetningar takts og tóna er verkefni sem stærðfræðiþenkjandi tónlistarmenn ættu ekki að láta fram hjá sér fara.

Þá má í lokin nefna þá möguleika sem felast í því að samtvinna jafntengdar námsgreinar eins og stærðfræði og tónlist. Ekki væri nú leiðinlegra að syngja og spila stærðfræðina í stærðfræðitímanum.

Heimildir:

- Kristín Bjarnadóttir *Stærðfræði og tónlist*. Fréttabréf félags raungreina-kennara, 2. tbl. 9. árg. 1992.
- www.en.wikipedia.org/wiki/Music_and_mathematics - sótt 16/11 09.
- John R. Pierce *The science of musical sound*. 1983 Scientific american books. New York.

Stærðfræðital

Norðmaðurinn Jan Einar Nordgreen hefur stungið upp á verkefnaformi: samtal tveggja manneskja. Engin spurning er gefin, verkefnið er að gefa samtalinu merkingu og svara þeim stærðfræðilegu spurningum sem vakna. Yfirleitt liggur einhver stærðfræðileg spurning í augum uppi.

Ungdoktorinn

- Er það satt að það eigi að veita þér doktorspróf í stærðfræði?
- Ég vildi súkkulaði en þeir vildu bara gefa doktorspróf.
- En þú ert bara sjö ára! Hvernig geta þeir gefið skólakrakka doktorspróf?
- Ég veit ekki. Eins og ég sagði, þá vildi ég frekar súkkulaði.
- En hvað uppgötvaðirðu sem gerði þig svona vinsælan hjá stærðfræðingunum?
- Ekkert merkilegt. Ég afsannaði bara undirstöðusetningu talnareiknings.
- Þessa sem segir að skammhliðar í öðru veldi séu samanlagðar jafnar langhliðinni í öðru veldi?
- Þessa sem segir að hverja tölu megi þátta á aðeins einn hátt niður í frumþætti.
- Hvernig fórstu að því að afsanna þetta?
- Ég rakst á mótdæmi.
- Í alvöru?
- Ef þú lofar að segja engum, skal ég segja þér það.
- Tíu fingur upp til Guðs.
- $1001 = 7 \cdot 143$ og $1001 = 11 \cdot 91$.
- Vá! Leyfðu mér að taka í höndina á þér!

Allar tölur ganga upp

- Allar tölur ganga upp í 60!
- Af hverju segirðu það?
- Sjáðu til, ég er búinn að prófa að deila með 1, 2, 3, 4, 5 og 6 og það gengur alltaf!
- Eeeh, ég er ekki alveg sannfærður.

- Nú ég prófaði líka 10, 20 og 30!?
- Ég skil ... hmmm ertu nokkuð stærðfræðingur?

Í skólanum eru hlutföllin skemmtilegust

- Jája, hvernig var fyrsti skóladagurinn?
- Leiðinlegur! sagði Blær.
- Leeeeiðinlegur! sagði Alex.
- Nú hvernig stendur á því? spurði pabbi áhyggjufullur.
- Æi, 12/17 af hinum krökkunum voru stelpur, sagði Blær og andvarpaði.
- Nú? Ég fann það út að 5/7 af hinum krökkunum voru stelpur! sagði Alex.

Að bæta hraðann

- Pabbi segir að ef hann keyri á 90 km hraða til Keflavíkur sé hann hálf tíma á leiðinni.
- Hvað er hann fljótur ef hann keyrir á 100 km hraða?
- Hmmm, bíddu við, ... jú hann er 27 mínútur. Það munar ekki nema 3 mínútum.
- Svo maður sparar 3 mínútur fyrir hverja 10 km. Ef hann keyrir á 150 sparar hann $3 \cdot 5 = 15$ mínútur?
- Ha? Nei ... sko ...

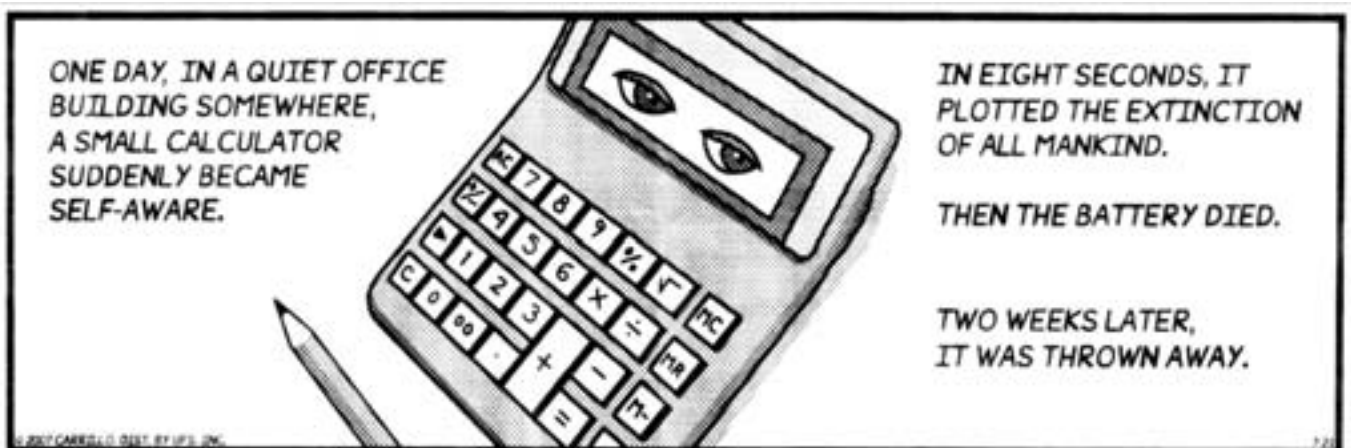
Tvöfaldur sparnaður

- Sjáðu nú til minn kæri húsfreyr, þessi ryksuga mun gera starf þitt helmingi auðveldara.
- Frábært! Láttu mig hafa tvær.

Á vefsíðu Jans Einars er fullt af fleiri sögum í þessum anda og margt fleira um stærðfræði og tilveruna:

easyquestion.net/thinkagain

Ingólfur Gíslason tók saman



Um Flöt	3
Starfspróun og bjargir kennarans	4
Guðbjörg Pálsdóttir	
Dig where you stand	8
Námstefna Flatar 2009	9
Hérinn, hundurinn og tófan	10
Kristín Bjarnadóttir	
Dagur stærðfræðinnar 2010	12
Skyrta sjómannsins	14
Þóra Þórhallsdóttir og Þórunn Jónasdóttir	
Norsma5	16
Stærðfræði og tónlist	20
Jarl Sigurgeirsson	
Stærðfræðital	23
Ingólfur Gíslason	